



Universidad de Buenos Aires  
Facultad de Ingeniería



# Desarrollo de un código de interacción viscosa-invíscida orientado a turbomaquinaria

Development of a code  
for the viscous-inviscid interaction  
oriented to turbomachinery

Tesis de Doctorado de la Universidad  
de Buenos Aires, Área Ingeniería

Tesista: Ricardo A. Prado

Director de Tesis: Dr. Sergio R. Idelsohn

Codirector de Tesis: Dr. Mario A. Storti

Mayo de 2007



## Jurado de Tesis

Dr. Jorge D'Elía

Ing. Juan Carlos Ferreri

Dr. Pablo Miguel Jacovkis

Dr. Axel Eduardo Larreteguy



# RESUMEN

Se describe la metodología utilizada para analizar el comportamiento fluidodinámico de un tipo particular de turbomáquina, la turbina eólica de eje horizontal. Se considera que las palas de la turbina, que presentan torsión y curvatura, trabajan bajo condiciones de rotación y viento incidente uniformes. El análisis se realiza mediante un proceso de interacción entre la zona del campo fluidodinámico en donde los efectos viscosos pueden despreciarse y la región próxima a las superficies de la pala, donde los efectos viscosos son preponderantes. La zona externa, caracterizada por un flujo invíscido, es resuelta mediante la aplicación del método de los paneles, técnica que representa tanto la pala como su estela helicoidal mediante un entramado de hilos vorticosos, cada uno de ellos con una circulación asociada. La capa viscosa que se desarrolla sobre las superficies es resuelta por medio de la discretización de las ecuaciones de la capa límite tridimensional de Prandtl, bajo condiciones estacionarias, en un sistema coordenado curvilíneo no ortogonal, implementando la técnica de las diferencias finitas. Ambas soluciones numéricas están acopladas pues el flujo invíscido actúa de condición de contorno para la solución viscosa. El análisis del flujo en la capa viscosa se limita a una condición de régimen laminar, razón por la cual el presente estudio se restringe a turbinas eólicas de pequeño porte.

Entre las contribuciones de la presente tesis se destacan la modificación del modelo de Dymnt para la representación de turbinas eólicas mediante la teoría de los discos actuadores y el desarrollo de las ecuaciones de la capa límite estacionaria tridimensional en componentes físicas contravariantes en un sistema coordenado curvilíneo generalizado (no-ortonormal ni homogéneo) solidario a una pala rotante.



# ABSTRACT

The methodology followed in order to analyze the fluid dynamic behavior of a particular kind of turbomachinery, the horizontal-axis wind turbine, is described. The turbine blades, that show torsion and curvature, rotate at a constant angular speed, in a uniform wind. The fluid dynamic analysis is carried out by means of a process of interaction between the zone where the viscous effects are negligible and the region next to the blade surfaces where the viscous effects are important. The external zone, where the inviscid flow is developed, is solved by means of a panel method, being the blade and its helicoidal wake modeled by vortex filaments. The viscous layer developed on the blade surfaces is solved by the discretization of the Prandtl three-dimensional boundary layer equations, under stationary conditions, in a non-orthogonal coordinate system. The discretization is carried out applying a finite difference technique. Both numerical solutions are coupled, since the inviscid flow acts as a boundary condition for the viscous solution. Since the analysis of the viscous boundary layer is restricted to a laminar flow, the present study is also restricted to small horizontal-axis wind turbines.

Among the most important contributions of the thesis are the modification of the Dymert's model for the actuator disk theory applied to wind turbines and the development of the steady three-dimensional boundary layer equations for the contravariant physical components in a non-orthonormal and inhomogeneous curvilinear coordinate system fixed to the rotating blade.





# AGRADECIMIENTOS

A los Dres. Sergio R. Idelsohn y Mario A. Storti, por haberme honrado con sus ofrecimientos de dirigir y codirigir esta tesis.

A los Dres. Gustavo Sánchez Sarmiento y Ricardo Bastianón, miembros de la Comisión de Seguimiento, por haberme brindado sus asesoramientos.

A los miembros del Jurado evaluador de esta tesis, Ing. Juan Carlos Ferreri y Dres. Pablo Jacovkis, Axel Larreteguy y Jorge D'Elía, por sus aportes a la misma a través de sus comentarios, observaciones y correcciones.

A la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires, por haberme otorgado la oportunidad de llevar adelante la presente tarea de formación académica.

A la Universidad Nacional del Comahue, que mediante el aval a los proyectos de investigación en los cuales he participado, ha hecho posible la realización de esta tesis y de sus trabajos preliminares.

Al Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química (INTEC - Santa Fe) por otorgarme un lugar de trabajo, al personal de las bibliotecas del Centro Regional de Investigación y Desarrollo de Santa Fe (CERIDE) y al grupo de trabajo del Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería (CIMEC).

Al Ing. Juan E. Perez Ipiña, por su estímulo siempre presente.



# LISTADO DE FIGURAS

- 2.1 Modelos de discos actuadores
  - a. Rankine-Froude (hélices).
  - b. Betz (turbinas eólicas).
- 2.2 Modelo de Dymnt (1989).
- 2.3 Cuerpo semi-infinito de Rankine. a: factor de reducción de velocidad en el disco.
- 2.4 Tubo de corriente  $\tau$ . a: factor de reducción de velocidad en el disco.
- 2.5 Analogía para la determinación de los factores de reducción de velocidad.
- 2.6 Dominios de evaluación, representación por separado.
- 2.7 Dominios de evaluación, representación conjunta.
- 2.8 Relación entre los coeficientes de reducción de velocidad.
- 2.9 Comparación entre modelos del coeficiente de tracción.
- 2.10 Comparación entre modelos del coeficiente de potencia extraída.
- 2.11 Comparación entre modelos del coeficiente de potencia suministrada.
- 2.12 Comparación entre modelos del coeficiente de potencia no utilizada.
- 2.13 Coeficientes de pérdida de presión dentro del tubo de corriente  $\tau$ .
- 2.14 Coeficientes de pérdida total de presión dentro del tubo de corriente  $\tau$ .
- 2.15 Configuraciones del tubo de corriente  $\tau$ , siendo  $a = 0,3$ , según los diferentes modelos.
- 2.16 Reducción de velocidad dentro del tubo de corriente  $\tau$ , siendo  $a = 0,3$ , según los diferentes modelos.
- 3.1 Anillo vorticoso ligado al panel i.
- 3.2 Configuración del hilo vorticoso ligado a un panel k del borde de fuga de la pala.
- 3.3 Configuración vorticosa asociada a la pala.
- 3.4 Segmento de tubo de corriente  $\tau$ , con tubos de corriente interiores que actuarán de envolventes de los hilos vorticosos de la estela para  $Z/R > 0$ .
- 3.5 Ley de Biot-Savart.
- 3.6 Coeficientes aerodinámicos de la sección de pala en una estación X.
- 3.7 Ángulos y velocidades incidentes en una estación X según envergadura.
- 3.8 Configuración geométrica de la pala y panelización.

- 3.9 Panelización de la pala, detalle de la punta de pala.
- 3.10 Configuración vorticosa de la estela, fragmento.
- 3.11 Configuración vorticosa de la estela, vista posterior, fragmento.
- 3.12 Coeficiente de influencia (50-25).
- 3.13 Coeficiente de influencia (25-51).
- 3.14 Distribución de la circulación adimensional asociada a los paneles de la pala, vista según envergadura.
- 3.15 Distribución de la circulación adimensional asociada a los paneles de la pala, vista según cuerda.
- 3.16 Distribución de la variación de circulación adimensional asociada a los paneles de la pala, vista según envergadura.
- 3.17 Distribución de la variación de circulación adimensional asociada a los paneles de la pala, vista según cuerda.
- 3.18 Distribución de las velocidades inducidas sobre los paneles (referencia en m/s).
- 3.19 Velocidades inducidas, detalle de la punta de pala (referencia en m/s).
- 3.20 Velocidades inducidas, vista desde la punta de pala (referencia en m/s).
- 3.21 Distribución de velocidades resultantes sobre los paneles (referencia en m/s).
- 3.22 Velocidades resultantes, detalle de la punta de pala (referencia en m/s).
- 3.23 Velocidades resultantes, detalle de la raíz de pala (referencia en m/s).
- 3.24 Distribución del vector fuerza invíscida, vista desde el borde de fuga de la pala.
- 3.25 Distribución del vector fuerza invíscida, vista desde el borde de ataque de la pala.
- 3.26 Distribución del vector fuerza invíscida, detalle de la porción media de la pala.
- 3.27 Distribución del vector fuerza invíscida, vista desde la punta de la pala.
- 3.28 Distribución del coeficiente de presión sobre el extradós de la pala.
- 3.29 Distribución de la componente según cuerda del gradiente de presiones sobre el extradós de la pala.
- 3.30 Distribución de la componente según envergadura del gradiente de presiones sobre el extradós de la pala.
- 4.1 Representación esquemática de los flujos principal y cruzado (también denominado secundario) en una capa límite tridimensional.
- 4.2 Geometría de la pala y sistemas coordenados global y local.
- 4.3 Dominio físico y dominio computacional.

- 4.4 Distribución de la componente X de la velocidad invíscida,  $U_{NV}$ , en el sistema global.
- 4.5 Distribución de la componente Y de la velocidad invíscida,  $V_{NV}$ , en el sistema global.
- 4.6 Distribución de la componente Z de la velocidad invíscida,  $W_{NV}$ , en el sistema global.
- 4.7 Distribución de la velocidad invíscida resultante, en el sistema global.
- 4.8 Distribución de la velocidad invíscida según cuerda,  $u_{NV}$ , en el sistema local.
- 4.9 Distribución de la velocidad invíscida según envergadura,  $w_{NV}$ , en el sistema local.
- 4.10 Perfiles iniciales para la velocidad según cuerda,  $u$ , al 80%b.
- 4.11 Perfiles iniciales para la velocidad según envergadura,  $w$ , al 80%b.
- 4.12 Perfiles de la velocidad según cuerda,  $u$ , sobre extradós, al 90%b.
- 4.13 Perfiles de la velocidad según envergadura,  $w$ , sobre extradós, al 90%b.
- 4.14 Perfiles de la velocidad según cuerda,  $u$ , sobre extradós, al 80%b.
- 4.15 Perfiles de la velocidad según envergadura,  $w$ , sobre extradós, al 80%b.
- 4.16 Perfiles de la velocidad según cuerda,  $u$ , sobre extradós, al 50%b.
- 4.17 Perfiles de la velocidad según envergadura,  $w$ , sobre extradós, al 50%b.
- 4.18 Perfiles de la velocidad según cuerda,  $u$ , sobre extradós, al 20%b.
- 4.19 Perfiles de la velocidad según envergadura,  $w$ , sobre extradós, al 20%b.
- 4.20 Historia de la convergencia de las componentes  $u$ ,  $v$  y  $w$ , respectivamente.
- 4.21 Distribución de la tensión cortante viscosa  $\tau_{yx}$  sobre el extradós de la pala.
- 4.22 Distribución de la tensión cortante viscosa  $\tau_{yx}$  sobre el extradós de la pala, considerando un flujo de Blasius casi equivalente.
- 4.23 Distribución de la tensión cortante viscosa  $\tau_{yx}$  sobre la pala, y su comparación con un flujo de Blasius casi equivalente, para determinadas posiciones según envergadura.
- 4.24 Distribución de la tensión cortante viscosa  $\tau_{yz}$  sobre el extradós de la pala.
- 4.25 Espesores de la capa viscosa y límite del dominio físico.
- 4.26 Espesores de la capa límite sobre el extradós de la pala.
- 4.27 Distribución del espesor de la capa viscosa sobre el extradós de la pala.
- 4.28 Comparación del espesor de la capa viscosa con la solución aproximada a Blasius.
- 4.29 Distribución del espesor de desplazamiento sobre el extradós de la pala.
- 4.30 Comparación del espesor de desplazamiento con la solución aproximada a Blasius.
- 4.31 Distribución del espesor de cantidad de movimiento sobre el extradós de la pala.

- 4.32 Comparación del espesor de cantidad de movimiento con la solución aproximada a Blasius.
- 4.33 Ángulos de la línea de corriente límite sobre el extradós de la pala.
- 4.34 Ángulos de la línea de corriente límite sobre el extradós de la pala (detalle).
- 4.35 Ángulos de la línea de corriente invíscida sobre el extradós de la pala.
- 4.36 Ángulos de la línea de corriente invíscida sobre el extradós de la pala (detalle).
- 4.37 Distribución del número de Reynolds local sobre el extradós de la pala.
- A1.1 Componentes de velocidad asociadas a la terna adherida a la superficie rotante.
- A1.2 Zonas de influencia y dependencia.
- A1.3 Representación del campo de velocidades en la capa límite, de las líneas de corriente invíscida y límite y de las tensiones en la pared.
  - (a) flujo adherido
  - (b) condición de separación ordinaria
- A2.1 Sistema rectangular cartesiano y curvilíneo no ortogonal ni homogéneo definido por sus bases covariantes  $\vec{g}_i$ .
- A2.2 Vector 2D en las bases duales (covariante y contravariante).
- A4.1 Sistemas coordenados curvilíneo de bases  $\vec{g}_i$  y rectangular cartesiano.
- A4.2 Sección genérica de una pala conformada por perfiles sin curvatura.
- A4.3 Geometría del perfil de arco circular.
- A5.1 Esquema centrado en  $(i+1/2, j-1/2, k)$  para ecuación de continuidad.
- A5.2 Esquema centrado en  $(i+1/2, j, k)$  para ecuación de cantidad de movimiento.

# **LISTADO DE TABLAS**

- 2.1 Comparación entre modelos
- 2.2 Tabla comparativa de coeficientes característicos





# LISTADO DE SÍMBOLOS

- a coeficiente de reducción de velocidad en el disco actuador.
- $\bar{a}$  vector aceleración absoluta.
- $\bar{a}_0$  vector aceleración lineal de la terna móvil.
- b coeficiente de reducción de velocidad suficientemente lejos corriente abajo del disco actuador (Capítulo 2).
- b envergadura de la pala.
- $b_k$  envergadura del k-ésimo panel.
- c cuerda de la pala.
- $c_h$  cuerda de la pala en la raíz.
- $c_k$  cuerda del k-ésimo panel.
- $c_t$  cuerda de la pala en la punta.
- $\bar{d}_k$  vector distancia desde el origen de la terna global hasta el punto medio del hilo ligado al k-ésimo panel.
- $\hat{e}_x$  versor dirigido según el eje coordenado local x.
- $\hat{e}_y$  versor dirigido según el eje coordenado local y.
- $\hat{e}_z$  versor dirigido según el eje coordenado local z.
- $\hat{e}_X$  versor dirigido según el eje coordenado global X.
- $\hat{e}_Y$  versor dirigido según el eje coordenado global Y.
- $\hat{e}_Z$  versor dirigido según el eje coordenado global Z.
- f función que define el contorno superior del dominio físico para el cálculo de la capa viscosa.
- $\bar{f}$  fuerza por unidad de volumen, aplicada sobre una partícula fluida.
- $\bar{f}_0$  fuerza aparente, por unidad de volumen, debida a la aceleración lineal de la terna móvil.
- $g_0$  determinante de la matriz métrica covariante  $[g_{ij}]$ .
- $g^0$  determinante de la matriz métrica contravariante  $[g^{ij}]$ .
- $[g_{ij}]$  matriz métrica covariante.
- $[g^{ij}]$  matriz métrica contravariante.
- $g_{ij}$  componentes métricos, covariantes, de  $[g_{ij}]$ .

- $g^{rs}$  componentes métricos, contravariantes, de  $[g^{ij}]$
- $\vec{g}$  vector aceleración gravitatoria.
- $\vec{g}^i$  vectores base contravariantes del sistema curvilíneo.
- $\vec{g}_i$  vectores base covariantes del sistema curvilíneo.
- $h$  flecha del perfil de arco circular.
- $h_i$  métricos de la transformación.
- $i$  índice correspondiente a la discretización según cuerda.
- $\hat{i}_X$  versor dirigido según el eje coordenado global X.
- $\hat{i}_Y$  versor dirigido según el eje coordenado global Y.
- $\hat{i}_Z$  versor dirigido según el eje coordenado global Z.
- $\hat{i}_r = \hat{i}^r$  versores de las bases ortogonales.
- $j$  índice correspondiente a la discretización según el espesor de la capa viscosa.
- $k$  índice correspondiente a la discretización según envergadura.
- $k$  intensidad de la fuente puntual.
- $k_i$  coeficientes provenientes de la transformación del dominio ( $i = 1,2,3$ ).
- $n$  enésima iteración.
- $\hat{n}$  versor normal a la superficie.
- $p$  presión estática local.
- $\tilde{p}$  presión estática adimensional.
- $p_\infty$  presión estática de la corriente libre.
- $p'$  presión estática sobre la cara anterior del disco actuador.
- $p''$  presión estática sobre la cara posterior del disco actuador.
- $q_\tau$  caudal circulante entre el tubo de corriente  $\tau$  y el cuerpo semi-infinito de Rankine.
- $q$  presión dinámica local.
- $q_\infty$  presión dinámica de la corriente libre.
- $r$  coordenada radial.
- $r_0$  posición radial de los puntos de inicio de los hilos vorticosos libres de la estela.
- $r_\tau$  radio local de los tubos de corriente interiores al tubo de corriente  $\tau$ .
- $\vec{r}$  vector posición.
- $\vec{r}_s$  vector posición a un punto de la superficie de la pala.
- $s$  longitud de arco de hilo vorticoso (Capítulo 3).

- s longitudud de arco del perfil de arco circular (Apéndice 4).
- t tiempo.
- $\vec{t}_1$  vector tangente a la línea  $x = \text{constante}$ .
- $\vec{t}_2$  vector tangente a la línea  $z = \text{constante}$
- u componente de velocidad según el eje x, en el sistema local.
- $\tilde{u}$  componente de velocidad según el eje x, en el sistema local, adimensional.
- $u_{NV}$  componente de velocidad invíscida según el eje x, en el sistema local.
- $u^i$  componentes físicas del vector velocidad en el sistema coordenado local, ( $i = 1,2,3$ ).
- v componente de velocidad según el eje y, en el sistema local.
- $\tilde{v}$  componente de velocidad según el eje y, en el sistema local, adimensional.
- $v_x$  componente axial del flujo generado por la superposición potencial: fuente + corriente libre.
- $v_y$  componente radial del flujo generado por la superposición potencial: fuente + corriente libre.
- $v^i$  componentes contravariantes del vector velocidad en el sistema coordenado local, ( $i = 1,2,3$ ).
- $v_i$  componentes covariantes del vector velocidad en el sistema coordenado local, ( $i = 1,2,3$ ).
- $v_{NV}$  componente de velocidad invíscida según el eje y, en el sistema local.
- w componente de velocidad según el eje z, en el sistema local.
- $\tilde{w}$  componente de velocidad según el eje z, en el sistema local, adimensional.
- $w_{NV}$  componente de velocidad invíscida según el eje z, en el sistema local.
- x coordenada axial de los tubos de corriente (Capítulo 2).
- x coordenada local según cuerda (Capítulo 4).
- $\tilde{x}$  coordenada local según cuerda, adimensional.
- $\bar{x}$  abscisa adimensional del tubo de corriente  $\tau$ .
- $x_p$  abscisa del perfil.
- $x^i$  componentes contravariantes del vector posición en el sistema coordenado local, ( $i = 1,2,3$ ).
- $x_i$  componentes covariantes del vector posición en el sistema coordenado local, ( $i = 1,2,3$ ).
- $x_{sep}$  coordenada local según cuerda donde tiene lugar la separación de la capa límite.
- y coordenada radial de los tubos de corriente (Capítulo 2).
- y coordenada local normal a la superficie de la pala (Capítulo 4).

- $\tilde{y}$  coordenada local normal a la superficie de la pala, adimensional.
- $y_p$  ordenada del perfil.
- $y_0$  ordenada del cuerpo semi-infinito de Rankine en la posición de la fuente.
- $y_\tau$  ordenada del tubo de corriente  $\tau$ .
- $\bar{y}_\tau$  ordenada adimensional del tubo de corriente  $\tau$ .
- $z$  coordenada local según envergadura.
- $\tilde{z}$  coordenada local según envergadura, adimensional.
- $z_{sep}$  coordenada local según envergadura donde tiene lugar la separación de la capa límite.
- $z$  coeficiente de pérdida total de presión total.
- $z'$  coeficiente de pérdida de presión total corriente abajo del disco actuador.
- $z''$  coeficiente de pérdida de presión total corriente arriba del disco actuador.
- $A$  área del disco actuador, área barrida por la turbina.
- $A_j$  coeficiente del término evaluado en la posición  $(i+1,j,k)$ , correspondiente la formulación general en diferencias finitas.
- $A_p$  área de la pala.
- [A] matriz de transformación entre las bases global y local.
- $B$  radio de la pala en la punta.
- $B_j$  coeficiente del término evaluado en la posición  $(i+1,j-1,k)$ , correspondiente la formulación general en diferencias finitas.
- [B] matriz de transformación entre las bases local y global.
- B.A. borde de ataque de la pala.
- B.F. borde de fuga de la pala.
- $C_j$  coeficiente del término independiente, correspondiente la formulación general en diferencias finitas.
- $C_1$  término constante de la función  $f$ .
- $C_2$  coeficiente de la función  $f$ .
- $C_i$  coeficiente de influencia.
- $C_{ie}$  coeficiente de influencia debido exclusivamente a la estela de hilos vorticosos libres.
- $C_{ieX}$  coeficiente de influencia debido exclusivamente a la estela de hilos vorticosos libres que afecta a la componente X de la velocidad inducida.
- $C_{ieY}$  coeficiente de influencia debido exclusivamente a la estela de hilos vorticosos libres que afecta a la componente Y de la velocidad inducida.

- $C_{i_eZ}$  coeficiente de influencia debido exclusivamente a la estela de hilos vorticosos libres que afecta a la componente Z de la velocidad inducida.
- $C_d$  coeficiente local de resistencia.
- $C_l$  coeficiente local de sustentación.
- $C_{fq}$  coeficiente local de fuerza de torque.
- $C_p$  coeficiente de potencia.
- $C_{Pe}$  coeficiente de potencia extraída.
- $C_{Ps}$  coeficiente de potencia suministrada.
- $C_{Pw}$  coeficiente de potencia no utilizada.
- $C_Q$  coeficiente de torque de la pala.
- $C_t$  coeficiente local de tracción.
- $C_T$  coeficiente de tracción de la pala.
- $D_j$  coeficiente del término evaluado en la posición  $(i+1,j+1,k)$ , correspondiente la formulación general en diferencias finitas.
- $D_{mn}$  elementos covariantes del tensor velocidad de corte.
- $F$  fuerza axial resultante sobre la sección anular externa al tubo de corriente  $\tau$ .
- $F^i$  componentes contravariantes del vector fuerza de fricción en el sistema coordenado global,  $(i = 1,2,3)$ .
- $F_{\mu X}$  componente según el eje X de la fuerza de fricción sobre la pala.
- $F_{\mu Y}$  componente según el eje Y de la fuerza de fricción sobre la pala.
- $F_{\mu Z}$  componente según el eje Z de la fuerza de fricción sobre la pala.
- $F_Z$  componente según el eje Z de la fuerza aerodinámica invíscida sobre la pala,  $\vec{F}$ .
- $\vec{F}$  vector fuerza aerodinámica resultante sobre la pala, bajo condiciones invíscidas.
- $\vec{F}_k$  vector fuerza aerodinámica resultante, invíscida, sobre el k-ésimo panel.
- $\vec{F}_{visc}$  vector fuerza de fricción resultante sobre la superficie de la pala.
- $H$  radio de la pala en la raíz.
- $J$  jacobiano de la transformación.
- $K_{ij}$  coeficientes que actúan como símbolos de Christoffel en la ecuación de continuidad.
- $K_{ijk}$  coeficientes que actúan como símbolos de Christoffel en las ecuaciones de cantidad de movimiento.
- $\vec{M}_{visc}^0$  vector momento de las fuerzas viscosas con respecto al origen de coordenadas de la terna global.

- $M_{\mu X}$  componente según el eje X del momento de la fuerza de fricción sobre la pala.
- $M_{\mu Y}$  componente según el eje Y del momento de la fuerza de fricción sobre la pala.
- $M_{\mu Z}$  componente según el eje Z del momento de la fuerza de fricción sobre la pala.
- $N_p$  Número de paneles.
- O orden de magnitud.
- P potencia.
- P punto genérico de coordenadas  $(X_P, Y_P, Z_P)$ .
- $P_c$  punto de colocación del panel.
- $P_{ls}$  punto medio del hilo sustentador del panel.
- $\vec{Q}$  vector cupla, obtenido bajo condiciones invíscidas.
- $Q_Z$  componente según el eje Z del vector cupla  $\vec{Q}$ .
- R radio del disco actuador.
- $R_c$  radio del perfil de arco circular.
- $R_\tau$  radio local del tubo de corriente  $\tau$ .
- $R_{\tau 0}$  radio del tubo de corriente  $\tau$  en la posición del disco actuador.
- $R_{\tau-\infty}$  radio del tubo de corriente  $\tau$  lejos corriente abajo de la posición del disco actuador.
- $R_{\tau+\infty}$  radio del tubo de corriente  $\tau$  lejos corriente arriba de la posición del disco actuador.
- $Re$  número de Reynolds global.
- $Re_x$  número de Reynolds local.
- $Re_{\delta_2}$  número de Reynolds basado en el espesor de cantidad de movimiento.
- S longitud total del perfil.
- T fuerza de tracción.
- [T] tensor de tensiones.
- $T^{rs}$  componentes contravariantes del tensor de tensiones.
- $T_{rs}$  componentes covariantes del tensor de tensiones.
- $T^{<rs>}$  componentes físicas del tensor de tensiones.
- U componente de velocidad según el eje X, en el sistema global.
- U  $\equiv u_{NV}$  (Apéndice 5).
- $U_{NV}$  componente de velocidad invíscida según el eje X, en el sistema global.
- $\vec{U}$  vector velocidad resultante sobre el hilo ligado al cuarto de cuerda del panel.
- $\tilde{U}$  módulo de la velocidad invíscida sobre la capa viscosa, 2D, adimensional.
- V componente de velocidad según el eje Y, en el sistema global.

- $V_n$  componente normal de la velocidad resultante en el punto de colocación del panel.
- $V_0$  velocidad del viento sobre el disco de la turbina.
- $V_\infty$  velocidad no perturbada del viento.
- $V_{-\infty}$  velocidad del viento suficientemente lejos corriente arriba del disco actuador.
- $V_{+\infty}$  velocidad del viento suficientemente lejos corriente abajo del disco actuador.
- $V_i$  módulo de la velocidad inducida por el sistema vorticoso.
- $V_{iX}$  componente según el eje X de la velocidad inducida por el sistema vorticoso.
- $V_{iY}$  componente según el eje Y de la velocidad inducida por el sistema vorticoso.
- $V_{iZ}$  componente según el eje Z de la velocidad inducida por el sistema vorticoso.
- $V_{NV}$  componente de velocidad invíscida según el eje Y, en el sistema global.
- $V_r$  módulo de la velocidad resultante sobre el punto de colocación del panel.
- $V_R$  módulo de la velocidad resultante en un flujo 3D.
- $V_{Rb\infty}$  módulo de la velocidad resultante en un flujo 2D.
- $V^i$  componentes contravariantes del vector velocidad en el sistema coordenado global, ( $i = 1,2,3$ ).
- $\vec{V}$  vector velocidad relativa del aire con respecto a la pala.
- $\vec{V}_i$  vector velocidad inducida.
- $\vec{V}_r$  vector velocidad resultante.
- $W$  componente de velocidad según eje Z, en el sistema global.
- $W \equiv w_{NV}$  (Apéndice 5).
- $W_{NV}$  componente de velocidad invíscida según el eje Z, en el sistema global.
- $X$  coordenada global dirigida a lo largo de la envergadura de la pala.
- $X_0$  coordenada X del punto de inicio del hilo vorticoso helicoidal de la estela.
- $X_e$  coordenada global X de la estela de hilos vorticosos libres.
- $X_S$  coordenada global X de un punto de la superficie de la pala.
- $X^i$  coordenadas del sistema rectangular cartesiano global ( $i = 1,2,3$ ).
- $X_S^i$  coordenadas de la superficie de la pala en el sistema rectangular cartesiano global ( $i = 1,2,3$ ).
- $Y$  coordenada global, normal a X y a Z.
- $Y_0$  coordenada Y del punto de inicio del hilo vorticoso helicoidal de la estela.
- $Y_e$  coordenada global Y de la estela de hilos vorticosos libres.
- $Y_S$  coordenada global Y de un punto de la superficie de la pala.

- $Z$  coordenada global dirigida según el sentido del viento incidente.
- $Z_0$  coordenada  $Z$  del punto de inicio del hilo vorticoso helicoidal de la estela.
- $Z_e$  coordenada global  $Z$  de la estela de hilos vorticosos libres.
- $Z_S$  coordenada global  $Z$  de un punto de la superficie de la pala.
- $\alpha_c$  ángulo de ataque medido desde la cuerda de la sección de pala, en un flujo 3D.
- $\alpha_{cb\infty}$  ángulo de ataque medido desde la cuerda de la sección de pala, en un flujo 2D.
- $\alpha_{ij}$  coeficientes de la matriz [A].
- $\beta$  ángulo definido en el perfil de arco circular.
- $\beta_{ext}$  ángulo de la línea de corriente externa o invíscida.
- $\beta_{lim}$  ángulo de la línea de corriente límite sobre la pared.
- $\beta_{ij}$  coeficientes de la matriz [B].
- $\gamma$  ángulo definido en el perfil de arco circular (Apéndice 4).
- $\gamma$  circulación del hilo vorticoso (Capítulo 3).
- $\gamma^*$  circulación adimensional del hilo vorticoso.
- $\gamma_{BF}$  circulación de la porción de hilo vorticoso ubicado sobre el borde de fuga de la pala.
- $\delta$  distancia entre la fuente puntual y el vértice del cuerpo semi-infinito de Rankine (Capítulo 2).
- $\delta$  espesor de la capa viscosa (Capítulo 4).
- $\delta_1$  espesor de desplazamiento de la capa límite.
- $\delta_2$  espesor de cantidad de movimiento de la capa límite.
- $\delta^{B'}$  espesor de la capa viscosa según el modelo semejante al flujo de Blasius.
- $\delta_1^{B'}$  espesor de desplazamiento según el modelo semejante al flujo de Blasius.
- $\delta_2^{B'}$  espesor de cantidad de movimiento según el modelo semejante al flujo de Blasius.
- $\varepsilon$  ángulo formado por la velocidad tangencial local y la velocidad del viento sobre el disco de la turbina.
- $\varepsilon_{ijk}$  tensor definido para el producto vectorial.
- $\chi$  ángulo del perfil de arco circular.
- $\varphi$  ángulo de torsión.
- $\varphi'$  derivada primera del ángulo de torsión.
- $\varphi''$  derivada segunda del ángulo de torsión.
- $\varphi_c$  ángulo de torsión medido desde la línea de cuerda.
- $\kappa$  paso del hilo vorticoso helicoidal de la estela.



$\lambda$	alargamiento de la pala.
$\lambda_B$	determinante de la matriz B.
$\rho$	densidad del aire.
$\mu$	viscosidad absoluta del aire.
$\nu$	viscosidad cinemática del aire.
$\pi$	número pi.
$\theta$	coordenada angular en el sistema esférico axialsimétrico.
$\theta$	coordenada angular medida desde el borde de ataque del perfil de arco circular.
$\theta^*$	ángulo tendido por el perfil de arco circular.
$\sigma$	signo del producto vectorial según la definición de una terna derecha o izquierda.
$\sigma$	relación de velocidades en la punta de la pala.
$\sigma_0$	relación de velocidades en la punta de la pala, considerando $V_0$ .
$\sigma_\infty$	relación de velocidades en la punta de la pala, considerando $V_\infty$ .
$\tau$	tubo de corriente (Capítulos 2 y 3).
$\tau$	tensión viscosa.
$\tau_w$	tensión viscosa en la pared.
$\tau_{mn}$	componentes covariantes del tensor de tensiones viscosas.
$\tau^{rs}$	componentes contravariantes del tensor de tensiones viscosas.
$\zeta$	distancia desde el hilo vorticoso hasta el punto de cálculo de la velocidad inducida.
$\xi$	razón entre el radio del disco actuador y la longitud al vértice del cuerpo semi-infinito de Rankine.
$\eta$	coordenada adimensional según el espesor de la capa viscosa para la discretización del dominio computacional.
$\eta$	eficiencia de la turbina.
$\zeta$	coordenada adimensional según envergadura para la discretización del dominio computacional.
$\zeta_0$	coordenada adimensional que define la posición $\zeta$ de la raíz de la pala.
$\zeta'$	pérdida de presión total corriente abajo de la posición del disco actuador.
$\zeta''$	pérdida de presión total corriente arriba de la posición del disco actuador.
$\omega$	velocidad angular.
$\omega^i$	componentes físicas de la velocidad angular en el sistema local ( $i = 1,2,3$ ).
$\varpi^i$	componentes contravariantes de la velocidad angular en el sistema local ( $i = 1,2,3$ ).

- $\bar{\Delta}$  vector ubicado sobre el hilo ligado al cuarto de cuerda del panel.
- $\Delta$  espesor adimensional de la capa límite.
- $\Delta\xi$  intervalo de discretización según cuerda del dominio computacional.
- $\Delta\eta$  intervalo de discretización del espesor de la capa viscosa en el dominio computacional.
- $\Delta\zeta$  intervalo de discretización según envergadura del dominio computacional.
- $\Theta$  parámetro del hilo vorticoso helicoidal de la estela.
- $\Theta_0$  valor del parámetro  $\Theta$  en correspondencia con el inicio del hilo vorticoso de la estela.
- $\Sigma$  sumatoria.
- $\Gamma$  circulación resultante del hilo ligado al cuarto de cuerda del panel.
- $\Gamma^*$  circulación resultante adimensional.
- $\Psi$  función de corriente.
- $\Psi_0$  función de corriente correspondiente al cuerpo semi-infinito de Rankine.
- $\Psi_\tau$  función de corriente correspondiente al tubo de corriente  $\tau$ .
- $\Omega$  módulo de la velocidad angular de la terna adherida a la pala.
- $\Omega_p$  módulo de la velocidad angular de la pala.
- $\Omega_a$  módulo de la velocidad angular del aire.
- $\Omega^i$  componentes contravariantes de la velocidad angular en el sistema global ( $i = 1,2,3$ ).
- $\bar{\Omega}$  vector velocidad angular de la turbina.
- $\bar{\nabla}$  operador nabra.
- $\nabla^2$  operador laplaciano.

# ÍNDICE

## PRÓLOGO

<b>CONTENIDO</b>	1
------------------	---

## CAPÍTULO 1

### INTRODUCCIÓN

1.1.	CONSIDERACIONES GENERALES	5
1.2.	DIFERENTES APROXIMACIONES PARA LA DESCRIPCIÓN DEL MODELO FLUIDODINÁMICO	7
1.3.	MODELOS INVÍSCIDOS APLICADOS A TURBINAS EÓLICAS	12
1.4.	INTERACCIÓN VISCOSA/INVÍSCIDA	16
1.5.	ESTELAS	19

## CAPÍTULO 2

### TEORÍA DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

2.1.	INTRODUCCION	21
2.2.	TUBO DE CORRIENTE $\tau$	23
2.3.	REDUCCION DE VELOCIDAD	26
2.4.	PERDIDAS DE PRESION	29
2.5.	COEFICIENTES DE LA TURBINA EOLICA	32
2.6.	COMPARACIÓN CON OTROS MODELOS	32
2.7.	CONCLUSIONES	38

## **CAPÍTULO 3**

### **MODELIZACIÓN DEL FLUJO INVÍSCIDO**

3.1.	INTRODUCCIÓN	41
3.2.	FORMULACIÓN DEL MODELO NUMÉRICO POR EL MÉTODO DE LOS PANELES	42
3.2.1.	Consideraciones generales	45
3.2.2.	Conformación de la estela de la pala	46
3.2.3.	Cálculo de las velocidades inducidas	48
3.2.4.	Cálculo de las cargas aerodinámicas	51
3.3.	EJEMPLO	53
3.4.	CONCLUSIONES	70

## **CAPÍTULO 4**

### **MODELIZACIÓN DEL FLUJO VISCOSO SOBRE LAS SUPERFICIES DE LA PALA**

4.1.	INTRODUCCIÓN	71
4.2.	ANTECEDENTES	72
4.3.	FORMULACIÓN MATEMÁTICA	78
4.3.1.	Ecuaciones generales del movimiento. Definición del sistema de coordenadas	78
4.3.2.	Ecuaciones de la capa límite laminar y estacionaria en coordenadas curvilíneas no-ortonormales	80
4.3.3.	Geometría de la pala	84
4.3.4.	Transformación del dominio físico	85
4.4.	ECUACIONES DE GOBIERNO DE LA CAPA LÍMITE	87
4.4.1.	Condiciones de contorno	89
4.5.	TENSOR DE TENSIONES VISCOSAS LAMINARES	89
4.6.	MODELACIÓN NUMÉRICA	91
4.7.	EJEMPLO	93
4.8.	CONCLUSIONES	116

# APÉNDICE 1

## CAPA LÍMITE TRIDIMENSIONAL

A1.1.	ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO RELATIVO A EJES MÓVILES	119
A1.2.	ECUACIONES DE GOBIERNO EN FLUJO TRIDIMENSIONAL	121
A1.2.1.	Rotación uniforme alrededor de un eje coordenado	121
A1.2.2.	Adimensionalización de las ecuaciones de gobierno	123
A1.3.	ECUACIONES DE LA CAPA LÍMITE TRIDIMENSIONAL	124
A1.3.1.	Análisis de órdenes de magnitud	124
A1.3.2.	Reducción a capa límite bidimensional	128
A1.4.	CAPA LÍMITE TRIDIMENSIONAL EN UNA TERNA ROTANTE	129
A1.4.1.	Singularidades	130
A1.4.2.	Solución numérica de las ecuaciones de la capa límite tridimensional	131
A1.4.3.	Separación	133

# APÉNDICE 2

## CAPA LÍMITE TRIDIMENSIONAL EN COORDENADAS CURVILÍNEAS

A2.1.	TRANSFORMACIÓN A COORDENADAS CURVILÍNEAS GENERALIZADAS	135
A2.2.	ECUACIONES DE GOBIERNO EN COORDENADAS CURVILÍNEAS	140
A2.2.1.	Aceleración centrípeta $\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$	142
A2.2.2.	Aceleración de Coriolis $2(\vec{\Omega} \times \vec{V})$	143
A2.2.3.	Divergencia del campo de velocidades relativas $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$	146
A2.2.4.	Aceleración convectiva $(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}$	150
A2.2.5.	Gradiente de presión $\vec{\nabla} p$	154
A2.2.6.	Laplaciano del campo de velocidades relativas a la pala $\nabla^2 \vec{V}$	155
A2.3.	ECUACIONES DE LA CAPA LÍMITE ESTACIONARIA 3D	157
A2.3.1.	Condiciones de borde sobre el contorno superior de la capa límite	163

## **APÉNDICE 3**

### **EVALUACIÓN DE LOS EFECTOS VISCOSOS**

A3.1.	TENSOR DE TENSIONES VISCOSAS	167
A3.2.	FUERZAS Y MOMENTOS VISCOSOS	172

## **APÉNDICE 4**

### **PERFILES**

A4.1.	CONSIDERACIONES GENERALES	175
A4.2.	SUPERFICIE ALABEADA CON SECCIONES SIN CURVATURA	179
A4.3.	SUPERFICIE ALABEADA CONFORMADA POR PERFILES DE ARCO CIRCULAR	183

## **APÉNDICE 5**

### **ESQUEMA NUMÉRICO**

A5.	ESQUEMA KRAUSE ZIG-ZAG	189
A5.1.	Ecuación de continuidad	189
A5.2.	Ecuación de cantidad de movimiento según x	191
A5.3.	Ecuación de cantidad de movimiento según z	195
A5.4.	Comentarios adicionales	198

## **EPÍLOGO**

<b>CONCLUSIONES Y FUTURO TRABAJO</b>	199
--------------------------------------	-----

<b>REFERENCIAS</b>	203
--------------------	-----

# PRÓLOGO

## CONTENIDO

En la presente tesis se analiza el comportamiento fluidodinámico de una turbomáquina particular: la turbina eólica. Dadas las características particulares de esta configuración, este análisis se realiza llevando a cabo un proceso de interacción entre una zona del campo fluidodinámico en donde los efectos viscosos pueden despreciarse frente a los inerciales, y una zona próxima a las superficies de la pala donde los efectos viscosos y los inerciales son de orden semejante. El flujo de aire en cada una de estas zonas presenta características bien definidas, admitiendo el desarrollo de soluciones particulares, las cuales deben acoplarse. Debido a la complejidad de las ecuaciones de gobierno en ambas zonas del campo fluidodinámico, como así también de la geometría de la turbina y de sus condiciones de operación, se requieren de procesos de resolución numérica adecuados, los cuales se incorporaron en los códigos computacionales que se desarrollaron a tal efecto.

La tesis se desarrolla en cuatro capítulos y cinco apéndices con la finalidad de agilizar la lectura de la misma al separar la descripción de los modelos utilizados para la caracterización aerodinámica de las palas de aerogeneradores -los cuales se desarrollan en los capítulos-, de los desarrollos extensivos de las ecuaciones de gobierno del flujo viscoso, tanto en sus expresiones analíticas como en las numéricas, los cuales se encuentran volcados en los apéndices del texto.

En el Capítulo 1 se desarrollan los antecedentes del análisis aerodinámico de turbinas eólicas, desde los modelos más simples hasta los más realistas. En el Capítulo 2 se desarrolla un nuevo enfoque de la teoría de la cantidad de movimiento aplicado a un rotor eólico, con la finalidad de determinar una configuración de la envolvente de la estela vorticiosa de la turbina. En el Capítulo 3 se desarrolla la aplicación del método de los paneles para la determinación de las cargas aerodinámicas y del campo de velocidades alrededor de las palas, en un sistema coordenado cartesiano. Si bien esta metodología no considera los efectos de la viscosidad, incorpora el efecto de una pala de longitud finita, así como la presencia de un campo de velocidades inducidas generado por un modelo de estela vorticiosa

helicoidal de radio no constante. Finalmente, en el Capítulo 4 se incorporan los efectos de la viscosidad mediante la aplicación de la teoría de la capa límite de Prandtl al flujo viscoso sobre la superficie tridimensional de una pala -alabeada y con curvatura- en rotación uniforme, considerando un sistema coordenado curvilíneo asociado a dicha superficie. La técnica utilizada para la obtención de las soluciones numéricas es la de las diferencias finitas.

En el Apéndice 1 se desarrollan las ecuaciones de gobierno del flujo viscoso, incompresible, estacionario y tridimensional, considerando la rotación de un sistema cartesiano rectangular adherido al eje de la turbina. Estas ecuaciones de gobierno se simplifican mediante un análisis de órdenes de magnitud para dar lugar a las ecuaciones de la capa límite tridimensional. En el Apéndice 2, mediante una transformación a coordenadas curvilíneas generalizadas, y bajo las hipótesis de capa límite, se desarrollan cada uno de los términos presentes en las ecuaciones de gobierno, así como las condiciones de contorno de dichas ecuaciones, en un sistema coordenado curvilíneo general. Por su parte, las transformaciones del tensor de tensiones viscosas, también bajo los supuestos de la capa límite, son desarrolladas en el Apéndice 3, dando lugar a la definición de las fuerzas y los momentos de origen viscosos. En el Apéndice 4 se incorporan los aspectos geométricos de la superficie de la pala, considerando tanto el caso de un perfil local sin curvatura como el de la incorporación de la curvatura mediante la adopción de un modelo de perfil definido por una sección de arco circular. En cada caso se determinan los coeficientes que representan la relación funcional entre los sistemas coordenados utilizados -cartesiano global y curvilíneo local- correspondientes a cada tipo de superficie de pala. Finalmente, en el Apéndice 5 se desarrollan las ecuaciones discretizadas mediante la aplicación del denominado esquema Krause zig-zag en diferencias finitas. Las ecuaciones algebraicas resultantes correspondientes a la representación numérica de cada componente del campo de velocidades en la capa límite conforman sistemas tridiagonales, acoplados y linealizados que son resueltos iterativamente hasta alcanzar la convergencia.



Las publicaciones enmarcadas por la presente tesis han sido:

- I) Prado Ricardo A., Reformulation of the momentum theory applied to wind turbines. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 1995, 58, pp.277-292.
- II) Prado Ricardo A., Idelsohn Sergio y Storti Mario, Modelización del flujo invíscido alrededor de la pala de un aerogenerador mediante el método de los paneles. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 1998, Vol.14, No.4, pp.439-459.
- III) Prado Ricardo A., Storti Mario e Idelsohn Sergio, Numerical Simulation of the 3D Laminar Viscous Flow on a Horizontal-Axis Wind Turbine Blade. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 2002, Vol.16, No.4, pp.283-295.



# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN

### 1. 1. CONSIDERACIONES GENERALES

Tal como lo afirman Afjeh y Keith (1986a), la determinación del comportamiento aerodinámico de turbinas eólicas de eje horizontal es compleja debido a una gran cantidad de factores, entre los que se pueden enumerar la turbulencia y la no uniformidad de la corriente libre, los efectos de deformación sobre la estela vorticosa generada corriente abajo del rotor eólico, las interacciones entre las palas y la estela, así como las correspondientes a las palas entre sí y la influencia de la torre sobre el rotor.

Un requisito básico para una adecuada estimación del comportamiento de una turbina es una definición realista del campo de flujo, si bien se reconoce que la naturaleza compleja de la fluidodinámica involucrada, así como la variabilidad de las condiciones bajo las cuales opera, hacen que deban asumirse modelos simplificativos para la determinación de dicho campo, por lo cual la precisión de los resultados dependerá fundamentalmente de los supuestos empleados y del rigor de la metodología de análisis utilizada.

Por otra parte, y tal como lo afirma Sørensen (1998), se reconoce que los efectos tridimensionales juegan un rol crucial en la descripción del comportamiento aerodinámico del rotor de las turbinas eólicas, afectando las características de sustentación y resistencia de las palas que conforman dicho rotor. Aun sin la consideración de la rotación, los efectos tridimensionales están presentes por tratarse la pala de un ala de envergadura finita.

A su vez, y como lo puntualizan Shipley et al. (1994), debido a la variación aleatoria de las condiciones de la corriente incidente de aire sobre las palas del rotor, no puede asumirse que cada pala producirá la misma respuesta cíclica. Asimismo, ante la presencia de un perfil de viento no uniforme en altura, una misma pala se verá en una condición ambiental cambiante a medida que realiza un giro completo. Este efecto sería especialmente importante si la pala es de gran envergadura, mientras que resulta disminuido para una turbina eólica de pequeño diámetro.

Una de las técnicas de análisis más utilizadas es la representada por las experiencias de campo, como las reportadas por Simms y Butterfield (1994). Los resultados experimentales obtenidos se utilizan para un mejor entendimiento de la aerodinámica involucrada en las turbinas eólicas y de la respuesta estructural a dichas cargas, así como para proveer de información de manera de mejorar los modelos aerodinámicos implementados en los códigos computacionales de diseño.

Como proceso alternativo a las mediciones de campo, la actual tecnología de computadoras ha hecho posible de la mecánica de fluidos computacional una herramienta práctica y realista para el estudio aerodinámico de turbinas eólicas, mediante la simulación computacional del comportamiento fluidodinámico del rotor y su estela.

Como lo afirman Wagner et al. (1998), las aproximaciones numéricas para la simulación del flujo sobre una turbina eólica tienen por finalidad describir el comportamiento aerodinámico de las mismas, no solo con el objetivo de lograr un mejor diseño y eficiencia del rotor, mayor precisión en la determinación de la potencia extraída al viento, sino también predecir aspectos relacionados al diseño aerodinámico, como son los efectos aeroelásticos y aeroacústicos, los cuales dependen de una lograda predicción de las cargas sobre las palas. Consecuentemente, modelos más realistas sirven de base a un diseño integrado desde los puntos de vista aerodinámico y aeroacústico, con el objetivo de lograr secciones de pala silenciosas. Por otra parte, se requiere asimismo una adecuada evaluación de los mecanismos que inducen la fatiga, dado que este fenómeno reduce la vida operativa e incrementa los costos de mantenimiento de la turbina.

La falla de la pala de una turbina eólica, con sus consecuentes costos de reparación y de reemplazo, puede ser primariamente atribuida, según Shipley et al. (1994), a una inadecuada evaluación de las cargas aerodinámicas actuantes sobre la pala. Así, un mejor entendimiento de los fenómenos aerodinámicos involucrados conlleva a un diseño de pala más durable y eficiente, con la consecuente reducción efectiva de costos.

Existe una gran variedad de algoritmos computacionales, cuyo espectro se extiende desde los simples modelos potenciales bidimensionales hasta sofisticados programas de cómputo que resuelven las ecuaciones completas de Navier-Stokes, incluyendo modelos denominados como híbridos, los cuales relacionan los principios de la teoría del disco actuador con modelos Navier-Stokes tridimensionales. Como modelos intermedios se encuentran los programas de resolución iterativa flujo invíscido/capa límite, cuyas demandas

computacionales no son tan grandes como los correspondientes a los resolutores Navier-Stokes 3D.

Estos modelos pueden simular el desarrollo de la capa límite laminar, el fenómeno de transición de la capa viscosa, la estructura de la capa límite turbulenta y las características y extensión de una posible separación, efectos todos de cuya precisión en la modelación y resolución dependerán aspectos tales como los aeroacústicos y aeroelásticos. Por su parte, otros modelos mas simples, como los basados en la teoría del elemento de pala o en el método de los paneles, se han convertido en útiles herramientas numéricas de diseño preliminar. Los métodos de paneles son robustos, proveyendo de resultados razonables en tiempos relativamente reducidos, si bien son completamente incapaces de predecir o evaluar efectos donde la viscosidad juega un rol relevante, como ser en la separación del flujo.

## **1.2. DIFERENTES APROXIMACIONES PARA LA DESCRIPCIÓN DEL MODELO FLUIDODINÁMICO**

McCormick (1994), entre otros, describe las principales metodologías propuestas para el estudio aerodinámico de hélices en general, mientras que Eggleston y Stoddard (1987), Hunt (1981), Le Gourières (1982) y Bastianón (1994) detallan los métodos especialmente destinados al análisis de turbinas eólicas. Dichas metodologías, junto con las nuevas contribuciones a la modelación fluidodinámica de los rotores eólicos serán someramente desarrolladas a continuación.

La teoría de la cantidad de movimiento axial (o del disco actuador) desarrollada originalmente para hélices marinas por Rankine en 1865 y Froude en 1889 y para turbinas eólicas por Betz (1926, 1927), representa el modelo más simple, si bien no muy preciso, para la determinación de los parámetros globales (potencia, empuje, cupla) de una hélice mediante la aplicación de las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía. En esta teoría, la hélice es reemplazada por un disco actuador infinitamente delgado a través del cual la presión estática de la corriente varía de manera discontinua y el flujo que pasa a través de dicho disco puede separarse del resto mediante un tubo de corriente bien definido.

Otros supuestos inherentes a este modelo son que el disco se encuentra uniformemente cargado, no se consideran los efectos de la viscosidad del fluido, se desprecia la rotación impartida por la hélice al flujo que la cruza (el flujo es considerado únicamente axial) y la velocidad de la corriente es constante a través del disco.

A diferencia del modelo de disco actuador de Betz, los modelos propuestos por Dymment (1989) y Prado (1995) para la representación de turbinas eólicas mediante la teoría de la cantidad de movimiento axial, incluyen los efectos de pérdida de energía en el aire que fluye dentro del tubo de corriente que atraviesa al disco del rotor.

Para modelar más adecuadamente el flujo alrededor de una turbina eólica, el concepto de disco actuador se completa con la adición de un efecto de rotación del flujo corriente abajo del disco a la manera de una estela que rota en sentido contrario al mismo. Ello resulta de la aplicación del teorema del momento de la cantidad de movimiento (o teorema de la cantidad de movimiento angular), y del supuesto que la rotación de la estela comienza discontinuamente en el disco representativo del rotor.

Con la finalidad de examinar la aerodinámica de la pala del rotor con más detalle, se desarrolla la teoría del elemento de pala, considerando una porción de la misma como perteneciente a una pala de longitud infinita, vale decir, la sección es considerada como un perfil aerodinámico bidimensional aislado, de manera que no presenta un flujo inducido y no existe interrelación entre una sección y sus adyacentes. Dado que el elemento de pala no puede reconocer la presencia de la punta de la pala, donde la carga debe anularse, debe incorporarse un modelo de pérdida de sustentación hacia la punta. Por ejemplo, el factor de pérdida hacia la punta de Prandtl es uno de los modelos que intentan corregir los resultados de esta teoría por la presencia de efectos tridimensionales.

Asimismo, Clausen et al. (1987) han investigado experimentalmente la teoría del elemento de pala, encontrando que esta teoría subestima la contribución a la potencia entregada por la turbina eólica cuando el ángulo de ataque local excede el ángulo correspondiente a la condición de máxima relación sustentación a resistencia en flujo bidimensional, considerando como una de las principales posibles causas de esta subestimación a los efectos debidos a bajos números de Reynolds.

Como con el fin de obtener la distribución de carga sobre la pala es necesario determinar el campo fluidodinámico inducido por dicha carga, las teorías combinadas cantidad de movimiento-elemento de pala proporcionan la mecánica para poder determinar los ángulos de ataque inducidos con la finalidad de evaluar la cupla, el empuje y la potencia asociada.

Así, el siguiente nivel de complejidad está dado por la teoría de la cantidad de movimiento anular de Glauert, presentada en 1927, donde cada sección radial de pala es analizada independientemente utilizando los datos correspondientes a la sustentación del

perfil bidimensional, y de las ecuaciones de continuidad y de cantidad de movimiento. Dado que esta teoría es estrictamente aplicable a rotores con un número infinito de palas, correcciones adicionales propuestas por Prandtl y Goldstein han sido suficientemente satisfactorias para extender este modelo a rotores con un número finito de palas.

Con el objetivo de realizar un análisis preliminar de diseño, Glauert presentó un análisis tipo elemento de pala para encontrar el rotor eólico ideal, despreciando la resistencia del perfil pero incluyendo la rotación de la estela. Desarrolló así un modelo simple para el rotor eólico óptimo, donde se trata a la turbina como un disco actuador rotante, y si bien se consideran a los elementos de pala en cada estación con sus respectivas velocidades inducidas axial y tangencial, se desprecian los efectos de resistencia de la sección, por lo cual solamente se consideran los efectos de la sustentación sobre la tracción y el torque de la turbina.

En la turbina con eficiencia ideal, la inclusión del efecto de la rotación de la estela hace decrecer al coeficiente de potencia respecto del valor límite estipulado en la teoría del disco actuador de Betz.

Adaptaciones de la teoría de Glauert para la turbina eólica ideal conducen a modelos más completos (Wortman, 1983) y (Galetuse, 1986), que incorporan, entre otras modificaciones, la contribución de la resistencia del perfil en las coeficientes característicos de la turbina eólica.

Beans (1983) también presenta un análisis aproximado basado en las teorías del disco actuador y del elemento de pala, considerando entonces las características aerodinámicas de la pala a través de la pendiente de la curva de sustentación del perfil y de una resistencia constante, despreciando los efectos del número de Reynolds y considerando a la pala como un ala infinita. Siendo este un análisis más complejo que el dado por la teoría de Betz, incorpora la definición de un factor de interferencia local. La finalidad, tanto de este análisis como el de los anteriormente presentados, es proponer un modelo aproximado donde los coeficientes de la turbina eólica pueden ser determinados analíticamente, con fines de diseño preliminar y estudio de costos.

Por otra parte, las denominadas teorías vorticosas difieren principalmente de las anteriores en la metodología utilizada para determinar el campo de velocidades inducido. Las teorías vorticosas modelan la estela de la hélice, llevándose esto a cabo mediante hilos o paneles a los cuales se les asocia una determinada circulación. La configuración de la estela resulta de la definición de una geometría predeterminada o permitiendo que la misma se

alinee libremente con el flujo resultante, a través de un procedimiento iterativo a partir de una estimación inicial aproximada de la geometría de la estela.

Por ejemplo, la teoría de Goldstein (1929) se desarrolla de manera similar a la teoría de la línea sustentadora para alas desarrollada por Prandtl, reemplazando la pala por un hilo vorticoso ligado del cual parte un sistema vorticoso que forma una superficie helicoidal. Esta teoría desarrolla asimismo un modelo para la reducción de circulación hacia la punta debido a la interacción con el sistema vorticoso de la estela.

Por otra parte, Sanderson y Archer (1983) han extendido las teorías de hélices para aplicarlas a los rotores eólicos al adaptar la teoría de Betz-Prandtl mediante la incorporación de un modelo para la expansión de la estela, considerando asimismo la resistencia de la sección de pala y manteniendo también una función de distribución adimensional de circulación (función de Goldstein) que incluye un factor de pérdida hacia la punta de pala.

Teorías del disco actuador más refinadas, aplicadas a hélices, consideran la posibilidad de una carga no uniforme sobre el mismo. Este es el caso del disco actuador que ha sido analizado por Conway en 1995 y en 1998, para diferentes estados de carga con la adición de un sistema vorticoso compuesto por cuatro subsistemas: un sistema de anillos vorticosos, un sistema compuesto por un sistema radial sobre el disco, un sistema de hilos vorticosos longitudinales que se desprenden del borde del disco y un hilo vorticoso ubicado sobre el eje del disco, este último para la representación del cubo. La superposición de estos subsistemas equivaldría a un sistema de hilos vorticosos helicoidales sobre la superficie del tubo de corriente que envuelve al aire que pasa a través del disco.

Modelos más elaborados para el cálculo aerodinámico de hélices incluyen la utilización de las denominadas teorías de la línea sustentadora y de la superficie sustentadora, con el lógico incremento de los requerimientos computacionales.

Sobre la base de estas diferentes técnicas para la modelación de rotores, se han realizado renovados esfuerzos con la intención de mejorar las versiones clásicas de las teorías presentadas, con la adición de factores que hacen a los modelos más realistas y refinamientos en el tratamiento de las características de la sección de pala. Por ejemplo, esto se ha llevado a cabo incorporando la influencia del número de Reynolds sobre el comportamiento aerodinámico del perfil, especialmente considerando el amplio rango de números de Reynolds correspondiente a las operaciones de las turbinas eólicas. Así, por ejemplo, en la implementación de la teoría de la línea sustentadora, la carga de la pala es determinada mediante la utilización conjunta del teorema de Kutta-Joukowski y de los datos de



sustentación y resistencia provenientes del perfil, que compone una determinada sección de pala, al número de Reynolds local (Musial & Cromack, 1988).

Asimismo, mediante la aplicación de esta teoría de la línea sustentadora a hélices, una pala de una geometría especificada puede resultar representada por una línea sustentadora curvada con el propósito de determinar la distribución óptima de su torsión (Chang y Sullivan, 1984).

En el ámbito de los modelos tipo superficie sustentadora, Kinnas y Hsin (1992) discretizan el cubo y las palas de una hélice marina y su estela mediante paneles cuadrangulares conformados por dipolos de intensidad constante o distribuciones de fuentes, considerando en particular la representación de las primeras porciones de la estela mediante distribuciones de dipolos lineales, para una mejor modelación de flujo no estacionario alrededor del rotor.

Otro ejemplo del tratamiento de una superficie sustentadora es el modelo propuesto por Simões y Graham (1992), los cuales representan a la pala de la turbina eólica mediante un sistema vorticoso ligado ubicado sobre la superficie que define la curvatura de la pala, definiendo una red compuesta por paneles vorticosos cuadrilaterales. En dicho modelo, la estela vorticiosa que se desprende de cada pala es también modelada, cuando la pala no se encuentra en pérdida, mediante un sistema de líneas vorticosas (lattice vortex) el cual es progresivamente iterado con el objeto de resultar finalmente alineado con el flujo local que se desarrolla corriente abajo de los bordes de fuga.

En general, un análisis tipo línea sustentadora sería más valedero en palas de gran alargamiento como las pertenecientes a las turbinas eólicas, mientras que por su mayor solidez y bajo alargamiento, una hélice marina requiere de una modelación mediante la aplicación de la teoría de la superficie sustentadora.

En la mayoría de estos análisis aerodinámicos se asume que las palas son rígidas y se encuentran rígidamente conectadas al cubo central de la hélice, eliminándose de esta manera toda deflexión aeroelástica. En algunos casos, también se ignora la contracción (hélices) o la expansión (turbinas eólicas) de la estela. Asimismo, se asume que el cubo se extiende hasta la raíz de la pala y no interfiere con el campo fluidodinámico, al igual que la torre de soporte de la turbina, la cual se considera perfectamente permeable al viento.

### 1.3. MODELOS INVÍSCIDOS APLICADOS A TURBINAS EÓLICAS

En general, la mayoría de los modelos fluidodinámicos se basan en considerar al aire como un fluido incompresible e invíscido.

Por su naturaleza simple, la teoría del elemento de pala provee un medio rápido para predecir el comportamiento aerodinámico de turbinas eólicas, dada sus reducidos requerimientos computacionales, si bien estos resultados se pueden aplicar solamente a nivel cualitativo. Sin embargo, como lo puntualiza Tangler (1982), la falla de esta teoría en la determinación del flujo inducido por la presencia de una estela es superado por la introducción de funciones empíricas o por la incorporación de un modelo de estela.

Las teorías vorticosas presentan modelos donde se incluye en el análisis fluidodinámico la presencia de una estela generada por el rotor. Estos efectos son calculados sobre un número dado de palas de envergadura finita, considerando las variaciones de circulación sobre envergadura solamente (teorías de la línea sustentadora) o considerando también el efecto de la distribución de la cuerda y de la torsión de la pala (teorías de la superficie sustentadora). La vorticidad que se desprende desde las palas genera un sistema vorticoso helicoidal debido a la rotación de dichas palas.

Las metodologías denominadas *de estela libre* se corresponden con modelos de estelas que se desarrollan a partir del desprendimiento de vorticidad desde las palas como resultado de la variación de carga sobre la envergadura de las mismas. Esta estela se deforma también bajo su propio influjo, es decir, se distorsiona libremente por efecto de las velocidades locales inducidas por su propia vorticidad, hasta que todos los filamentos vorticosos se alinean con las líneas de corrientes locales. Debido a la mutua dependencia entre los comportamientos fluidodinámicos de la pala y su estela, esta última debe ser determinada mediante un proceso iterativo, por lo cual el costo computacional llega a ser muy importante.

Debido a los inconvenientes descritos, por cuestiones prácticas resulta conveniente prescribir una estela de una geometría predeterminada, *métodos de estela fija o rígida*, que conlleva un cálculo numérico más simplificado, y por ende de menor costo computacional, pero que puede predecir satisfactoriamente las cargas aerodinámicas sobre las palas y la eficiencia del rotor.

Asimismo, los modelos deben considerar que la estela de una turbina eólica debe rotar y simultáneamente expandirse debido a que una determinada potencia es extraída del viento. Sin embargo, existen modelos simples que representan a la estela con un diámetro constante.

Ciertas metodologías representan a la estela mediante paneles a los cuales se asocia un doblete de una intensidad relacionada con la vorticidad asociada al panel. En otros modelos, la estela está representada por un sistema de filamentos vorticosos helicoidales semi-infinitos. Si bien el precio asociado a estos modelos es tener que determinar el campo de velocidades inducidas mediante la integración numérica de la ley de Biot-Savart, la mayor ventaja de estos procedimientos es poder obtener la distribución de carga sobre la pala evitando la necesidad de imponer arbitrarios factores de corrección de la distribución de circulación hacia la punta de pala o definir como *input* un determinado factor de pérdida de carga hacia la punta (como, por ejemplo, el factor de corrección de Prandtl).

Diversos autores han propuesto diferentes modelos vorticosos para la representación de las palas y sus estelas. Por ejemplo, Afjeh y Keith, (1986a) y (1986b), asumen que el sistema vorticoso de la estela consiste de tres partes, una estela próxima, una estela intermedia y una estela lejana. La primera porción es representada por hilos vorticosos semi-infinitos rectos ubicados en el plano del rotor. La región intermedia de la estela es modelada mediante una serie de anillos vorticosos, mientras que la estela lejana está conformada por un cilindro vorticoso semi-infinito.

La metodología utilizada por Gould y Fiddes (1992) se basa en la prescripción de una estela, la cual es dividida en una estela próxima, discretizada mediante paneles planos y una región lejana, con una configuración cilíndrica semi-infinita, la cual se inicia alrededor de tres giros corriente abajo del rotor, y que tiene una representación más simple desde el punto de vista de cálculo computacional.

Por su parte, Koh y Wood (1991a) formulan un modelo de estela de una turbina eólica de eje horizontal, donde la vorticidad asociada a la misma está confinada a líneas vorticosas que en la estela lejana conforman helicoides de diámetro constante. La geometría del sistema vorticoso es parcialmente determinada mediante la resolución de las ecuaciones de cantidad de movimiento lineal y de cantidad de movimiento angular. Este modelo es combinado con la teoría tradicional del elemento de pala.

Koh y Wood (1991b) han implementado asimismo una estela conformada por hilos helicoidales vorticosos que se desprenden de las palas y se expanden en la estela próxima para luego mantener un radio constante en la estela lejana. Las velocidades inducidas son calculadas a partir de la ley de Biot-Savart, y durante su integración, cada integral infinita es evaluada numéricamente hasta un límite finito, establecido en la estela lejana, y la integral restante es aproximada por un remanente analítico. La integración numérica se realiza mediante la aplicación de la regla de Gauss-Legendre.

Dado que no es posible obtener una formulación analítica para la expresión de la velocidad inducida en un punto genérico del campo fluidodinámico, Graber y Rosen (1987) proponen un método aproximado para reducir los requerimientos computacionales para el cálculo de las velocidades inducidas por filamentos vorticosos helicoidales semi-infinitos, mediante una combinación de integración numérica sobre una porción finita del dominio y de una integración de funciones envolventes, las cuales presentan soluciones analíticas.

En el trabajo de Kobayakawa y Onuma (1985), bajo condiciones de flujo incompresible y no viscoso, la superficie de la pala es dividida en paneles trapecoidales, cada uno de los cuales es representado por un sistema vorticoso en herradura, el cual presenta una configuración helicoidal a partir del borde de fuga de la pala. La intensidad del vórtice de cada panel es determinado por la imposición de las condiciones de contorno que establecen que la velocidad resultante entre el flujo geométrico y el flujo inducido sea tangente a la superficie de la pala en ciertos puntos de control (puntos de colocación). Finalmente, las fuerzas aerodinámicas son obtenidas mediante la aplicación del teorema de Kutta-Joukowski.

Wood (1991) desarrolla un análisis tridimensional sobre una turbina compuesta por dos palas de bajo alargamiento, no torsionadas y de cuerda constante, con un modelo de estela que no presenta expansión. Las palas están representadas por paneles rectangulares sobre los cuales ubica fuentes de intensidad constante.

Por otra parte, en el caso de muy altas razones de la velocidad de punta de pala sobre la velocidad del viento, Wood (1993) propone un modelo basado en la representación de los hilos vorticosos de la estela como una serie infinita de anillos vorticosos.

Dado que el cálculo de las velocidades inducidas involucra la integración sobre un límite infinito de un integrando que no presenta una solución analítica como en el caso de un ala estacionaria, dichas integrales deben ser evaluadas numéricamente. Es así que diferentes investigadores han desarrollado metodologías para calcular el flujo inducido por diversos modelos de estela. Chiu y Peters presentan en 1988 uno de los primeros intentos para derivar

expresiones analíticas para cada una de las tres componentes de la velocidad inducida, tanto para el caso de líneas vorticosas helicoidales de diámetro contante como en el caso en que se presenta una contracción de la estela.

En varios modelos la integración a lo largo del hilo vorticoso libre se completa al cabo de un determinado número de giros, reconociendo como despreciable el efecto de la porción remanente de dicho hilo sobre el sistema vorticoso ligado a la pala. Por ejemplo, Chang y Sullivan (1980) dieron término a los cálculos luego de 10 revoluciones de los helicoides vorticosos.

Wood y Meyer (1991) describen dos métodos para la evaluación numérica de las integrales sobre un dominio infinito, destinados a la obtención de las velocidades inducidas por los helicoides vorticosos de diámetro y paso constantes que representan la estela lejana. En particular, el segundo método se basa en la representación de la integral como una integral que contiene una o más series infinitas, las cuales son evaluadas numéricamente por métodos como el de integración trapezoidal o como el de Gauss-Legendre.

Por su parte, de Andrade y de Oliveira Soviero (1987) aplican la teoría vorticosa a los modelos de la línea sustentadora y de la superficie sustentadora, presuponiendo una estela vorticosa fija sin contracción y despreciando las componentes radiales de las velocidades inducidas. Por otra parte, también adaptan la teoría vorticosa al modelo de disco actuador, donde las velocidades inducidas en cualquier estación de la pala dependen solamente de la circulación asociada a dicha estación, razón por la cual el cálculo de la distribución de circulación sobre la pala resulta más sencillo y no demanda de complejidades numéricas como en el caso de necesitar calcular la totalidad de los coeficientes de influencia mediante la integración numérica de la ley de Biot-Savart.

Sin embargo, el análisis fluidodinámico de una pala no se completa solamente con el análisis no viscoso. Como lo establecen Gould y Fiddes (1992), dos características fundamentales deben ser especialmente representadas: la formación de una estela helicoidal, y la descripción del desarrollo de la capa límite sobre la pala rotante. Señalan asimismo que, dada la simplificación que representa el método de la línea sustentadora, una metodología tipo superficie sustentadora (por ejemplo, el método de los paneles) debe ser propuesta en conjunción con el análisis de la capa límite tridimensional, con la finalidad de predecir el desarrollo de la pérdida sobre las superficies de extradós e intradós de las palas.

## 1.4. INTERACCIÓN VISCOSA/INVÍSCIDA

Mediante la implementación numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes, es posible calcular el campo fluidodinámico tridimensional viscoso alrededor de obstáculos, pero ello requiere, en general, de considerables esfuerzos y capacidades computacionales.

Es entonces que, a pesar de los impresionantes adelantos en el desarrollo de algoritmos y en la arquitectura de las computadoras, resulta en ciertos casos impracticable aplicar esta metodología de cálculo para el análisis fluidodinámico o el diseño de rotores eólicos, siendo en particular especialmente prohibitiva cuando se intenta el análisis bajo condiciones no estacionarias.

Por su parte, como lo resaltan Barnett y Verdon (1987), los efectos viscosos controlan las pérdidas aerodinámicas, las tasas de transferencia de calor y los fenómenos de separación, y por lo tanto deben ser considerados para la predicción del flujo alrededor del rotor eólico, otorgando, consecuentemente, una descripción más precisa del comportamiento aerodinámico de las palas de la turbina. En adición a las características de actuación, la posibilidad de determinar los efectos viscosos es también relevante tanto en el diseño aeroelástico (involucrando la seguridad estructural) como el aeroacústico de las turbomáquinas en general, y de los rotores eólicos en particular.

Por estas razones y tal como lo puntualizan varios autores, entre ellos Drela y Giles (1987) y Milewski (1997), los flujos viscosos pueden ser determinados, de manera más eficiente, mediante la utilización de modelos de interacción viscosa-invíscida. En virtud al análisis parcializado que resulta del estudio zonal del problema, esta aproximación resultaría más rápida y generalmente con similares órdenes de precisión a las obtenidas mediante la resolución numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Si bien estas metodologías de interacción viscosa-invíscida son ampliamente utilizadas, resultan, lógicamente, menos generales que con la aplicación directa de las ecuaciones promediadas de Navier-Stokes, y no resultan factibles cuando el flujo presenta separaciones.

Son justamente los conceptos asociados con la definición de la capa límite dada por Prandtl los que proveen la relación entre los flujos de un fluido ideal y de un fluido real. Cuando el número de Reynolds de un flujo externo (es decir, un flujo no confinado que incide sobre un obstáculo) es lo suficientemente alto y la posición relativa del obstáculo respecto de la corriente libre es tal que no tienen lugar efectos viscosos apreciables como una separación

extensiva, se observa experimentalmente que los efectos de la viscosidad del fluido quedan confinados a unas delgadas capas ubicadas a lo largo de la superficie del cuerpo. Fuera de dichas capas, el flujo se comporta esencialmente como si fuera no viscoso (es decir, como si el fluido fuera ideal). Por otra parte, y bajo el supuesto de Prandtl de que el espesor de la capa viscosa (o capa límite) es suficientemente pequeño cuando se lo compara con la longitud característica del obstáculo, es que pueden asumirse que se desprecian las difusiones en las direcciones de las superficies del cuerpo (la única difusión significativa resulta en la dirección normal a dicha superficie) y que la presión puede considerarse constante a través de la capa viscosa, por lo cual la misma resulta igual a la determinada bajo condiciones invíscidas.

La metodología tradicional aplicada al cálculo de las propiedades de la capa límite se basa en calcular el campo invíscido despreciando la presencia de la capa viscosa. Luego, las propiedades del flujo invíscido sobre la superficie del cuerpo son utilizadas como condiciones de contorno para la solución de la capa límite. Otras técnicas de acoplamiento entre flujos invíscidos y capas límites involucran una velocidad de transpiración, no viscosa, sobre la superficie, y una interacción de ambas soluciones hasta que coincidan las componentes normales de las soluciones correspondientes tanto a la capa viscosa como al flujo externo.

Por lo expuesto, un primer requerimiento del proceso de interacción viscosa-invíscida es la representación del efecto de desplazamiento de la capa viscosa sobre el flujo ideal. Los desplazamientos viscosos en regiones de interacción intensa pueden causar cambios sustanciales en los campos de presión locales. En ciertos casos, como por ejemplo en presencia de separaciones extensivas del flujo, cambios sustanciales en la configuración del campo viscoso afectan al campo global de presiones. Si la interacción puede calificarse como débil, el problema del flujo puede resolverse secuencialmente y de manera directa, estando la distribución de presiones solamente determinada por el flujo invíscido. En caso contrario, el proceso resulta iterativo, dado que la distribución de presiones es determinada por la interacción mutua entre el flujo externo invíscido y la capa viscosa, solución que va adecuándose en cada paso del procedimiento iterativo hasta su convergencia.

Entre las metodologías empleadas por diversos autores para el análisis de problemas fluidodinámicos mediante la aplicación de la interacción viscosa invíscida pueden enumerarse las indicadas a continuación.

Kemarec et al. (1993) presentan un método numérico para predecir las cargas aerodinámicas no estacionarias en perfiles oscilantes, bajo condiciones de flujo bidimensional, donde los cálculos potenciales se basan en la utilización del método de los

paneles y la capa viscosa es determinada mediante el uso de las ecuaciones de la capa límite aproximadas mediante diferencias finitas. Para la zona de capa límite adherida, el efecto de la viscosidad sobre el flujo potencial es considerado mediante un desplazamiento del contorno del perfil en una magnitud igual al espesor de desplazamiento instantáneo de la capa límite, comenzando por un valor arbitrario de dicho espesor, hasta la convergencia.

En aquellos casos en que la interacción entre los flujos invíscido y viscoso es intensa, dado que la corriente se caracteriza por significativos gradientes de presión normales a las superficies o por la posibilidad de separación de la capa límite, Williams (1991) propone que el flujo exterior no viscoso y la capa límite se resuelvan iterativamente y se combinan con el fin de obtener una solución acoplada para la totalidad del flujo, que se ajuste de manera continua entre los dos tipos de flujos. Dado que mediante una adecuada especificación de la condición de contorno interna, la solución del flujo externo debe considerar el efecto de desplazamiento producido por la capa límite, Williams propone que la superficie definida por el espesor de la capa límite sea la superficie sobre la cual se verifiquen las condiciones de contorno, tanto para el flujo externo como para el interno, en lo referido a la continuidad de la magnitud y de la dirección del campo de velocidades. No obstante, el espesor de la capa viscosa no es conocido hasta que la técnica iterativa converge, lo cual, como indica Williams, puede conducir a importantes dificultades computacionales. Esta dificultad sería superada considerando a la propia pared del cuerpo como la superficie donde imponer adecuadas condiciones de borde para ambos flujos, para lo cual construye un flujo invíscido equivalente que se extiende hasta la pared.

Barnett et al. (1993) proponen un procedimiento de cálculo inverso de la capa viscosa, en donde el espesor de desplazamiento es especificado en lugar de la presión, permitiendo obtener soluciones en las regiones de interacciones intensas, incluyendo entonces las zonas de flujo separado. Por otra parte, la metodología directa es utilizada en las regiones del flujo donde la capa viscosa permanece adherida. En estas regiones, la distribución de presiones, tal como fuera determinada a partir de la solución invíscida, es impuesta en lugar del espesor de desplazamiento.

Drela y Giles (1987), por su parte, acoplan las ecuaciones de Euler a las ecuaciones de la capa límite en una formulación integral, en un problema 2D.

Asimismo, DeJarnette y Radcliffe (1996) reconocen que cuando los códigos computacionales en diferencias finitas generados para la resolución numérica de las ecuaciones de la capa límite son acoplados con códigos invíscidos, la mayoría de los modelos



para la resolución de la capa límite asumen que las propiedades del flujo viscoso tienden a los correspondientes al flujo invíscido con pendiente nula. Este supuesto no es adecuado a bajos números de Reynolds (de hecho, las propias ecuaciones de la capa límite de Prandtl son válidas para números de Reynolds suficientemente altos). Así, si la solución de la capa límite no ajusta correctamente la solución invíscida, propiedades tales como la tasa de transferencia de calor y la fricción sobre la pared resultan incorrectamente evaluadas.

## **1.5. ESTELAS**

Entre las técnicas utilizadas para el análisis de las estelas de las turbinas eólicas se pueden detallar las experiencias de campo (Baker y Walker, 1984), (Baker et al., 1985), (Högström et al., 1988), (Taylor, 1983), los estudios en túneles de viento (Sforza et al., 1981), (Kotb y Schetz, 1985), los modelos analíticos que incorporan correlaciones empíricas (Crespo y Hernández, 1986), (Ainslie, 1988) y las simulaciones numéricas.

Por su parte, Milborrow (1983) revé los aspectos fundamentales de los estudios dirigidos al análisis del flujo en las estelas que forma el aire al cruzar el disco barrido por las turbinas eólicas. Como lo indica, el comportamiento observado de la estela corriente abajo del rotor difiere marcadamente de los conceptos utilizados en la simple teoría de la cantidad de movimiento de Betz. Estas discrepancias se ponen asimismo de manifiesto en los valores obtenidos experimentalmente para los coeficientes característicos de la turbina eólica, que resultan sobrestimados por la teoría de Betz. Por ejemplo, el máximo coeficiente de potencia medido para la turbina eólica Mod-0A ha sido de 0,41 (Maydew y Klimas, 1981).

Como lo indican Gould y Fiddes (1992), los experimentos llevados a cabo para la visualización del flujo alrededor de una turbina eólica muestran una estela de conformación helicoidal. Asimismo, a partir de resultados experimentales se observa que la estela se expande alrededor de 2 o 3 radios corriente abajo del rotor (conformando la denominada estela próxima), y que a partir de allí la estela presenta un radio constante (estela lejana). La expansión típica de la estela próxima resulta alrededor del 35%.

Sforza et al. (1981) han señalado los principales factores que afectan a la configuración de la estela:

- \* La extracción de potencia desde el flujo involucra la aplicación de una fuerza del fluido sobre el rotor, la cual actúa en la dirección de la corriente no perturbada de aire. Dado que esta fuerza es representada como un déficit del flujo de cantidad de

movimiento en la estela causada por la presencia del rotor, es uno de los factores principales que determina la naturaleza de la estela.

- \* Si el rotor está ubicado corriente abajo de la torre, la estela de la misma afectará tanto a las cargas sobre las palas de la turbina como a la estela que se desprende de las últimas, la cual, por ejemplo, ya no podrá ser considerada axialsimétrica. Por otra parte, la proximidad del rotor al suelo, y la geografía del terreno, causan complicaciones adicionales, que limitan el libre desarrollo de la estela de la turbina eólica.
- \* Asimismo, la presencia de una capa límite atmosférica, representada por un gradiente vertical en la velocidad media del viento, así como la posible presencia de un gradiente vertical de la densidad del aire, afectarán mayormente a las turbinas de gran diámetro, dado que las cargas sobre las palas dependerán de la posición angular de estas últimas sobre el disco barrido por la turbina.
- \* Finalmente, tanto la naturaleza como la magnitud de la turbulencia de la capa límite atmosférica afectarán el desarrollo y la estructura de la turbulencia dentro de la estela.

Wood (1991) indica que, típicamente, el factor de interferencia axial sobre el disco rotor es del orden de 0,3 (es decir, la velocidad de la corriente de viento sobre el rotor es aproximadamente un 70% de la velocidad del viento no perturbado), lo cual se corresponde con una expansión computada de alrededor del 20% en el radio.

Adicionalmente, Wood (1993) establece que, cuando las turbinas eólicas de eje horizontal operan a altos factores de interferencia axial, están asociadas a significativas expansiones de la estela generada detrás del rotor y la turbina opera en una condición denominada de “estado de estela turbulenta”. En muchos modelos simples, esta condición de trabajo puede conducir a incongruencias como la aparición de velocidades de estela negativas. Estos resultados insatisfactorios resultan de la aplicación de modelos simples de estela unidimensional, como aquél propuesto por Betz, cuando la velocidad promedio a través de las palas se reduce por debajo de la mitad del valor de la velocidad no perturbada del viento.

# CAPÍTULO 2

## TEORÍA DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

### 2.1. INTRODUCCION

La teoría de la cantidad de movimiento aplicada a hélices (denominada teoría de Rankine-Froude) asume que la hélice puede representarse mediante un disco actuador de radio  $R$  e infinitamente delgado que soporta sobre su superficie una diferencia de presión uniforme. El disco está inmerso en un tubo de corriente  $\tau$  que separa al flujo de aire que fluye a través del rotor del que lo rodea, tal como se muestra en la Figura 2.1.a. El aire en su interior es acelerado por acción del disco, el cual transfiere energía al fluido, con lo cual el tubo de corriente  $\tau$  reduce su diámetro. Asimismo, el aire se considera incompresible y su flujo prácticamente unidireccional, sin ser afectado por la rotación impuesta por el rotor (Le Gourières, 1982).

Por su parte, Betz reformuló la teoría de Rankine-Froude para adaptarla a discos actuadores que simulen turbinas eólicas de eje horizontal, si bien manteniendo las mismas hipótesis. Así, la teoría de Betz considera que el aire fluye dentro del tubo de corriente  $\tau$  sin pérdidas de presión, y por ende, es posible aplicar la ecuación de Bernoulli en las porciones de aire anterior y posterior a la posición del disco actuador, cambiando la constante de Bernoulli solamente cuando el aire cruza al disco dado que entrega energía al rotor (Figura 2.1.b). Como consecuencia de ello, el aire dentro del tubo de corriente  $\tau$  reduce su velocidad y, por ende, el tubo de corriente  $\tau$  se ensancha a medida que se desarrolla corriente abajo.

Adicionalmente, Dymnt (1989) presentó modificaciones a la formulación de Betz con la finalidad de incorporar los efectos de pérdida de energía, estableciendo que, dado que el flujo que circula dentro del tubo de corriente  $\tau$  debe retardarse (ya que la turbina eólica extrae energía cinética de la corriente) se formará una capa de corte entre los flujos interior y exterior al tubo de corriente  $\tau$ . Esto implica la formación de torbellinos, y por ende, la presencia de pérdidas de presión en el aire que fluye dentro de dicho tubo de corriente, pérdidas no contempladas por la formulación de Betz.

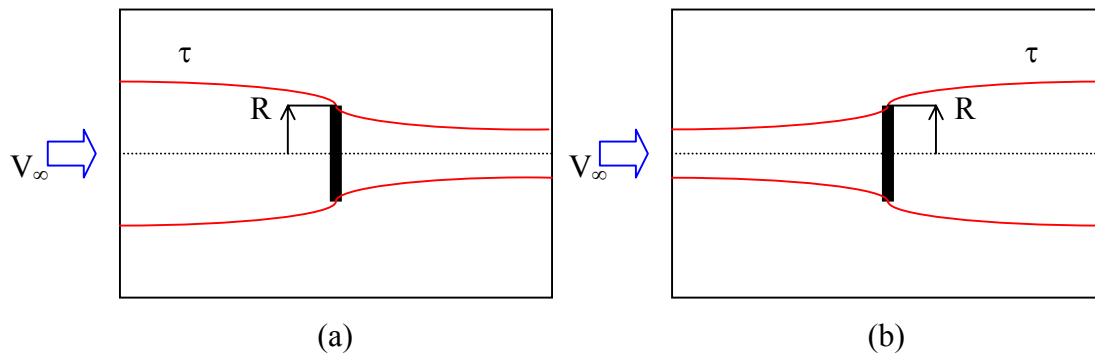


Figura 2.1 Modelos de discos actuadores

- a. Rankine-Froude (hélices)
- b. Betz (turbinas eólicas)

Sin embargo, el modelo de Dymont predice la presencia de pérdidas solamente en la porción del tubo de corriente que se desarrolla hasta la posición del disco actuador, y considera que la porción posterior de dicho tubo no solo no presenta pérdidas sino tampoco ensanchamiento (Figura 2.2). En consecuencia, dado que igualmente se establece una discontinuidad de velocidad entre los flujos interior y exterior al tubo de corriente  $\tau$ , a todo lo largo del mismo, se observa una contradicción entre hipótesis y resultados.

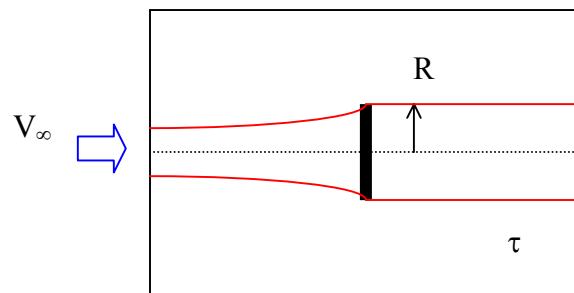


Figura 2.2 Modelo de Dymont (1989)

Por otra parte, Theodorsen (1948) ha considerado que, en el caso de hélices, el flujo exterior al tubo de corriente que contiene al rotor puede analizarse como el efecto superpuesto de una corriente potencial uniforme con un sumidero puntual en coincidencia con el disco actuador. Dicha superposición configura a un tubo de corriente que, en este caso, se reduce en diámetro a medida que el aire fluye en su interior.

Considerando la representación de Theodorsen, y adaptándola a la propuesta de Dymant, se presenta a continuación la reformulación de la teoría de la cantidad de movimiento definiendo el tubo de corriente  $\tau$  y el flujo externo al mismo por superposición de la corriente uniforme no perturbada de viento y una fuente puntual de intensidad adecuada. En el presente modelo, el tubo de corriente  $\tau$  continúa expandiéndose por detrás del disco y presenta pérdidas de presión tanto en su tramo anterior como posterior (es decir, por delante y por detrás de la posición del disco actuador) para los coeficientes de reducción de velocidad característicos de este tipo de turbina eólica. A su vez, dicho tubo de corriente define la envolvente de la estela del rotor que debe ser modelada para determinar el campo inducido por la estela vorticiosa que se desprende desde el borde de fuga de las palas.

## 2.2. TUBO DE CORRIENTE $\tau$

De acuerdo a la teoría del flujo potencial (White, 2004), el flujo axisimétrico determinado por la superposición de una corriente uniforme de velocidad  $V_\infty$  y una fuente de intensidad  $k$ , está definido por la distribución de la función de corriente, en las coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$

$$\Psi(r, \theta) = -\frac{V_\infty r^2 \sin^2 \theta}{2} + k \cos \theta \quad r \geq 0 \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (2.1)$$

resultado que es independiente de la coordenada azimutal  $\varphi$  debido a la axisimetría del problema. La posición de la fuente puntual define el centro del sistema coordenado esférico y el sentido de  $V_\infty$  define el sentido del eje de simetría, el cual pasa a través de la fuente.

Para una fuente puntual de intensidad

$$k = V_\infty \delta^2 \quad (2.2)$$

queda conformada una superficie axisimétrica de revolución denominada cuerpo semi-infinito de Rankine, mostrado en la Figura 2.3, cuyo vértice dista una distancia  $\delta$  desde la ubicación de la fuente, y que puede representarse tanto por la función de corriente

$$\Psi_0 = -V_\infty \delta^2, \quad (2.3)$$

como por

$$r(\theta) = \delta / \sin(\theta/2). \quad (2.4)$$

Dado que  $y = r \sin \theta$  y  $x = r \cos \theta$ , la expresión (2.4) del contorno del cuerpo semi-infinito de Rankine se puede representar mediante sus ordenadas  $y_0$ , medidas normalmente al eje de simetría  $x$ , resultando

$$y_0(x) = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left( 4\delta^2 - x^2 + x \sqrt{x^2 + 8\delta^2} \right)} \quad x \geq -\delta. \quad (2.5)$$

La presencia de este cuerpo genera una función de corriente particular,  $\Psi_\tau$ , que en coincidencia con la abscisa del disco actuador,  $x = x_0$ , tiene un radio  $R$ , es decir, el radio del disco. La posición del disco actuador no tiene necesariamente que coincidir con la posición de la fuente puntual, si bien en el presente capítulo se considera, por simplicidad, que  $x_0 = 0$ , es decir, se considera que la fuente está ubicada en el centro del disco actuador.

La función de corriente  $\Psi_\tau$  que representa al previamente definido tubo de corriente  $\tau$ , tiene por expresión

$$\Psi_\tau = -V_\infty R^2 / 2 \quad (2.6)$$

y su geometría, en coordenadas adimensionales  $\bar{x} = x / R$ ,  $\bar{y}_\tau = y_\tau / R$ , está dada por

$$\bar{y}_\tau^2 - \frac{2\bar{x}}{\xi^2 \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}_\tau^2}} = 1 \quad -\infty < \bar{x} < \infty \quad (2.7)$$

donde  $\xi = R/\delta$ . La expresión precedente tiene el siguiente desarrollo polinómico,

$$\bar{y}_\tau^6 + (\bar{x}^2 - 2)\bar{y}_\tau^4 + (1 - 2\bar{x})\bar{y}_\tau^2 + \bar{x}^2(1 - 4/\xi^2) = 0 \quad -\infty < \bar{x} < \infty. \quad (2.8)$$

Finalmente, se asume que el tubo de corriente  $\tau$  determinado mediante este procedimiento de superposición es el mismo que se forma por la presencia del disco actuador. Así, la velocidad del viento en el ingreso al tubo de corriente  $\tau$ , en una estación suficientemente alejada corriente abajo de la posición del disco actuador, es

$$V_{-\infty} = V_\infty. \quad (2.9)$$

Debido al incremento del diámetro del tubo de corriente, en la estación donde se ubica el disco actuador la velocidad media del aire se reduce con respecto a la velocidad del viento no perturbado en una fracción determinada por el coeficiente de reducción de velocidad en el disco,  $a$ , tal que

$$V_0 = V_\infty(1 - a). \quad (2.10)$$

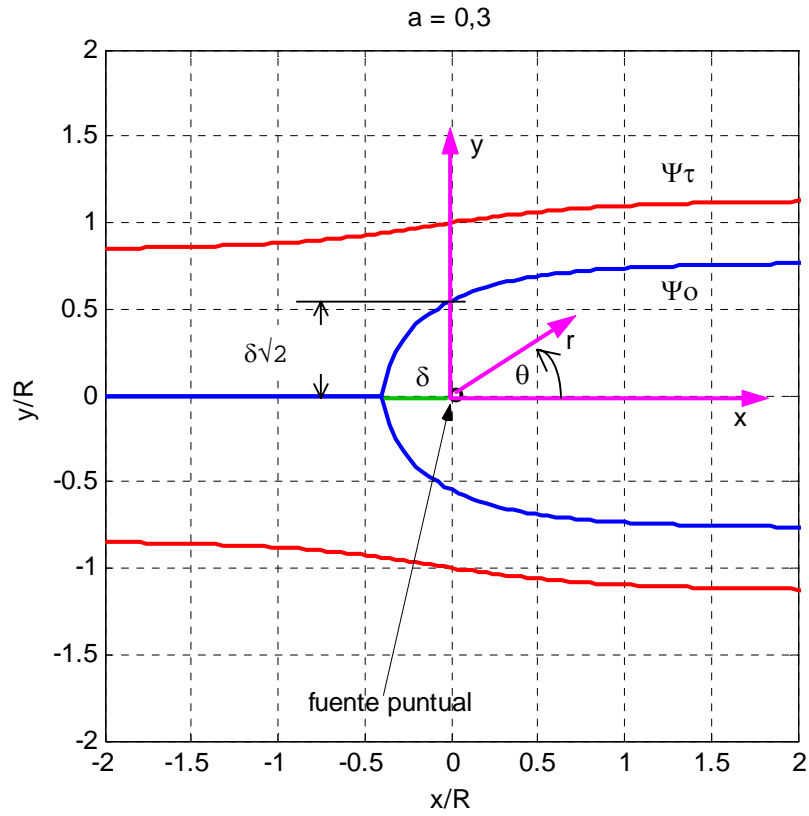


Figura 2.3 Cuerpo semi-infinito de Rankine. a: factor de reducción de velocidad en el disco.

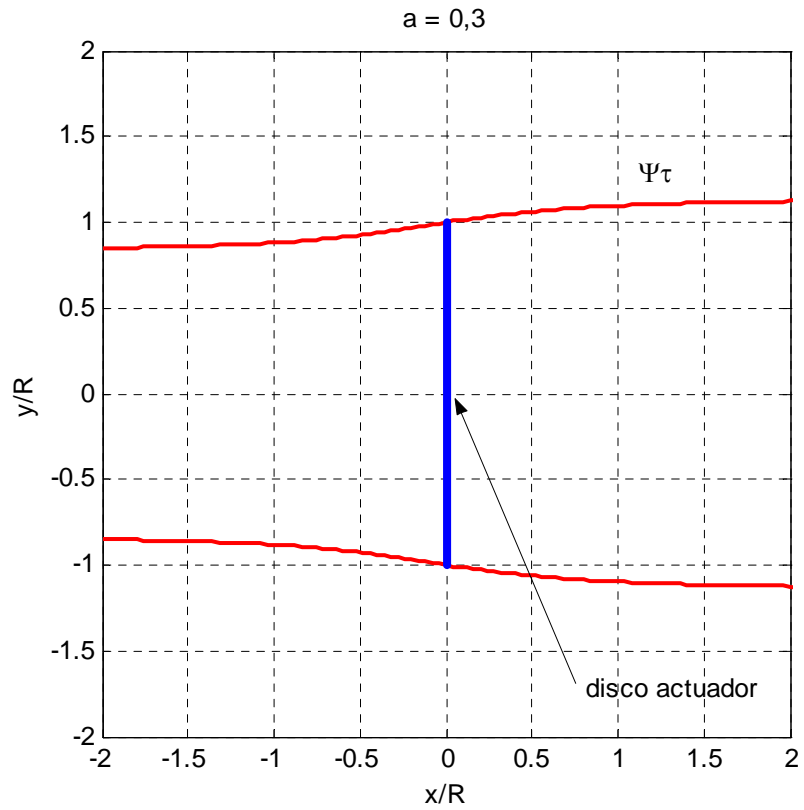


Figura 2.4 Tubo de corriente  $\tau$ . a: factor de reducción de velocidad en el disco.

Análogamente, la velocidad media en el tubo de corriente, para una estación suficientemente alejada corriente abajo del disco actuador, se reducirá en una fracción  $b$ , tal que

$$V_{+\infty} = V_{\infty}(1 - b). \quad (2.11)$$

La Figura 2.4 muestra la configuración del tubo de corriente  $\tau$  cuando el coeficiente de reducción de velocidad en el disco vale  $a = 0,3$ .

### 2.3. COEFICIENTES DE REDUCCION DE VELOCIDAD

En todo el dominio, la distribución de velocidad debido a la superposición potencial tiene componentes axial y normal (Prado, 1995)

$$v_x(x, y) = V_{\infty} + \frac{x \delta^2 V_{\infty}}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (2.12)$$

$$v_y(x, y) = \frac{y \delta^2 V_{\infty}}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

con lo cual, sobre la sección  $x = 0$ , dichas componentes resultan

$$v_x(0, y) = V_{\infty}$$

$$v_y(0, y) = \frac{\delta^2}{y^2} V_{\infty}. \quad (2.13)$$

Entonces, el caudal volumétrico circulante entre el cuerpo semi-infinito de Rankine y el tubo de corriente  $\tau$ , determinado en la sección anular para  $x = 0$ , resulta

$$q_{\tau} = 2\pi V_{\infty} \int_{y_0(0)}^R y \cdot dy \quad (2.14)$$

donde  $y_0(0)$  denota la ordenada del cuerpo semi-infinito de Rankine en la abscisa correspondiente a la posición de la fuente. Esta ordenada vale,

$$y_0(0) = \sqrt{2} \delta. \quad (2.15)$$

El caudal transportado entre el cuerpo de Rankine y el tubo de corriente  $\tau$  debe ser el mismo que se observa dentro del tubo de corriente cuando el cuerpo semi-infinito resulta removido, tal como resulta representado esquemáticamente en la Figura 2.5.



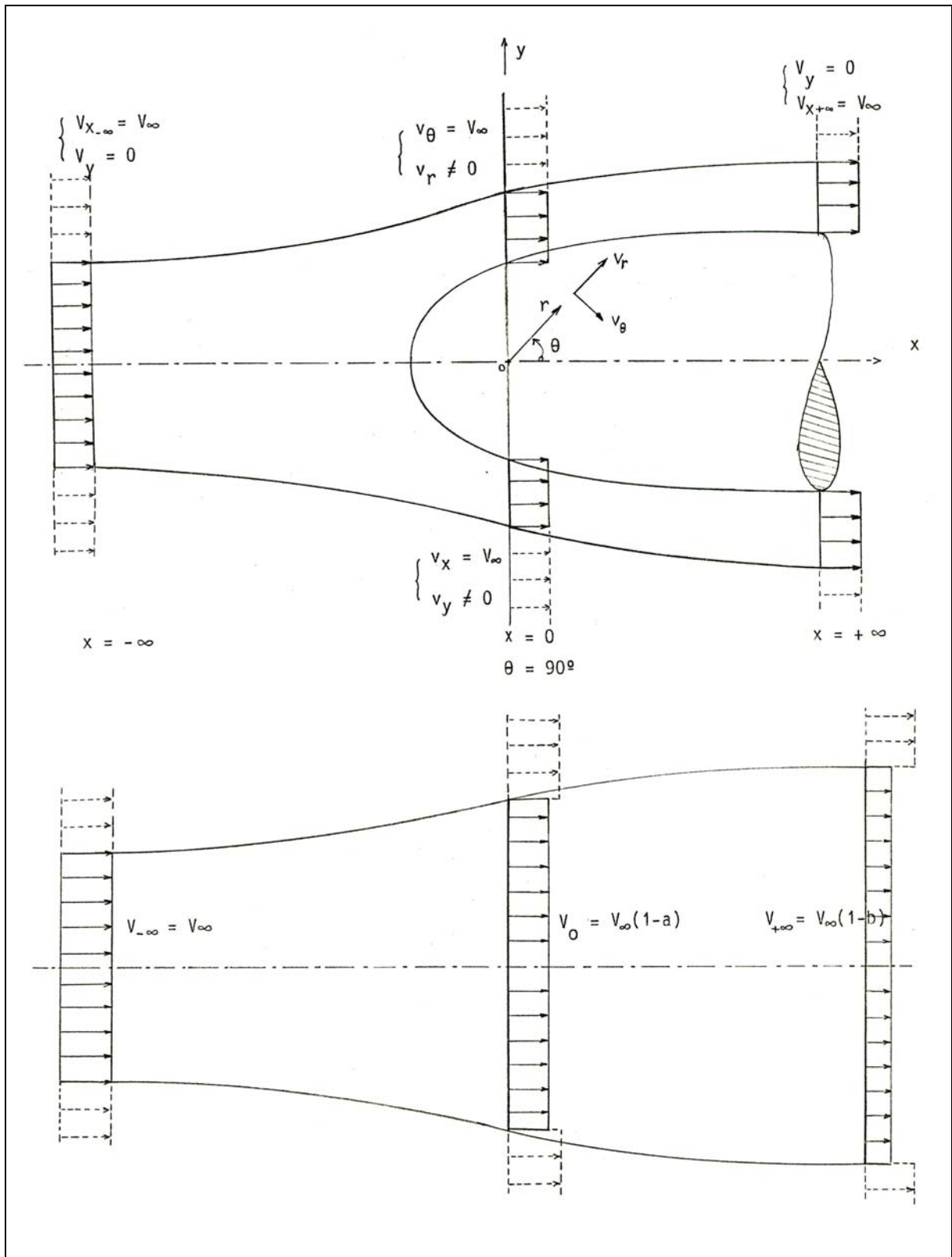


Figura 2.5 Analogía para la determinación de los factores de reducción de velocidad

Dado que el flujo volumétrico (2.14) circulante dentro del tubo de corriente  $\tau$  debe mantenerse cuando el cuerpo semi-infinito de Rankine es removido y reemplazado por el disco actuador, se tiene que

$$q_{\tau} = \pi R^2 V_{\infty} (1 - a), \quad (2.16)$$

por lo cual, de la igualación las ecuaciones (2.14) y (2.16) y de la resolución de la integral, se obtiene la expresión del coeficiente de reducción de velocidad en el disco (considerando que la fuente puntual coincide con el centro del disco actuador)

$$a = \frac{2}{\xi^2}. \quad (2.17)$$

Entonces, al definirse un determinado valor de reducción de velocidad en el disco,  $0 < a < 1$ , se está determinando el valor de la relación  $\xi = R/\delta$ , y por ende, se está proponiendo la intensidad de la fuente a incorporar en el modelo, resultando

$$k = \frac{a}{2} V_{\infty}. \quad (2.18)$$

Dado que, infinitamente lejos corriente abajo, el cuerpo semi-infinito de Rankine tiene un radio  $2\delta$ , y el caudal volumétrico circulante entre dicho cuerpo y el tubo de corriente  $\tau$ , debe igualarse al caudal correspondiente al flujo unidimensional que circula dentro del tubo de corriente  $\tau$ , resulta el siguiente coeficiente de reducción de velocidad suficientemente lejos corriente abajo del rotor (cuando el centro del disco actuador coincide con la posición de la fuente puntual):

$$b = \frac{2a}{(1+a)}. \quad (2.19)$$

Así, en el presente modelo, el tubo de corriente  $\tau$  continúa ensanchándose luego de cruzar al disco actuador. Además, dado que el coeficiente de reducción de velocidad corriente abajo  $b$  no supera a la unidad en el intervalo  $0 \leq a \leq 1$ , la formulación propuesta por el presente modelo no adolece de la inconsistencia presentada por la teoría de Betz, dado que en esta última resulta  $b > 1$  para  $a > 0,5$ . En la Figura 2.8, perteneciente al análisis comparativo entre modelos, se visualiza la relación entre los coeficientes de reducción de velocidad  $a$  y  $b$ , mostrando que la expresión (2.19), así como la propuesta por Dymment, no presentan la limitación del modelo de Betz.

## 2.4. PÉRDIDAS DE PRESIÓN

Con el fin de determinar las pérdidas de presión de la corriente que fluye a lo largo del tubo  $\tau$ , se deben calcular previamente los valores de la presión sobre ambas caras del disco actuador,  $p'$  y  $p''$ . A su turno, estas presiones se determinan aplicando la ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento axial a cada uno de los dos dominios, I y II, en que se ha dividido el campo fluidodinámico. Por otra parte, las únicas distribuciones de presión que son calculadas mediante la aplicación de la ecuación de Bernoulli, son solamente las correspondientes al flujo exterior al tubo de corriente  $\tau$ , ya que solo en dicho flujo no se observan pérdidas de presión total. En las Figuras 2.6 y 2.7 se muestran los dominios I y II, indicando las presiones y velocidades sobre sus respectivos contornos.

Aplicando entonces la ecuación de Bernoulli por fuera del tubo de corriente  $\tau$ , resulta

$$p(0, y) - p_\infty = \frac{1}{2} \rho [V_\infty^2 - V^2(0, y)] = \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \left( \frac{\delta}{y} \right)^4 \quad y > y_\tau \quad (2.20)$$

donde  $p_\infty$  es la presión estática de la corriente libre. Por su parte, la fuerza axial de presión, actuando sobre la sección anular BB' exterior al tubo de corriente  $\tau$  (Figura 2.6), resulta

$$F = \int_0^{2\pi} \int_R^\infty (p(0, y) - p_\infty) y \, dy \, d\phi = -\frac{\pi \rho V_\infty^2 R^2}{8} a^2 \quad (2.21)$$

cuando se ubica al disco actuador en la posición  $x = 0$ .

Aplicando entonces a los volúmenes de control (dominios I y II) la ecuación de conservación de cantidad de movimiento axial, resultan (Prado, 1995) cuando  $x_0 = 0$ :

$$(p' - p_\infty) = -\frac{F}{\pi R^2} + \rho V_\infty^2 (1 - a)a = \frac{\rho V_\infty^2}{2} [2a(1 - 7a/8)] \quad (2.22)$$

y

$$(p'' - p_\infty) = -\frac{F}{\pi R^2} + \rho V_\infty^2 (1 - a)(a - b) = \frac{\rho V_\infty^2}{2} \left\{ 2a \left[ \frac{a}{8} - \frac{(1 - a)^2}{(1 + a)} \right] \right\}. \quad (2.23)$$

Como resultado adicional, la diferencia de presión actuante sobre el disco resulta

$$(p' - p'') = \frac{\rho V_\infty^2}{2} \left[ 4a \frac{(1 - a)}{(1 + a)} \right]. \quad (2.24)$$

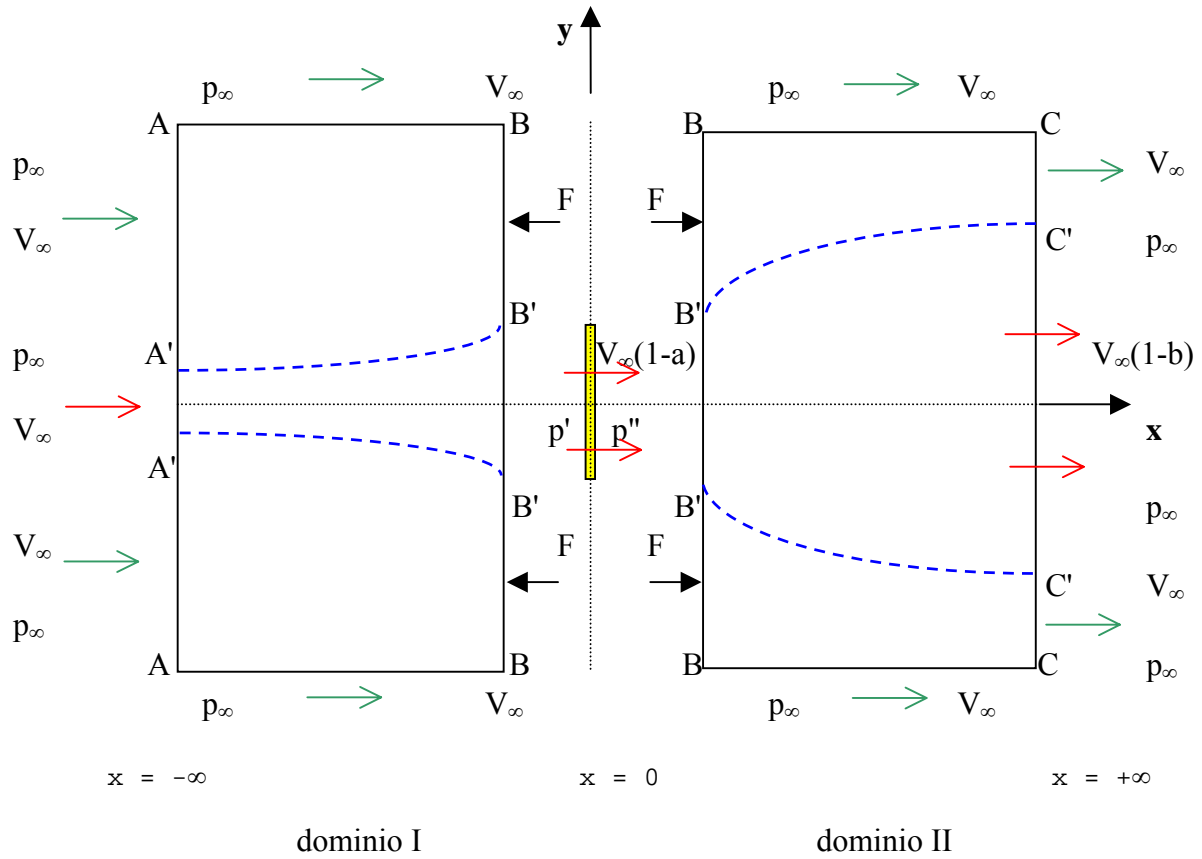


Figura 2.6 Dominios de evaluación, representación por separado.

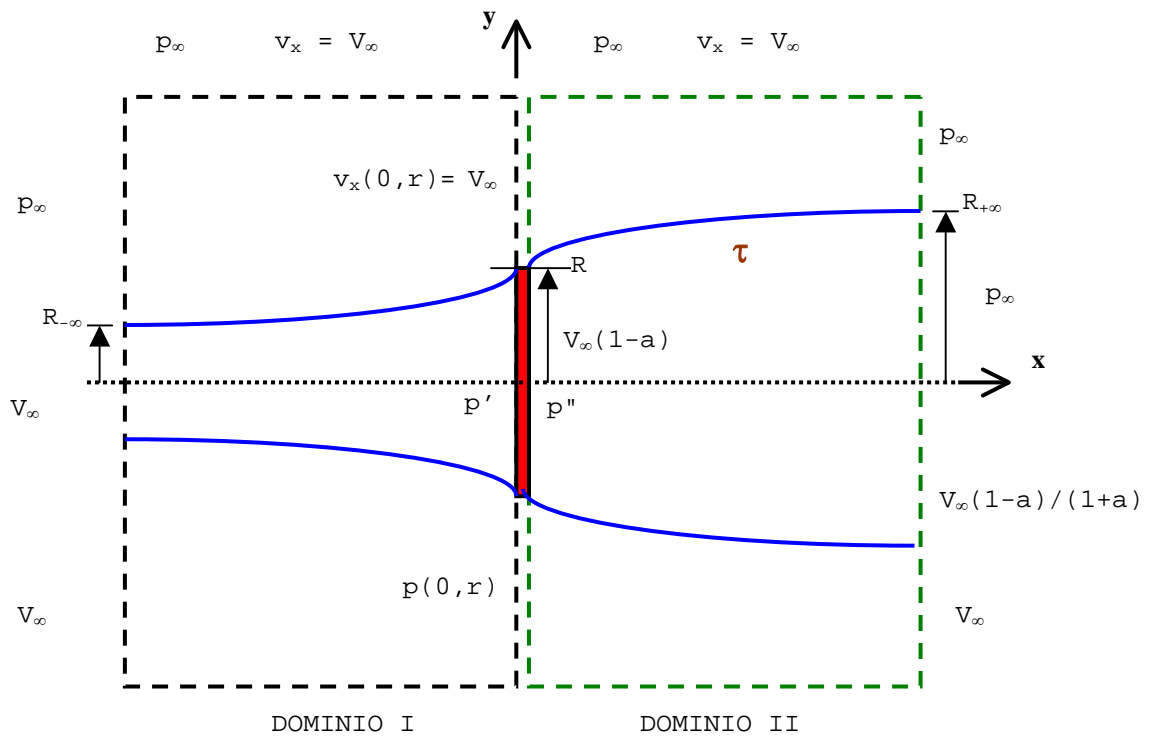


Figura 2.7 Dominios de evaluación, representación conjunta.

Las pérdidas de presión total en los tramos anterior y posterior del tubo de corriente  $\tau$ ,  $\zeta'$  y  $\zeta''$ , respectivamente, se calculan comparando las presiones totales entre las secciones extremas de cada tramo (Prado, 1995), resultando en el caso en que el disco actuador se ubique en coincidencia con la posición de la fuente puntual,  $x = 0$ ,

$$\zeta' = \rho V_{\infty}^2 \left( \frac{a^2}{2} + \frac{F}{\rho V_{\infty}^2 \pi R^2} \right) \quad (2.25)$$

para el tramo anterior a la posición del disco,  $-\infty < x < 0$ , y

$$\zeta'' = \rho V_{\infty}^2 \left( -\frac{(a-b)^2}{2} - \frac{F}{\rho V_{\infty}^2 \pi R^2} \right) \quad (2.26)$$

para el tramo posterior, corriente abajo de la posición del disco  $0 < x < +\infty$ .

Reemplazando los valores del coeficiente de reducción de velocidad lejos corriente abajo del disco,  $b$ , mediante (2.19) y la fuerza axial de presión,  $F$ , con (2.21), resultan

$$\zeta' = \rho V_{\infty}^2 \frac{3a^2}{8} \quad -\infty < x < 0 \quad (2.27)$$

y

$$\zeta'' = \rho V_{\infty}^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{(1-a)^2}{(1+a)^2} \right) \frac{a^2}{2} \quad 0 < x < +\infty, \quad (2.28)$$

coeficientes que serán graficados y contrastados con los resultados provenientes del modelo de Dymant en las próximas secciones.

## 2.5. COEFICIENTES DE LA TURBINA EOLICA

Los coeficientes globales característicos de una turbina eólica resultan expresiones adimensionales en función de los coeficientes de reducción de velocidad, cuyas formulaciones dependerán de las características del modelo propuesto. Considerando al presente modelo, se tendrán los siguientes coeficientes característicos: tracción,  $C_T$ ,

$$C_T = \frac{T}{\rho V_\infty^2 A / 2} = \frac{(p' - p'')A}{\rho V_\infty^2 A / 2} = 2(1 - a)b = 4a(1 - a)/(1 + a), \quad (2.29)$$

potencia extraída,  $C_{Pe}$ ,

$$C_{Pe} = \frac{TV_\infty(1 - a)}{\rho V_\infty^3 A / 2} = C_T(1 - a) = 2(1 - a)^2 b = 4a(1 - a)^2 / (1 + a), \quad (2.30)$$

potencia suministrada,  $C_{Ps}$ ,

$$C_{Ps} = \frac{\Delta \dot{E}_c}{\rho V_\infty^3 A / 2} = b(1 - a)(2 - b) = 4a(1 - a)/(1 + a)^2 \quad (2.31)$$

y potencia no utilizada,  $C_{Pw}$ ,

$$C_{Pw} = C_{Ps} - C_{Pe} = (1 - a)(2ab - b^2) = 4a^3(1 - a)/(1 + a)^2, \quad (2.32)$$

donde  $\Delta \dot{E}_c$  representa la variación de energía cinética de la corriente de aire entre las secciones extremas del tubo de corriente  $\tau$ ,  $A = \pi R^2$  es el área del disco y  $\rho$  denota la densidad del aire. Adicionalmente, la eficiencia,  $\eta$ , se define como la relación entre las potencias extraída al aire y suministrada al rotor, resultando

$$\eta = \frac{C_{Pe}}{C_{Ps}} = \frac{2(1 - a)}{(2 - b)} = (1 - a)(1 + a). \quad (2.33)$$

## 2.6. COMPARACIÓN CON OTROS MODELOS

Los coeficientes globales predichos por la presente teoría, así como otros resultados de la misma, son comparados con aquéllos propuestos por los modelos de Betz y Dymant. Estos resultados y coeficientes son presentados en las Tablas 2.1 y 2.2 en función del coeficiente de reducción de velocidad en el disco,  $a$ .

Tabla 2.1 Comparación entre modelos  
a: coeficiente de reducción de velocidad en el disco

	modelo de Betz	modelo de Dymment	modelo presente
b	2 a	a	2 a / (1 + a)
$\frac{R_{\tau-\infty}}{R}$	$\sqrt{1-a}$	$\sqrt{1-a}$	$\sqrt{1-a}$
$\frac{R_{\tau 0}}{R}$	1	1	1
$\frac{R_{\tau+\infty}}{R}$	$\sqrt{\frac{1-a}{1-2a}}$	1	$\sqrt{1+a}$
$\frac{V_{-\infty}}{V_{\infty}}$	1	1	1
$\frac{V_0}{V_{\infty}}$	1 - a	1 - a	1 - a
$\frac{V_{+\infty}}{V_{\infty}}$	1 - 2a	1 - a	(1 - a) / (1 + a)

b: coeficiente de reducción de velocidad lejos corriente abajo del disco  
irreal ( $b > 1$ )

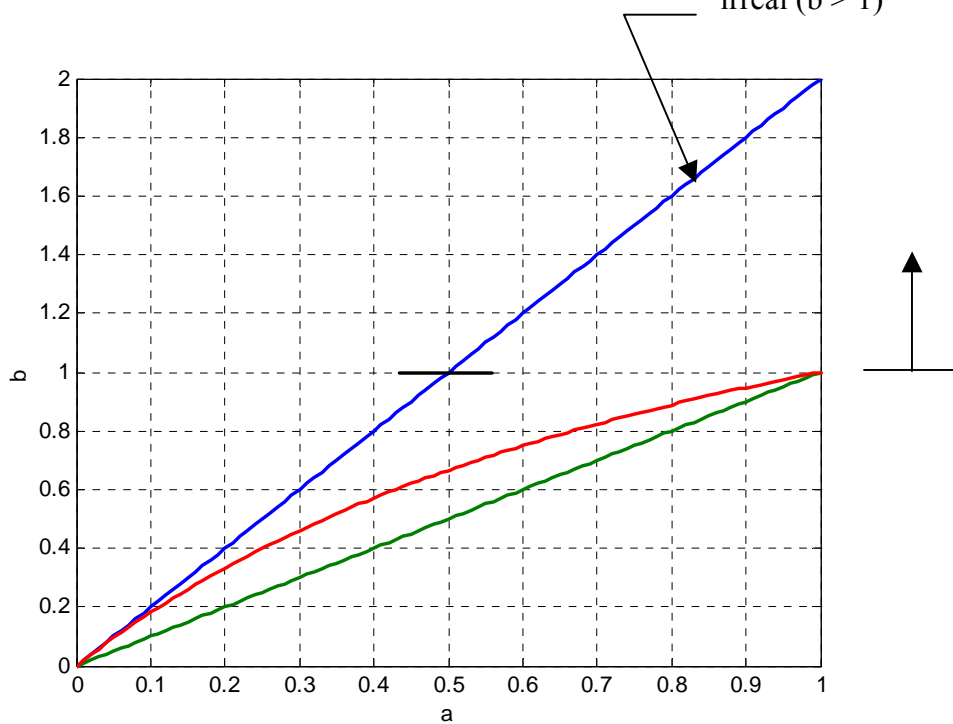


Figura 2.8 Relación entre los coeficientes de reducción de velocidad

— modelo de Betz    — modelo de Dymment    — modelo presente

Tabla 2.2 Tabla comparativa de coeficientes característicos  
a: coeficiente de reducción de velocidad en el disco

	modelo de Betz	modelo de Dymment	modelo presente
$C_T = \frac{T}{\rho V_\infty^2 A / 2}$	$4a(1-a)$	$2a(1-a)$	$4a(1-a)/(1+a)$
$C_{Pe} = \frac{TV_\infty(1-a)}{\rho V_\infty^3 A / 2}$	$4a(1-a)^2$	$2a(1-a)^2$	$4a(1-a)^2/(1+a)$
$C_{Ps} = \frac{\Delta \dot{E}_c}{\rho V_\infty^3 A / 2}$	$4a(1-a)^2$	$a(1-a)(2-a)$	$4a(1-a)/(1+a)^2$
$C_{Pw} = C_{Ps} - C_{Pe}$	0	$a^2(1-a)$	$4a^3(1-a)/(1+a)^2$
$\eta = \frac{C_{Pe}}{C_{Ps}}$	1	$\frac{(1-a)}{(1-a/2)}$	$(1-a)(1+a)$
$C_{Pe} _{\text{máx}}$	$16/27 \approx 0,5926$	$8/27 \approx 0,2963$	$12,25/27 \approx 0,4536$
$\frac{(p'-p_\infty)}{\rho V_\infty^2 / 2}$	$2a(1-a/2)$	$2a(1-a)$	$2a(1-7a/8)$
$\frac{(p''-p_\infty)}{\rho V_\infty^2 / 2}$	$2a(3a/2-1)$	0	$2a \left[ \frac{a}{8} - \frac{(1-a)^2}{(1+a)} \right]$
$\frac{(p'-p'')}{\rho V_\infty^2 / 2}$	$2a(1-a)$	$2a(1-a)$	$2a(1-a)/(1+a)$
$z' = \frac{\zeta'}{\rho V_\infty^2 / 2}$	0	$a^2$	$3a^2/4$
$z'' = \frac{\zeta''}{\rho V_\infty^2 / 2}$	0	0	$a^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{(1-a)^2}{(1+a)^2} \right)$
$z = \frac{(\zeta'+\zeta'')}{\rho V_\infty^2 / 2}$	0	$a^2$	$\frac{4a^3}{(1+a)^2}$

Asimismo, las Figuras 2.8 a 2.14 ilustran las comparaciones entre las teorías de Betz, Dymment y presente de los principales resultados en su variación con el coeficiente de



reducción de velocidad en el disco,  $a$ . Estos son el coeficiente de reducción de velocidad lejos

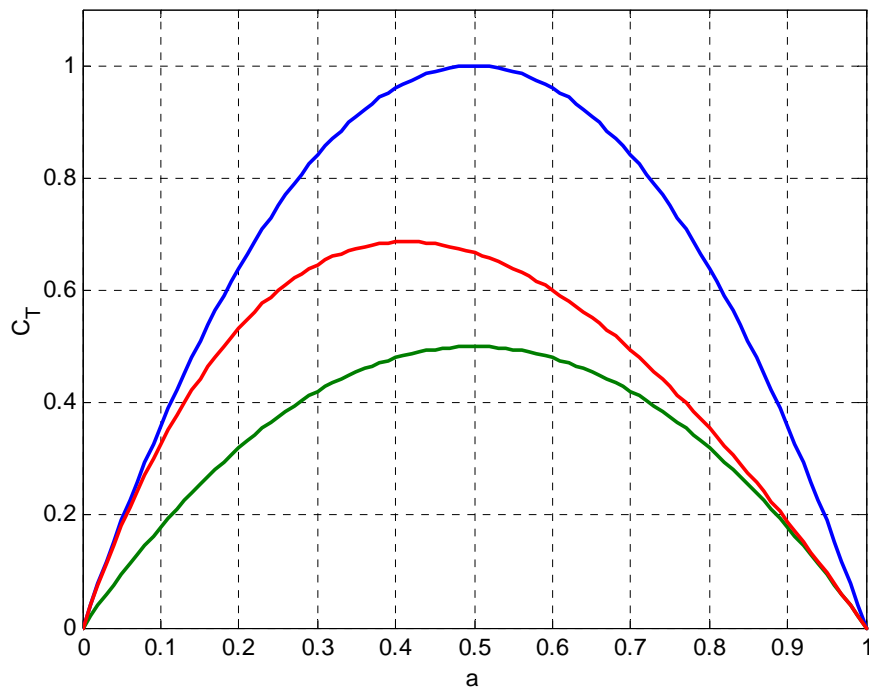


Figura 2.9 Comparación entre modelos del coeficiente de tracción,  $C_T$ .  
— modelo de Betz    — modelo de Dymnt    — modelo presente

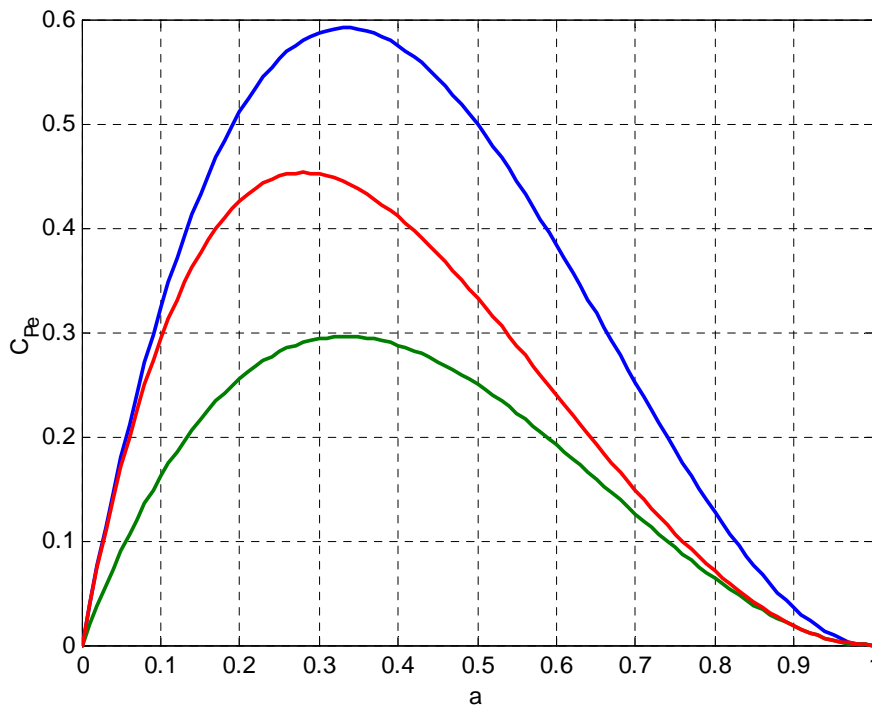


Figura 2.10 Comparación entre modelos del coeficiente de potencia extraída,  $C_{Pe}$ .

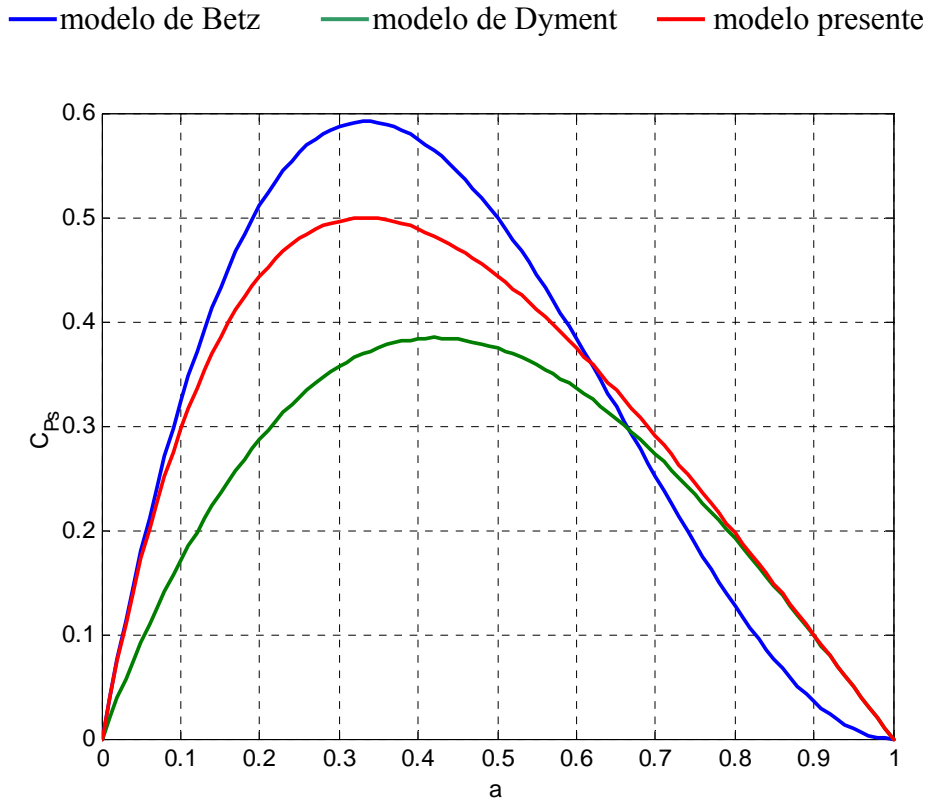


Figura 2.11 Comparación entre modelos del coeficiente de potencia suministrada,  $C_{ps}$ .

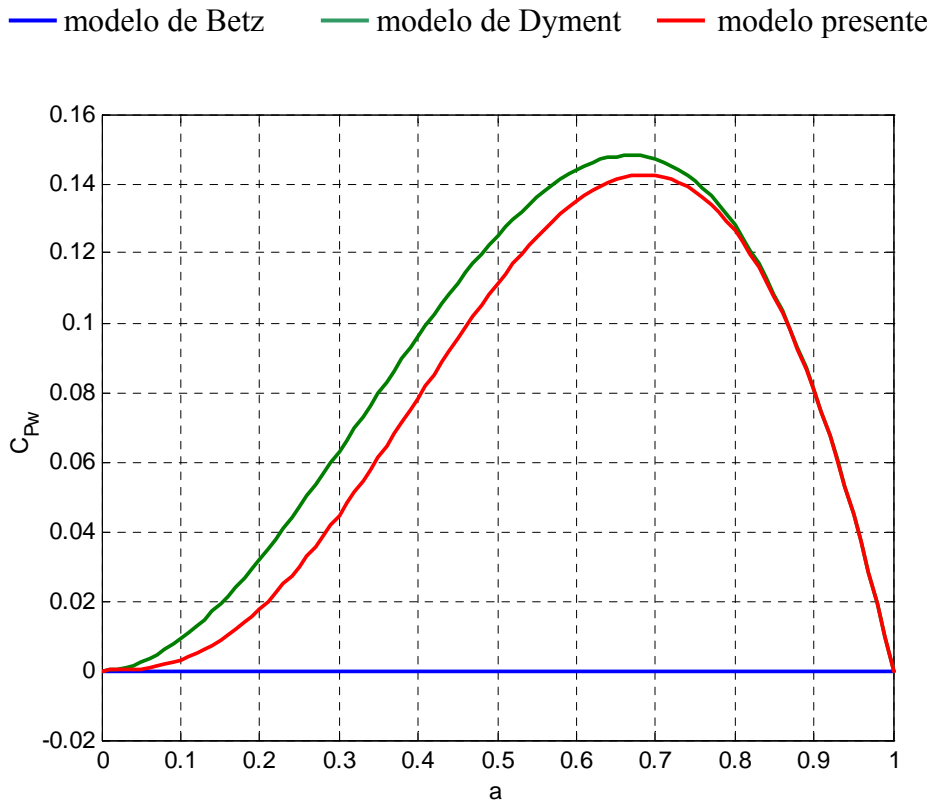


Figura 2.12 Comparación entre modelos del coeficiente de potencia no utilizada,  $C_{pw}$ .

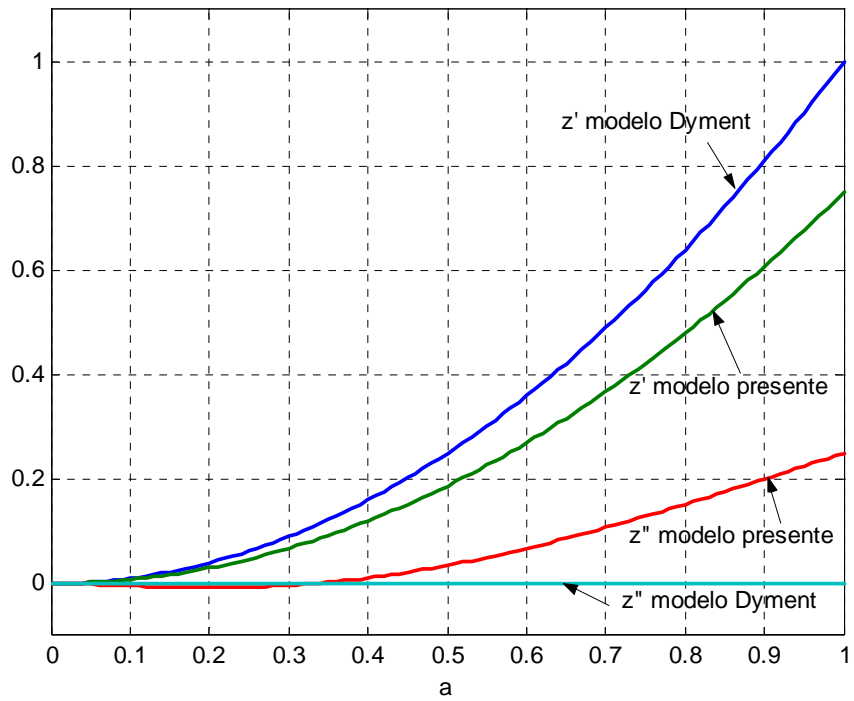


Figura 2.13 Coeficientes de pérdida de presión dentro del tubo de corriente  $\tau$

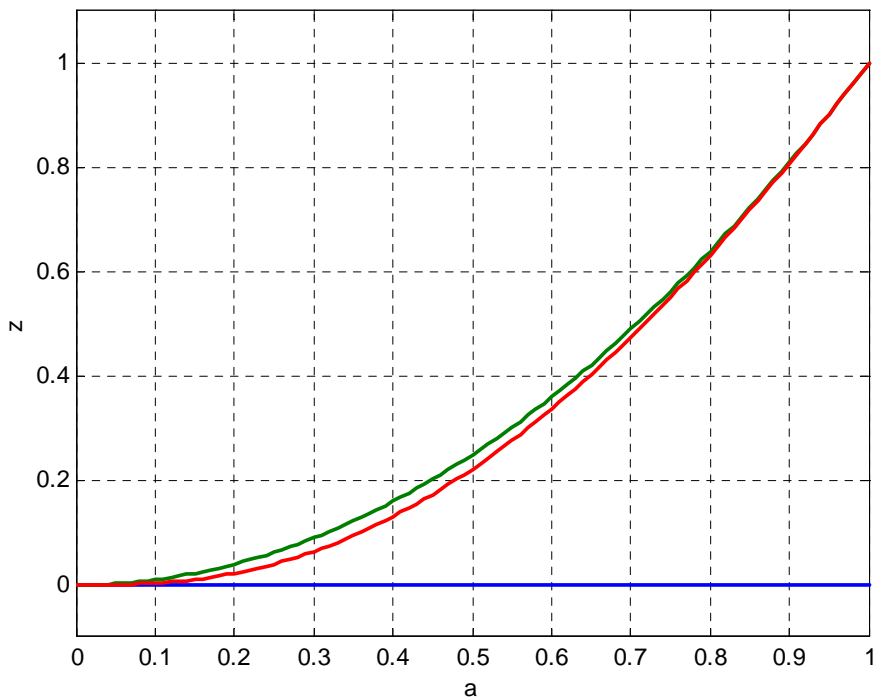


Figura 2.14 Coeficientes de pérdida total de presión dentro del tubo de corriente  $\tau$

— modelo de Betz    — modelo de Dyment    — modelo presente

corriente abajo del disco,  $b$ , el coeficiente de tracción,  $C_T$ , los coeficientes de potencia extraída, suministrada y no utilizada,  $C_{Pe}$ ,  $C_{Ps}$  y  $C_{Pw}$ , y los coeficientes de pérdida de presión en cada sección del tubo de corriente  $\tau$  y total,  $z'$ ,  $z''$  y  $z$ .

Por otra parte, y con respecto a la determinación de la geometría del tubo de corriente envolvente de la estela de la turbina eólica, la configuración resultante del presente modelo puede compararse con la configuración propuesta por Wilson (1986), cuya expresión analítica es

$$\frac{y_\tau}{R} = \left( 1 - \frac{a}{(1-a)} \frac{x/R}{\sqrt{1+(x/R)^2}} \right)^{-1/2} \quad (2.34)$$

En la Figura 2.15 esta configuración es contrastada con la representada en la expresión (2.8), correspondiente al presente modelo, y con la representación resultante del modelo de Dymant, en todos los casos considerando que el coeficiente de reducción de velocidad en el disco de la turbina es igual a 0,3. Adicionalmente, en la Figura 2.16 se muestra la variación de la velocidad axial a lo largo de un segmento de tubo de corriente para estas diferentes formulaciones, también para  $a = 0,3$ . Se observa que en el modelo de Wilson la configuración del tubo de corriente tiende a una mayor apertura, en correspondencia con el modelo de Bezt, donde  $b \rightarrow 2a$ , razón por la cual la velocidad decrece al 40% de  $V_\infty$  suficientemente lejos corriente abajo de la posición del disco. Sin embargo, como fue ya indicado, el modelo de Bezt presenta inconsistencias, reconociéndose además que dicha configuración conduce a coeficientes de potencia excesivamente elevados. Por su parte, la formulación de Dymant no presenta ensanchamiento en la porción del tubo de corriente que se encuentra corriente abajo del rotor, dada la igualdad entre los coeficientes de reducción de velocidad en el disco,  $a$ , y suficiente lejos corriente abajo del disco actuador,  $b$ .

## 2.7. CONCLUSIONES

El presente modelo de la teoría de la cantidad de movimiento aplicada a turbinas eólicas de eje horizontal representa una formulación más real que la generalmente referenciada -debida a Betz-, ya que el tubo de corriente que delimita al flujo de aire que atraviesa al rotor se expande tanto corriente abajo como corriente arriba del disco, incluyendo pérdidas de presión a lo largo del mismo.

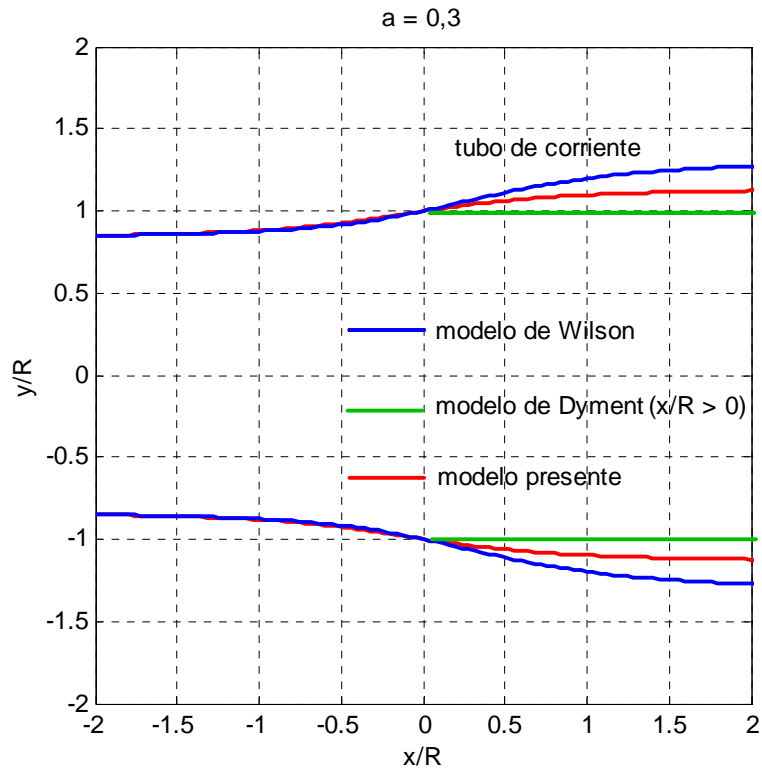


Figura 2.15 Configuraciones del tubo de corriente  $\tau$ , siendo  $a = 0,3$ , según los diferentes modelos.

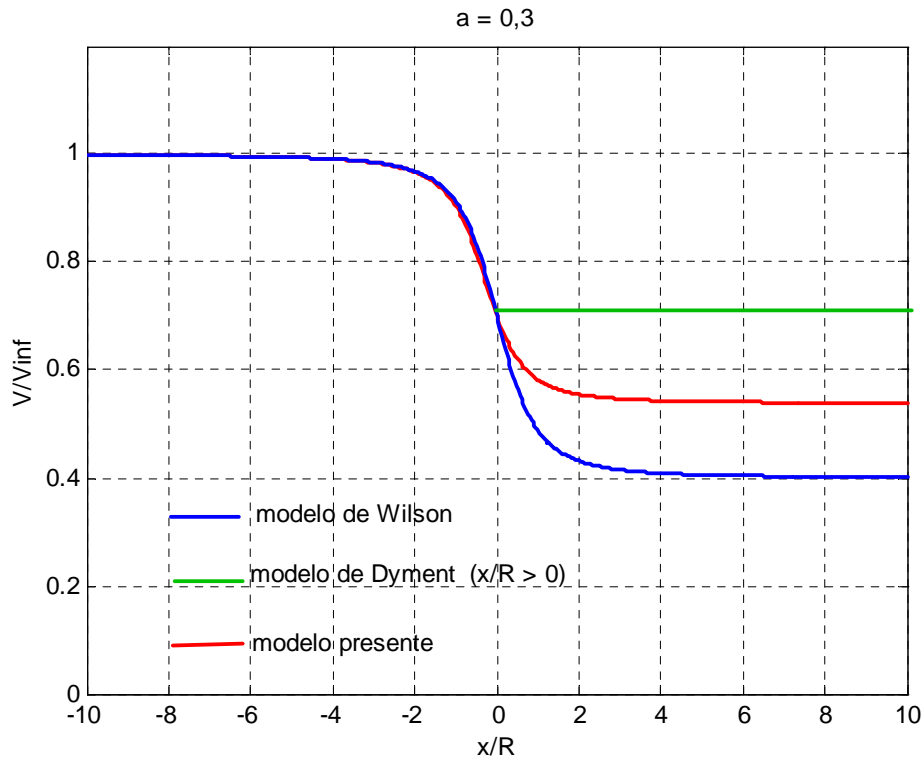


Figura 2.16 Reducción de velocidad dentro del tubo de corriente  $\tau$ , siendo  $a = 0,3$ , según los diferentes modelos.

Si bien para bajos valores del coeficiente de reducción de velocidad en el disco el coeficiente de pérdida de presión total resulta ligeramente negativo, cuando se consideran los efectos de fricción y rotación del fluido que atraviesa al disco -efectos no considerados en el presente modelo-, se descuenta que las pérdidas deben continuar incrementándose, con lo cual se compensarían los reducidos valores negativos de este coeficiente.

Adicionalmente, el presente modelo considera el continuo ensanchamiento del tubo de corriente que contiene al aire que atraviesa a la turbina, situación que el modelo de Dymment no puede considerar, ya que en su formulación considera que dicho tubo de corriente mantiene su sección constante por detrás de la posición del disco actuador. Asimismo, este modelo no presenta, como sí lo hace el modelo de Betz, un límite en el valor admisible del coeficiente de reducción en el disco.

Los coeficientes de tracción y potencia extraída de la turbina eólica obtenidos a partir del presente modelo resultan comprendidos entre los valores dados por las teorías de Betz y Dymment. En particular, cuando se consideran los valores del coeficiente de reducción de velocidad de alrededor del 30%, los coeficientes de máxima potencia extraída ( $C_{pe_{m\acute{a}x}}$ ) tienden a los valores experimentales, los cuales se encuentran en el orden del 45%. Por el contrario, tal como se establece por Dymment (1989), el  $C_{pe_{m\acute{a}x}}$  evaluado por la teoría de Betz resulta sobrestimado, mientras que admite que el mismo resulta subvalorado por su propia formulación.

Además, la posibilidad de estimar la geometría del tubo de corriente que envuelve a la estela vorticiosa del rotor, situación posible solamente con el presente de los tres modelos, simplifica enormemente los cálculos computacionales frente a las teorías que involucran mayores complejidades (como por ejemplo, las teorías que incorporan los denominados *modelos de estela fija o prescripta*) con la finalidad de evaluar la performance de turbinas eólicas de eje horizontal.

Es justamente esta propiedad la que resulta de mayor interés para el presente trabajo, dado que este modelo de estela será utilizado en el próximo capítulo para establecer la envolvente de los hilos vorticosos libres que conforman el sistema vorticoso de la estela de la pala de una turbina eólica de eje horizontal.

# CAPÍTULO 3

## MODELIZACIÓN DEL FLUJO INVÍSCIDO

### 3.1. INTRODUCCIÓN

En la mayoría de los problemas de interés práctico en aerodinámica, y particularmente para el análisis del flujo sobre cuerpos bidimensionales o tridimensionales, el número de Reynolds característico del problema resulta lo suficientemente elevado como para diferenciar en el campo fluidodinámico una zona donde los efectos viscosos adquieren una gran importancia, y otra región donde los mismos resultan despreciables frente a los efectos inerciales. Este flujo, que por sus características es denominado *externo*, puede entonces estudiarse como la superposición de un flujo no viscoso y un flujo definido por la presencia de la capa límite y la estela, zonas donde quedan confinados los efectos de la viscosidad. Lógicamente, estos campos fluidodinámicos se encuentran acoplados, por lo cual determinan conjuntamente las cargas aerodinámicas sobre los cuerpos sumergidos. Por otra parte, dado que el campo de presiones es determinado fundamentalmente por el flujo invíscido y resulta sobreimpuesto a la capa límite, y como las velocidades en el borde de la capa viscosa se conectan con la distribución de velocidades en el flujo no viscoso, es necesario realizar primeramente el cálculo del flujo invíscido, para luego corregirlo por la presencia de la capa límite.

Tratándose de turbinas eólicas, el flujo alrededor de cada sección de las palas presenta las características enunciadas anteriormente, siendo posible el estudio del mismo mediante la superposición de un flujo invíscido y un escurrimiento en la capa límite. Entonces, como primera etapa del estudio del campo fluidodinámico, se pretende determinar el flujo invíscido, bajo condiciones tridimensionales (palas de envergadura finita, que presentan curvatura y torsión) para una velocidad de viento y una rotación uniformes, considerando solamente la existencia de una única pala, es decir, sin considerar los efectos de mutua interferencia entre palas ni la presencia de la torre y la nacela del aerogenerador. Se considera asimismo que la pala es rígida y se desprecian los efectos de la compresibilidad del fluido debido a las relativamente bajas velocidades específicas.

El flujo invíscido alrededor de la pala es entonces determinado por la superposición de una corriente plana de viento, cuya intensidad es una fracción de la correspondiente al viento no perturbado dado que el rotor eólico se encuentra inmerso en un tubo de corriente cuyo radio se incrementa a medida que el aire fluye, una corriente circunferencial, perpendicular a la anterior, debido a la rotación uniforme de la pala, y una corriente inducida por la circulación del sistema vorticoso asociado a la pala y a su estela, sistema mediante el cual se representa la superficie sustentadora de envergadura finita.

Tanto la geometría de la pala (distribución de cuerdas, ángulos de pala, perfil aerodinámico) como sus condiciones de operación (velocidad no perturbada del viento, coeficiente de expansión de la vena de fluido que pasa a través del rotor y velocidad de rotación de la turbina) son conocidas.

### **3.2. FORMULACIÓN DEL MODELO NUMÉRICO POR EL MÉTODO DE LOS PANELES**

El flujo invíscido alrededor de la pala se determina mediante la aplicación del denominado *método de los paneles*, (Bertin y Smith, 1979) (Katz y Plotkin, 1991) por el cual la pala es discretizada mediante un número finito de paneles cuadrilaterales, los cuales son adecuadamente distribuidos a lo largo de la envergadura y cuerda de la misma. Este modelo, por considerar los efectos según cuerda (teorías de las superficies sustentadoras) ofrece una mejor representación aerodinámica cuando resulta comparado con los modelos de líneas sustentadoras o de distribución de paneles solamente a lo largo de la envergadura (Afjeh y Keith, 1986a), (Afjeh y Keith 1986b) y (Prado, 1994).

Asociado a cada panel se encuentra un anillo vorticoso de intensidad de circulación constante, conformado por segmentos de hilos vorticosos rectos. Estos anillos configuran el sistema vorticoso ligado a la pala. Los hilos vorticosos asociados a los paneles ubicados a lo largo del borde de fuga de la pala son los únicos que no forman un circuito cerrado, presentando la forma de U sobre el panel, y determinando la estela de la pala mediante hilos vorticosos helicoidales, conformando en su conjunto un sistema discreto de hilos libres de configuración fija y longitud semi-infinita.



Como se muestra en la Figura 3.1, en el caso de un panel genérico  $i$  que no se encuentre ubicado sobre el borde de fuga de la pala, su anillo vorticoso se conforma mediante cuatro tramos rectos, uno que yace a lo largo de la envergadura del panel -sobre el cuarto de cuerda del mismo-, dos tramos dispuestos sobre los laterales del panel, desde su cuarto de cuerda hasta el cuarto de cuerda del panel ubicado en su inmediata posición corriente abajo, panel  $j$ , y el tramo restante, que cierra el circuito, yaciendo sobre el cuarto de cuerda y a lo largo de la envergadura de dicho panel posterior. La intensidad de circulación del circuito, constante de acuerdo a los teoremas de Helmholtz (Katz y Plotkin, 1991), es representada por  $\gamma$ . Se define como *punto de colocación* de cada panel,  $P_c$ , al punto ubicado a la mitad de la envergadura del mismo, en su intersección con la línea de tres cuartos de cuerda del panel.

Por otra parte, la Figura 3.2 muestra la configuración vorticiosa asociada a un panel genérico  $k$  ubicado sobre el borde de fuga de la pala. Cada uno de estos paneles contiene un sistema de hilos vorticosos rectos ubicados sobre la línea de cuarto de cuerda y sobre los bordes del panel, desde su cuarto de cuerda hasta el borde de fuga de la pala. A partir de las esquinas posteriores de cada panel parten los hilos vorticosos, denominados libres, que conforman la estela. La intensidad de circulación  $\gamma$  de dicho filamento también debe ser constante. La posición de los *puntos de colocación* correspondientes a los paneles dispuestos sobre el borde de fuga es la misma que aquella definida anteriormente. En ambas figuras, el vector  $\hat{n}$  define al vector unitario normal al panel en el punto de colocación.

La Figura 3.3 muestra el efecto de superposición de filamentos vorticosos, de manera que la intensidad de circulación resultante asociada a la línea sustentadora del panel (hilo vorticoso ubicado al cuarto de cuerda del panel) es la suma algebraica de las intensidades de los hilos superpuestos. Asimismo, puede observarse que sobre el borde de fuga se verifica la condición de Kutta ( $\gamma_{BF} = 0$ ) ya que la configuración vorticiosa dada es equivalente al cierre del anillo sobre el borde de fuga de los paneles ubicados en el borde de fuga de la pala y la conexión entre hilos vorticosos de la estela consecutivos, generando entonces dos filamentos vorticosos superpuestos, de igual intensidad de circulación, pero sentido contrario, dando consecuentemente resultante nula.

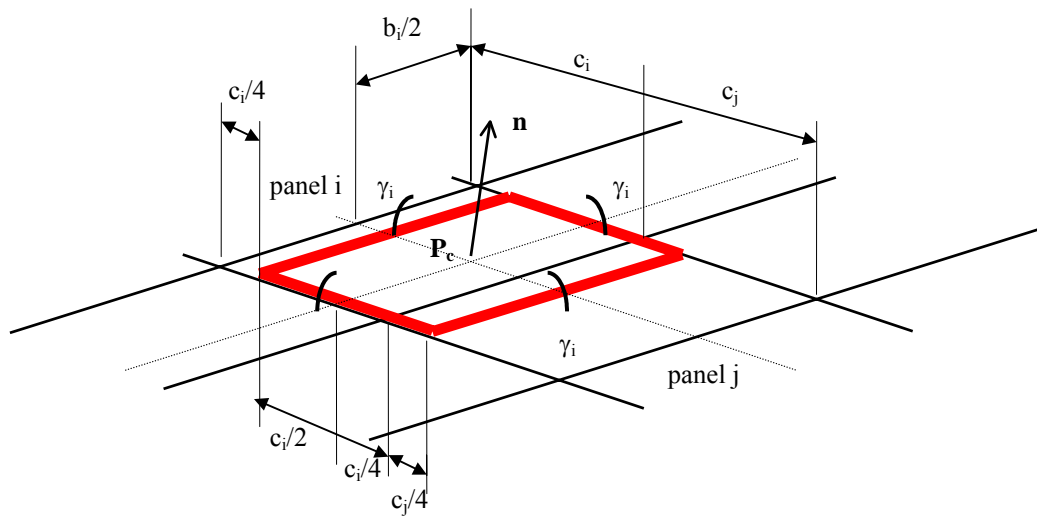


Figura 3.1 Anillo vorticoso ligado al panel i

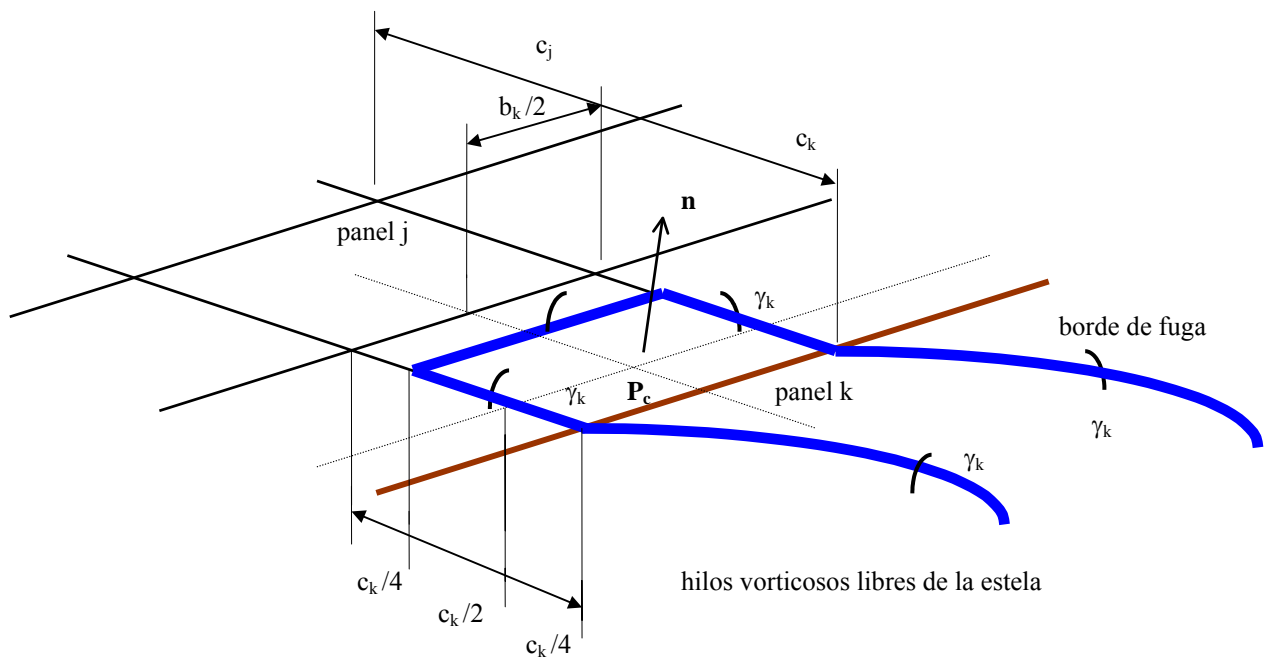


Figura 3.2 Configuración del hilo vorticoso ligado a un panel k del borde de fuga de la pala

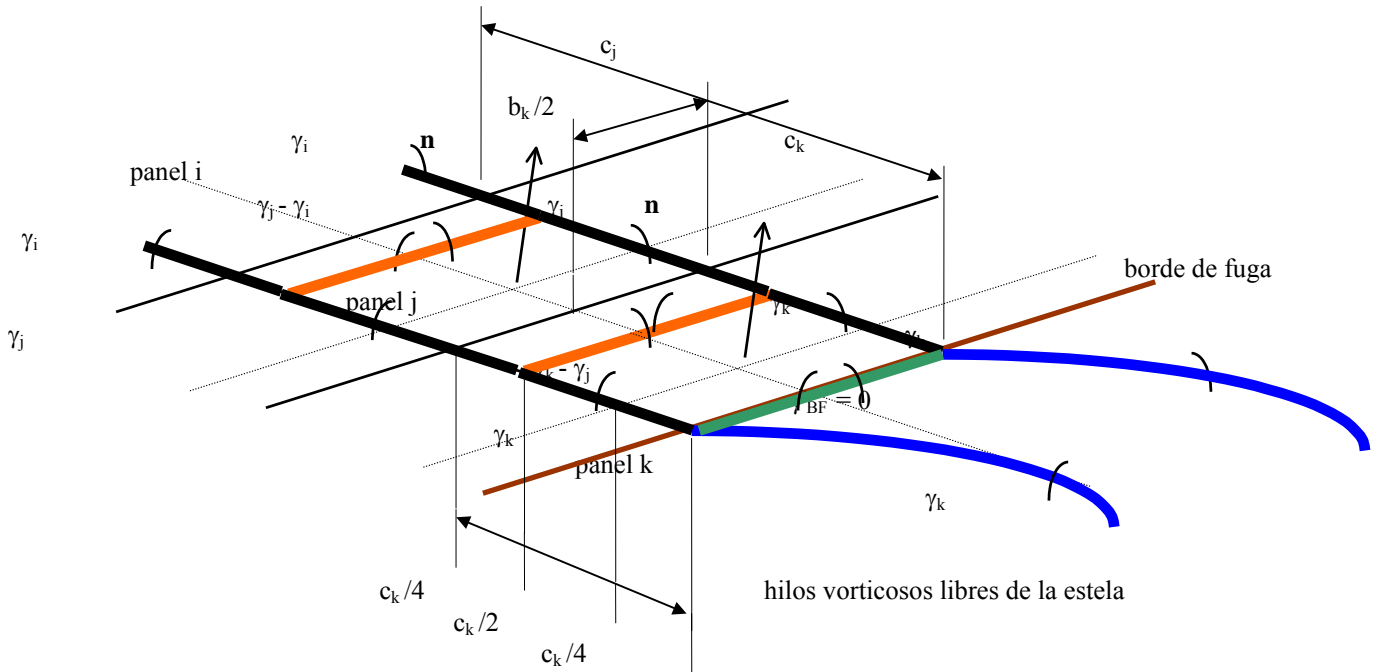


Figura 3.3 Configuración vorticosa asociada a la pala

### 3.2.1. Consideraciones generales

Para el siguiente planteo, se define una terna de ejes solidaria a la pala, cuyo borde de ataque yace sobre el eje  $X(+)$ . El eje  $Z(+)$  coincide con el eje de rotación de la pala, siendo su dirección la del viento incidente. El eje  $Y(+)$  resulta determinado por la definición de una terna ortogonal derecha. Así, el plano  $XY$  define al plano de rotación de la turbina.

Se asume que la turbina (y por ende el sistema de ejes) se mantiene fijo en el espacio, y el aire adquiere una rotación uniforme, de sentido contrario al sentido de rotación de la pala, compartiendo además el movimiento de avance en la dirección positiva del eje  $Z$ . Entonces, definiendo que la turbina gira en sentido antihorario, la velocidad de rotación de la pala es  $\vec{\Omega}_p = -\Omega_p \hat{k}$ . Por lo cual, considerando a la pala fija, es ahora el aire el que rota con velocidad angular  $\vec{\Omega}_a = \Omega_a \hat{k}$ , siendo  $\Omega_p = \Omega_a = \Omega = \text{constante}$ .

La corriente de aire suficientemente alejada corriente abajo de la turbina, supuesta de presentar un perfil uniforme, es representada por la velocidad del viento no perturbado,  $\vec{V}_\infty = V_\infty \hat{k}$ , siendo  $V_\infty = \text{constante}$ .

La pala tiene un radio  $B$  medido desde el eje de rotación hasta su punta y una envergadura  $b$  (distancia entre raíz y punta), siendo  $b < B$ .

### 3.2.2. Conformación de la estela de la pala

Existen diversos modelos que representan la estela vorticiosa de la pala (Afjeh y Keith, 1986a, 1986b), (Koh y Wood, 1991a, 1991b), (Wood y Meyer, 1991) y que, en general, asumen diferentes configuraciones para los sucesivos tramos de la estela, (próximo, intermedio y lejano) con referencia a su posición corriente abajo desde la turbina eólica. Asimismo, pueden llegar a considerar la expansión de la estela, al menos en sus primeras etapas de desarrollo.

Los modelos más complejos consideran un desarrollo no restringido de la estela (modelos de estela libre), sin embargo, para bajos valores de la velocidad específica (relación entre la velocidad tangencial en punta de pala y la velocidad no perturbada de viento,  $\sigma_\infty = \Omega B / V_\infty$ ) es común representar la estela del rotor por un modelo de estela rígida. La razón de esta consideración es que bajo las condiciones indicadas, los efectos de deformación de la estela son despreciables (Afjeh y Keith, 1986b).

En la presente formulación se adopta un modelo de estela vorticiosa fija en expansión, en donde una estela vorticiosa helicoidal, de eje  $Z(+)$ , se desarrolla manteniendo un paso constante, dentro de un tubo de corriente que se va ensanchando a medida que el aire fluye corriente abajo desde el disco descrito por la rotación de la pala. De acuerdo con las formulaciones de la teoría unidimensional de la cantidad de movimiento, el aire que fluye dentro del tubo de corriente que pasa a través del rotor va sufriendo una expansión pues se va retardando por entregar parte de su energía cinética a la turbina y verificar la condición de continuidad. Por ello, la velocidad del viento en el plano del rotor ( $Z = 0$ ),  $V_0$ , es menor que la velocidad no perturbada del viento,  $V_\infty$ . Así, la velocidad del aire que atraviesa a la turbina, asumida uniforme sobre el radio de la pala, resulta determinada por la expresión

$$V_0 = V_\infty (1 - a) \quad (3.1)$$

donde  $a$  es el coeficiente de reducción de velocidad en el disco ( $0 < a < 1$ ).

En el presente modelo se considera que el tubo de corriente envolvente del sistema vorticoso de la estela,  $\tau$ , tiene una configuración fija dada por la expresión (Prado, 1995),

$$R_{\tau}^6 + R_{\tau}^4(Z^2 - 2R^2) + R_{\tau}^2(R^2 - 2Z^2)R^2 + Z^2(1 - a^2)R^4 = 0 \quad (3.2)$$

donde  $R_{\tau}(Z)$  representa la variación del radio del tubo de corriente que contiene a todo el aire que atraviesa al rotor eólico a medida que este aire fluye a lo largo del eje  $Z$ , y  $R$  denota el radio del área barrida por la turbina. La Figura 3.4 muestra un segmento de dicho tubo de corriente  $\tau$ , extendiéndose a ambos lados de la posición del disco descrito por la rotación de la pala, donde se ha considerado que el factor de reducción de velocidad en el disco igual a 0,30, siendo este último un valor típico (Wood, 1991).

Los hilos vorticosos que se desprenden desde las distintas ubicaciones sobre el borde de fuga de la pala deben permanecer contenidos en sendos tubos de corriente que se expanden a medida que el aire fluye corriente abajo desde la posición radial del punto de desprendimiento (o punto de inicio) del correspondiente hilo vorticoso libre. Las expresiones analíticas para dichos tubos son equivalentes a la dada por la ecuación (3.2), considerando ahora los radios locales de los filamentos vorticosos libres,  $r_{\tau}(Z)$  y las posiciones radiales de partida de los mismos,  $r_0$ , siendo  $0 < r_0 < R$ . Estos tubos de corriente interiores también se representan en la Figura 3.4.

La geometría de los hilos vorticosos helicoidales desprendidos de la pala es dada por

$$Z_e = Z_0 + \kappa \cdot (\Theta - \Theta_0) \quad X_e = r_{\tau} \cdot \cos \Theta \quad Y_e = r_{\tau} \cdot \sen \Theta \quad (3.3)$$

donde los subíndices  $e$  denotan la estela,  $r_{\tau}$  es el radio local del filamento,  $2\pi\kappa$  representa el paso del helicoide y  $\Theta$  representa el parámetro del helicoide,  $\Theta_0 \leq \Theta \leq \infty$ . En particular,  $\Theta_0$  es el valor de  $\Theta$  correspondiente al inicio del hilo vorticoso helicoidal sobre el borde de fuga de la pala, de coordenadas  $(X_0, Y_0, Z_0)$ , siendo  $X_0 = r_0 \cdot \cos \Theta_0$  e  $Y_0 = r_0 \cdot \sen \Theta_0$ . Por condiciones de conservación de la cantidad de movimiento angular y de continuidad dentro del tubo de corriente  $\tau$ , el paso del helicoide se mantiene constante, siendo  $\kappa = V_0/\Omega$ .

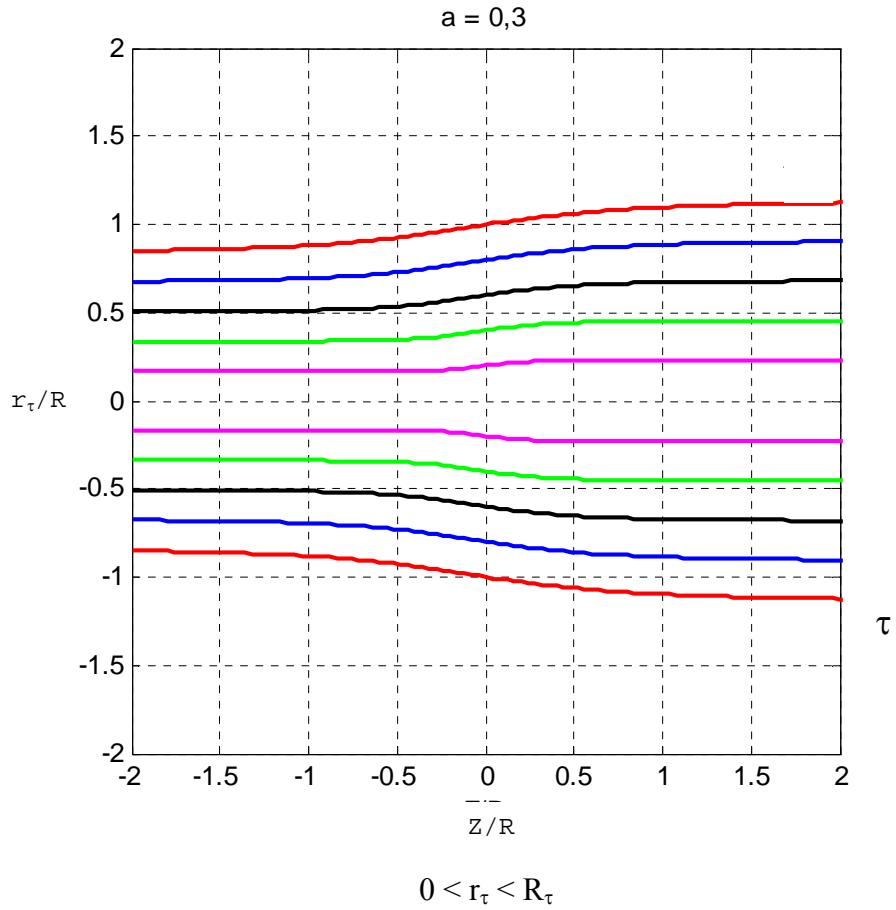


Figura 3.4 Segmento de tubo de corriente  $\tau$ , con tubos de corriente interiores que actuarán de envolventes de los hilos vorticosos de la estela para  $Z/R > 0$

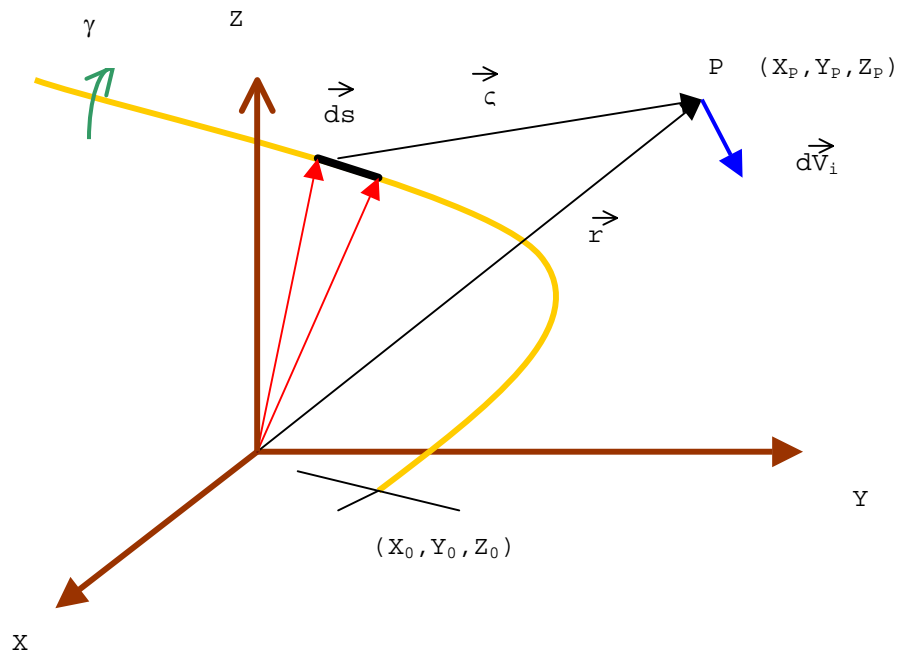


Figura 3.5 Ley de Biot-Savart

### 3.2.3. Cálculo de las velocidades inducidas

El efecto del conjunto de hilos vorticosos es el de adicionar en todo el campo fluidodinámico un flujo, denominado inducido, que debe sumarse vectorialmente al campo de velocidades debido a la velocidad de avance del aire y al efecto de la rotación. El campo de velocidades inducidas es calculado mediante la aplicación de la ley de Biot-Savart. Así, el diferencial de velocidad inducida en un punto P, de coordenadas  $(X_p, Y_p, Z_p)$ , debido a un diferencial de hilo vorticoso de intensidad constante  $\gamma$ , es dado por la relación

$$d\vec{V}_i(X_p, Y_p, Z_p) = \frac{\gamma}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{\zeta}}{|\vec{\zeta}|^3} \quad (3.4)$$

siendo  $d\vec{s}$  un elemento diferencial del filamento vorticoso, orientado según el sentido de su circulación  $\gamma$ , y  $\vec{\zeta}$  el vector posición desde  $d\vec{s}$  hasta el punto de cálculo P, tal como se muestra en la Figura 3.5.

Mediante la integración de la ley de Biot-Savart a lo largo de la longitud de cada filamento del sistema vorticoso completo se determinan las tres componentes cartesianas de las velocidades inducidas ( $V_{iX}$ ,  $V_{iY}$ ,  $V_{iZ}$ ) en cada punto P definido.

En el caso de los hilos vorticosos ligados a los paneles, por tratarse de filamentos rectilíneos de longitud finita, la integración de la ley de Biot-Savart se reduce a expresiones analíticas simples (Afjeh y Keith, 1986b). En el caso de las velocidades inducidas por el sistema vorticoso de la estela, como la integración no presenta una solución analítica, el cálculo requiere de una evaluación numérica.

Dado que todavía no se conocen las intensidades de circulación de cada anillo vorticoso y de cada hilo libre, se considera, en primera instancia, que los mismos tienen una intensidad unitaria y sentido positivo, para así determinar los denominados *coeficientes de influencia* de cada filamento vorticoso sobre cada uno de los puntos de colocación (o de control) de la pala. Dichos coeficientes representan entonces las componentes de las velocidades inducidas generadas en dichos puntos por filamentos vorticosos de intensidad de circulación unitaria y positiva.

Con el fin de determinar la real intensidad de circulación de cada hilo, se impone la condición de contorno que establece la impermeabilidad de cada panel en su respectivo punto de colocación, es decir, debe anularse la componente normal de la velocidad en la posición  $P_c$ .

Consecuentemente, la velocidad resultante obtenida por la superposición de los efectos de la velocidad de avance del aire, de la rotación de la pala y de la velocidad inducida por el sistema vorticoso, debe ser tangente al panel en  $P_c$ .

Así, en el punto de colocación de cada uno de los  $N_p$  paneles con los cuales se ha modelizado la pala, debe verificarse que

$$V_n(P_c) = \vec{V}_r(P_c) \cdot \hat{n}|_{P_c} = 0 \quad (N_p \text{ ecuaciones}) \quad (3.5)$$

siendo

$$\vec{V}_r(P_c) = V_o \hat{k} + \vec{\Omega}_a \times \vec{r}|_{P_c} + \vec{V}_i(P_c) \quad (3.6)$$

donde  $\vec{V}_r(P_c)$  es el vector velocidad resultante en cada uno de los puntos de colocación  $P_c$ ,  $V_n(P_c)$  es la componente normal de la velocidad resultante en dichos puntos,  $\vec{\Omega}_a = \Omega_a \hat{k}$ ,  $\vec{r}|_{P_c} = (X\hat{i} + Y\hat{j} + Z\hat{k})|_{P_c}$  es el radio vector desde el origen de coordenadas a los puntos de colocación y  $\vec{V}_i(P_c)$  es el vector velocidad inducida, función de la distribución de circulación, a priori incógnita, del sistema vorticoso.

El vector velocidad inducida en cada uno de los  $k$  puntos de colocación,  $1 \leq k \leq N_p$ , tiene componentes

$$V_{ix}|_{P_c}^k = \sum_{j=1}^{N_p} C_{i_{xkj}} \gamma_j \quad V_{iy}|_{P_c}^k = \sum_{j=1}^{N_p} C_{i_{ykj}} \gamma_j \quad V_{iz}|_{P_c}^k = \sum_{j=1}^{N_p} C_{i_{zkj}} \gamma_j \quad (3.7)$$

donde se reconoce el efecto superpuesto de las  $N_p$  intensidades vorticosas asociadas a los  $N_p$  paneles (incluyendo tanto los efectos de los hilos ligados como de los libres), y  $C_{i_{kj}}$  son los coeficientes de influencia, calculados en los puntos de control  $P_c$ , y discriminados según cada componente ortogonal.

La ecuación (3.5) representa entonces un sistema linealmente independiente de  $N_p \times N_p$  ecuaciones algebraicas lineales en las incógnitas  $\gamma_j$ , con  $1 \leq j \leq N_p$ . Una vez conocida la distribución de circulación que verifica la condición de tangencia de la velocidad resultante al panel en su punto de colocación, la determinación de las componentes de las velocidades inducidas en todo el campo del flujo, ya sea por integración analítica (hilos vorticosos rectos) o numérica (filamentos vorticosos de la estela) de la ley de Biot-Savart, es directa. Entonces, la aplicación de la ecuación (3.6) a todo punto genérico  $P(X,Y,Z)$  del flujo, considerando una velocidad axial  $W(Z)$  que verifique la continuidad dentro del tubo de corriente  $\tau$ , determina el campo tridimensional de velocidades alrededor de la pala, resultando



$$\vec{V}_r(\mathbf{P}) = W(Z)\hat{k} + \vec{\Omega}_a \times \vec{r}|_p + \vec{V}_i(\mathbf{P}). \quad (3.8)$$

Conocido el campo de velocidades invíscido, se puede determinar el campo de presiones mediante la aplicación de la ecuación de Euler.

### 3.2.4. Cálculo de las cargas aerodinámicas

La circulación asociada a la línea sustentadora de cada panel,  $\Gamma$ , se determina realizando la suma algebraica de las intensidades de circulación,  $\gamma$ , de los anillos vorticosos concurrentes al panel considerado (exceptuando los paneles ubicados a lo largo del borde de ataque de la pala, donde  $\Gamma \equiv \gamma$ ). Mediante la generalización del teorema de Kutta-Joukowski (Katz y Plotkin, 1991), y asumiendo que las velocidades no varían apreciablemente sobre la longitud de la línea sustentadora del panel, las fuerzas aerodinámicas actuantes sobre el hilo vorticoso, y consecuentemente sobre el panel, resultan determinadas por la expresión

$$\vec{F}_k = \rho \vec{U}_k \times \Gamma_k \vec{\Delta}_k \quad 1 \leq k \leq N_p \quad (3.9)$$

donde  $\rho$  denota la densidad del aire,  $\vec{U}$  representa el vector velocidad resultante sobre el hilo y  $\vec{\Delta}$  representa el vector que yace sobre la longitud de dicho hilo vorticoso, cuyo sentido es el dado por la dirección de giro de la circulación, adoptando como positivo al sentido definido por la regla de la mano derecha.

Si bien el campo de velocidades resultantes varía tanto a lo largo de la cuerda como de la envergadura de la pala, se considera constante por tramos, en coincidencia con la línea sustentadora de cada panel. La velocidad resultante a incorporar en (3.9) se determina en el punto medio de la línea sustentadora,  $P_{ls}$ , siguiendo el procedimiento desarrollado anteriormente, es decir

$$\vec{U} \equiv \vec{V}_r(P_{ls}) = V_o \hat{k} + \vec{\Omega}_a \times \vec{r}|_{P_{ls}} + \vec{V}_i(P_{ls}) \quad (3.10)$$

Sin embargo, dado que un filamento vorticoso induciría velocidades infinitas sobre sí mismo, se considera que el mismo presenta un núcleo de radio finito, si bien muy pequeño, el cual rota como cuerpo rígido. Por esta razón, cuando la distancia al eje del hilo tiende a cero, se asume que la velocidad inducida también tiende a anularse. Consecuentemente, para el cálculo de las velocidades inducidas sobre una determinada línea sustentadora de un panel, se consideran los efectos de todos los filamentos del sistema vorticoso, con excepción del segmento de hilo vorticoso ligado a la línea sustentadora en cuestión.

La fuerza aerodinámica resultante es

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^{N_p} \vec{F}_k . \quad (3.11)$$

En particular, se define como tracción a la componente de la fuerza aerodinámica resultante en la dirección del eje de rotación, es decir,  $T = F_z$ .

El torque  $\vec{Q}$  generado por la distribución de fuerzas aerodinámicas alrededor de los ejes coordenados resulta

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^{N_p} \vec{F}_k \times \vec{d}_k \quad (3.12)$$

donde  $\vec{d}_k$  representa los brazos de palanca desde la posición de las fuerzas hasta el origen de coordenadas. Como  $\vec{d}_k = -\vec{r}|_{P_{b_k}}$ , entonces,

$$\vec{Q} = -\sum_{k=1}^{N_p} \vec{F}_k \times \vec{r}|_{P_{b_k}} . \quad (3.13)$$

La potencia entregada por la pala resulta

$$P = \vec{Q} \cdot \vec{\Omega}_p = Q_z \Omega_p \quad (3.14)$$

siendo la velocidad angular de rotación de la pala  $\vec{\Omega}_p = -\vec{\Omega}_a = -\Omega_a \hat{k} = \Omega_p \hat{k}$ .

Los respectivos coeficientes característicos de la pala son, el coeficiente de tracción

$$C_T = \frac{2F_z}{\rho V_\infty^2 A} , \quad (3.15)$$

el coeficiente de torque

$$C_Q = \frac{2Q_z}{\rho V_\infty^2 AR} \quad (3.16)$$

y el coeficiente de potencia

$$C_P = \frac{2P}{\rho V_\infty^3 A} , \quad (3.17)$$

siendo A el área barrida por la pala,  $A = \pi R^2$ .

Por su parte, los coeficientes aerodinámicos locales en una estación genérica X a lo largo de la envergadura de la pala se representan en la Figura 3.6, donde se ilustran con sus correspondientes sentidos positivos.

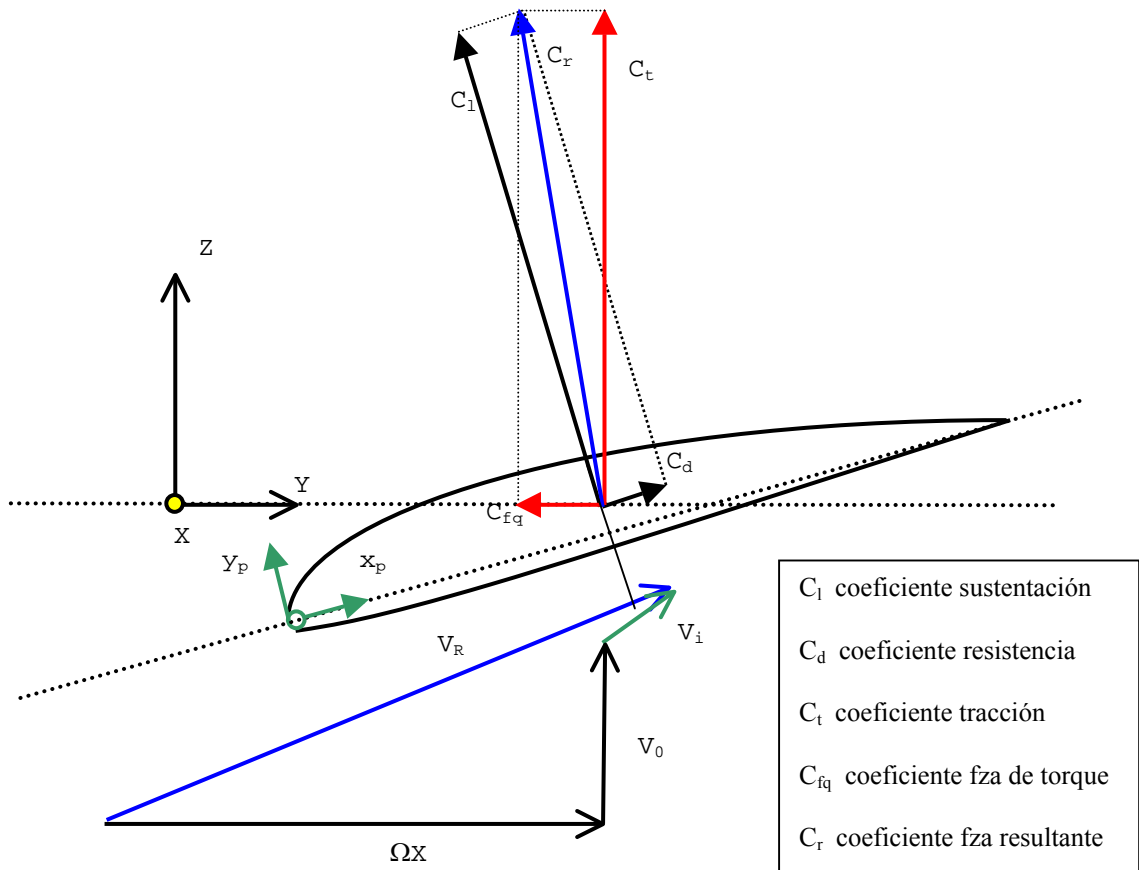


Figura 3.6 Coeficientes aerodinámicos de la sección de pala en una estación X.

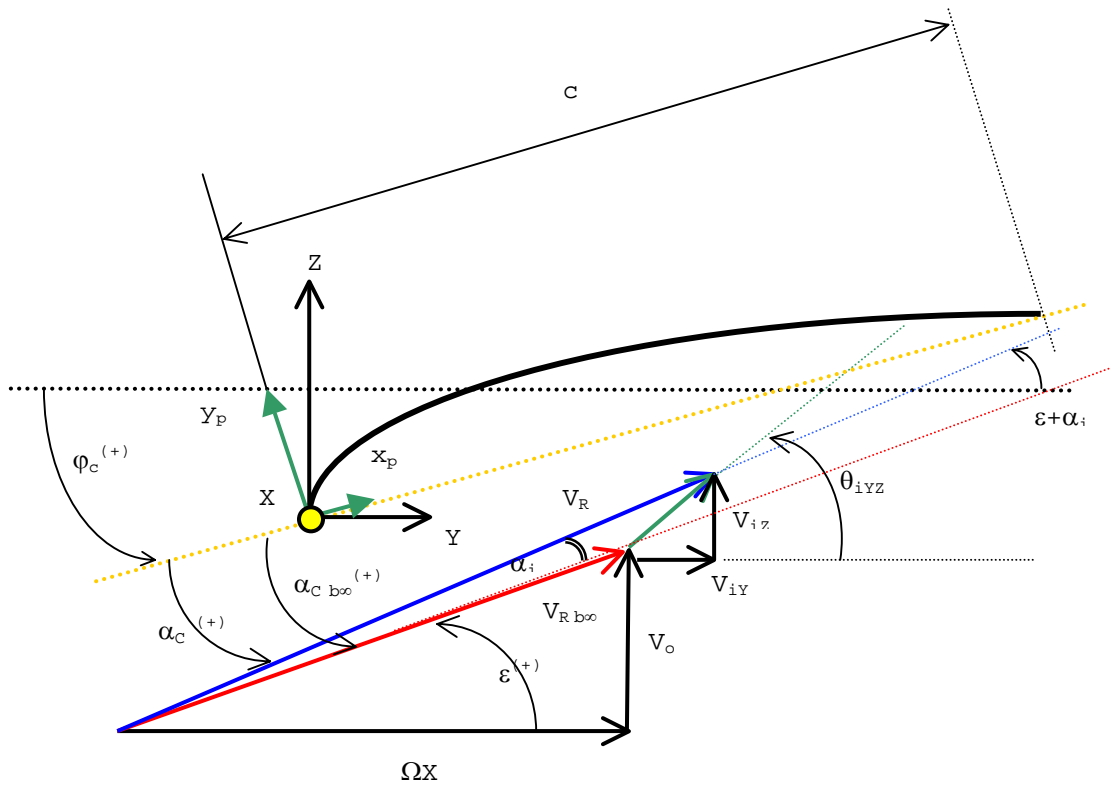


Figura 3.7 Ángulos y velocidades incidentes en una estación X según envergadura.

### 3.3. EJEMPLO

Con el siguiente ejemplo se presentan los resultados obtenidos mediante un programa de cómputo que implementa el modelo propuesto en el presente trabajo. Se considera la pala de una turbina eólica de eje horizontal, cuyas geometría y condiciones de funcionamiento son las siguientes,

radio de la pala en la punta	$B = 1,50 \text{ m}$
radio de la pala en su inicio	$H = 0,25 \text{ m}$
cuerda de la pala en raíz	$c_h = 0,125 \text{ m}$
cuerda de la pala en punta	$c_t = 0,125 \text{ m}$
velocidad de viento	$V_\infty = 12 \text{ m/s}$
velocidad angular de rotación	$\Omega = 28 \text{ rad/s}$

siendo adoptado un coeficiente de reducción de velocidad sobre la pala del 30 %, y resultando consecuentemente  $V_0 = 8,4 \text{ m/s}$ , una estela helicoidal de paso  $2\pi\kappa = 1,885 \text{ m} \approx 1,25R$  y una velocidad específica,  $\sigma_0 = \Omega B / V_0 = 5$  sobre el disco de la turbina.

El ángulo de pala,  $\varphi_c$ , representa el ángulo local entre el plano de rotación y la línea de cuerda del perfil en cada sección definida por su coordenada  $X$ . La torsión geométrica está representada por la variación de estos ángulos de pala a lo largo de la envergadura. La distribución de los ángulos de pala ha sido determinada fijando los ángulos de ataque de la corriente incidente (sin considerar los efectos de estela),  $\alpha_{c\infty}$ , los cuales se miden positivamente a partir de las líneas de cuerda de los perfiles que conforman la pala y determinando los ángulos de incidencia  $\varepsilon$  definidos (desde el plano de rotación) por la composición vectorial entre la velocidad tangencial local a lo largo del borde de ataque,  $\Omega_a X$ , y la velocidad de la corriente sobre el disco de la turbina,  $V_0$ . Como se observa en la Figura 3.7, los ángulos de pala quedan entonces determinados por la expresión

$$\varphi_c(X) = \varepsilon(X) + \alpha_{c\infty}(X), \quad (3.18)$$

siendo  $\text{tg}[\varepsilon(X)] = \Omega X / V_0$ .

La presente sección de pala está conformada por un perfil delgado de arco circular, cuya flecha adimensionalizada con la cuerda local,  $c = c(X)$ , es

$$\left. \frac{y_p}{c} \right|_{\max} = \frac{h}{c} = 0,02 , \quad (3.19)$$

relación que se mantiene constante a lo largo de la envergadura de la pala. En este ejemplo la pala no presenta ahusamiento, razón por la cual la cuerda es constante.

Para la discretización de la superficie de la pala se ha considerado una distribución según envergadura de 50 paneles de envergadura constante y una distribución según cuerda de 50 paneles, también en este caso de cuerda constante, de tal manera que cada panel guarda la misma relación de aspecto de la propia pala. Así, la presente discretización totaliza  $N_p = 2500$  paneles, siendo mostrada en la Figura 3.8 en una vista completa de la pala -donde se reconoce la torsión- y en un detalle en la Figura 3.9.

En las Figuras 3.10 y 3.11 se observa a la pala y a una porción de su estela, estando esta última representada por 51 hilos vorticosos helicoidales semi-infinitos. En particular, la visualización axial mostrada en la Figura 3.11 muestra el incremento radial que sufre la estela vorticiosa, en este modelo de estela fija, a medida que se desarrolla desde el borde de fuga de la pala. El proceso de integración numérica de la ley de Biot-Savart para la obtención de los coeficientes de influencia de cada hilo de la estela sobre cada punto de control,  $C_{i_e x}$ ,  $C_{i_e y}$  y  $C_{i_e z}$ , se realizó mediante el método de Simpson, considerando hilos de longitud finita que partían desde el borde de fuga de la pala hasta una coordenada axial igual a 40 radios  $R$  (que en este caso corresponde a aproximadamente 32 revoluciones de la estela), y dividiendo dichos hilos en 2000 segmentos correspondientes a incrementos constantes del parámetro del helicoide,  $\Theta$ .

En las Figuras 3.12 y 3.13 se muestran, respectivamente, la evolución de los coeficientes de influencia del hilo vorticoso número 25 (que parte aproximadamente desde la semienvergadura de la pala) sobre el panel 50 (ubicado en la punta de pala, sobre el borde de ataque), y de los coeficientes de influencia del hilo vorticoso número 51 (que se desprende desde la punta de la pala) sobre el panel 25 (ubicado sobre el borde de ataque, casi a la mitad de la envergadura de la pala), a medida que el límite superior de integración se va alejando del punto de partida de los hilos vorticosos libres. Como puede observarse, superando las 20 revoluciones de la estela ( $Z_e/R > 25$ ), las porciones restantes de los hilos vorticosos no proporcionan modificaciones apreciables a los valores de los coeficientes de influencia.

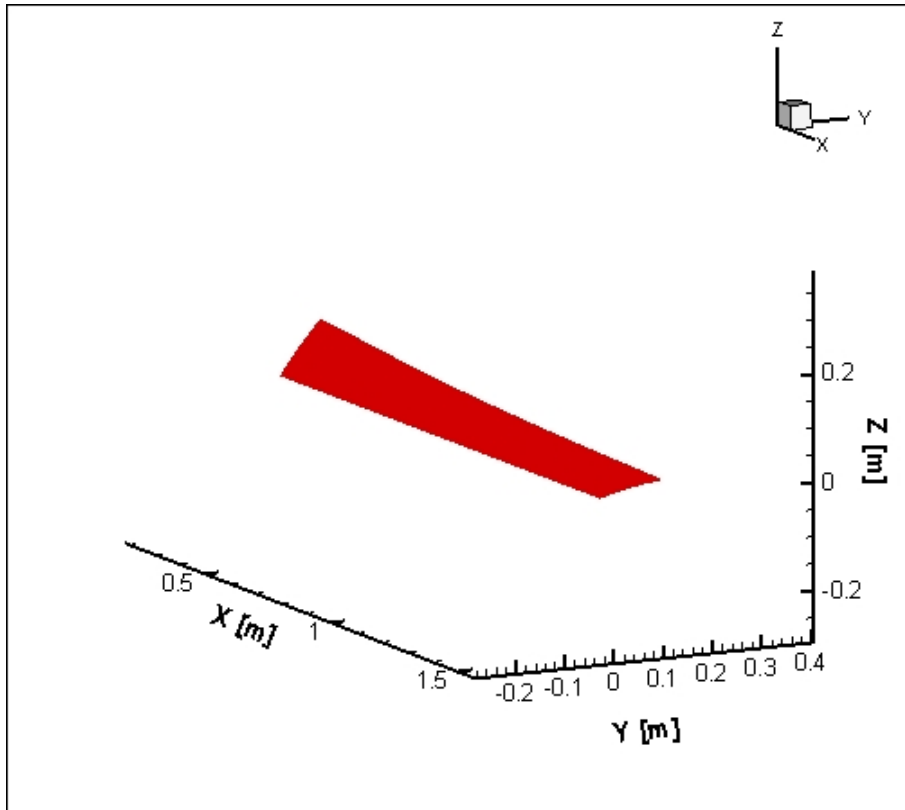


Figura 3.8 Configuración geométrica de la pala y panelización

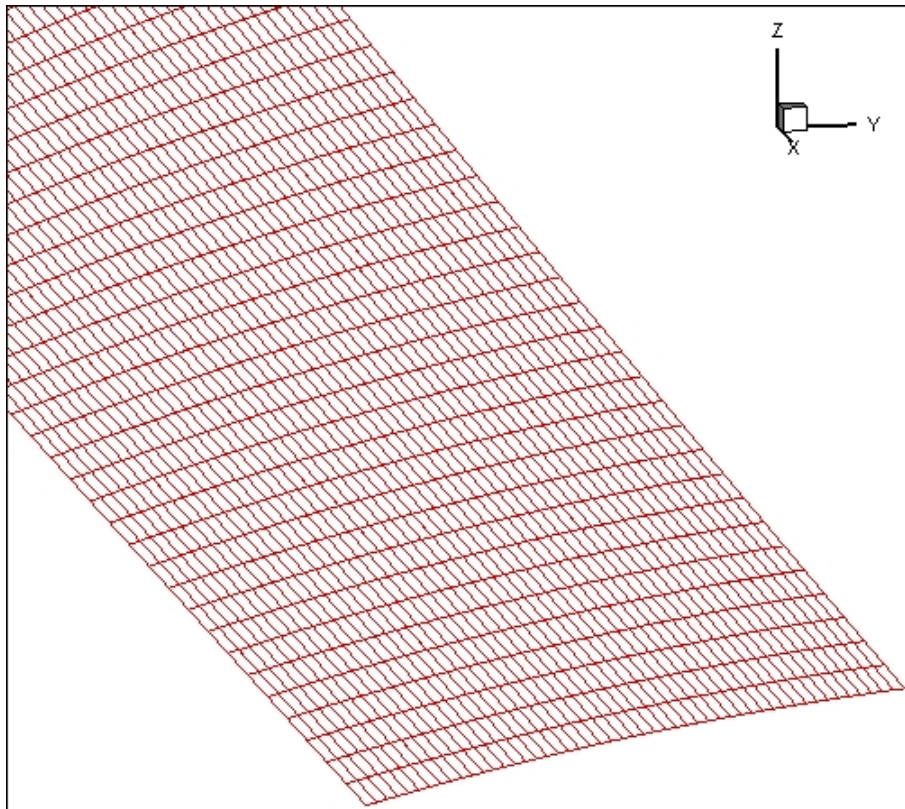


Figura 3.9 Panelización de la pala, detalle de la punta de pala

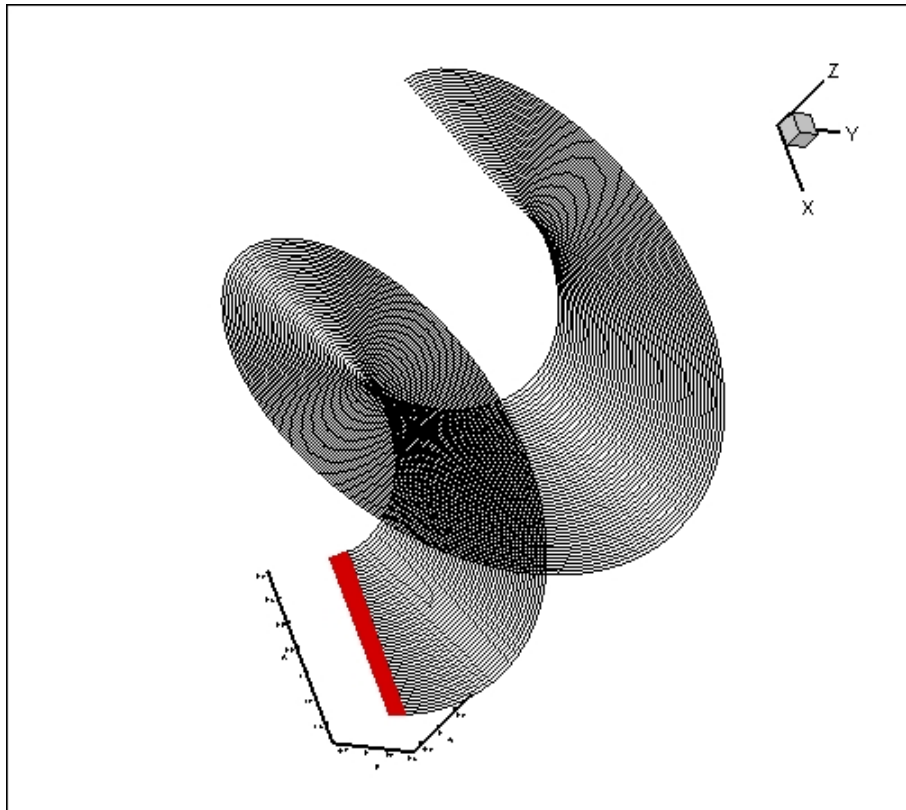


Figura 3.10 Configuración vorticosa de la estela, fragmento

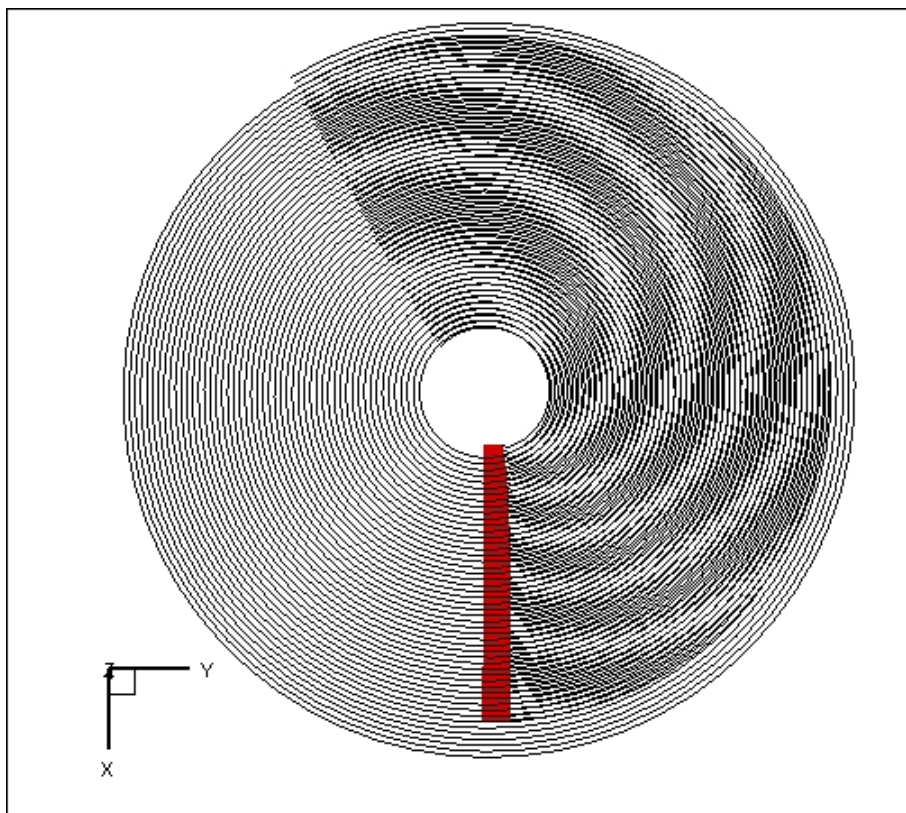


Figura 3.11 Configuración vorticosa de la estela, vista posterior, fragmento

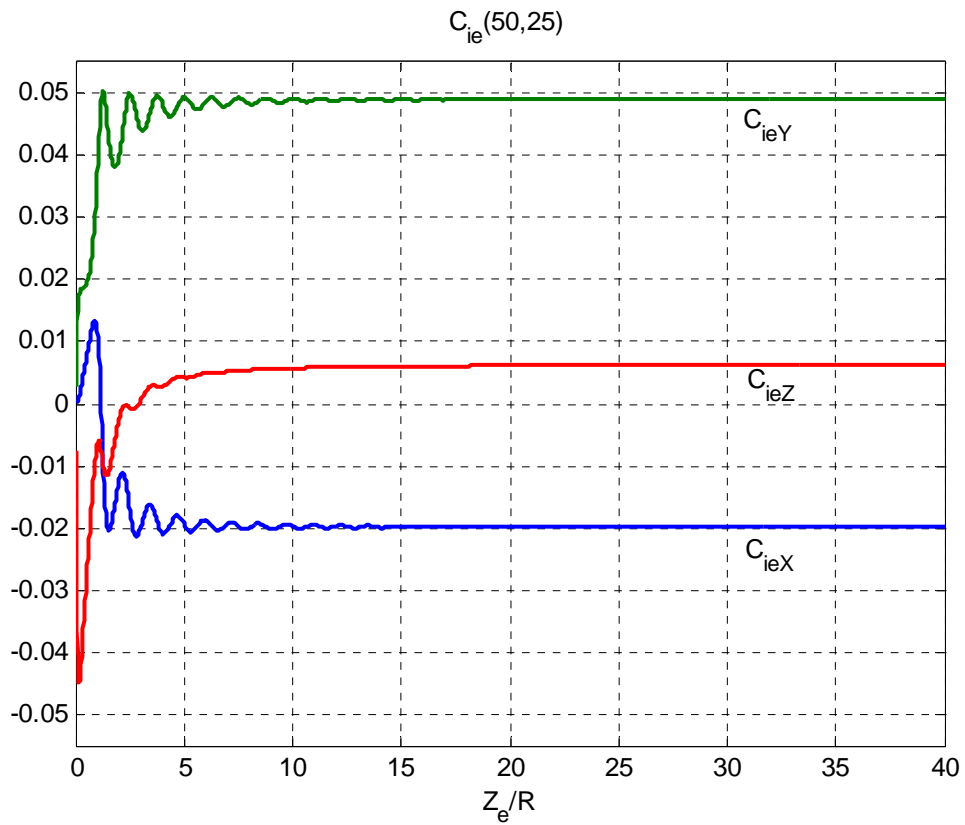


Figura 3.12 Coeficiente de influencia (50-25)

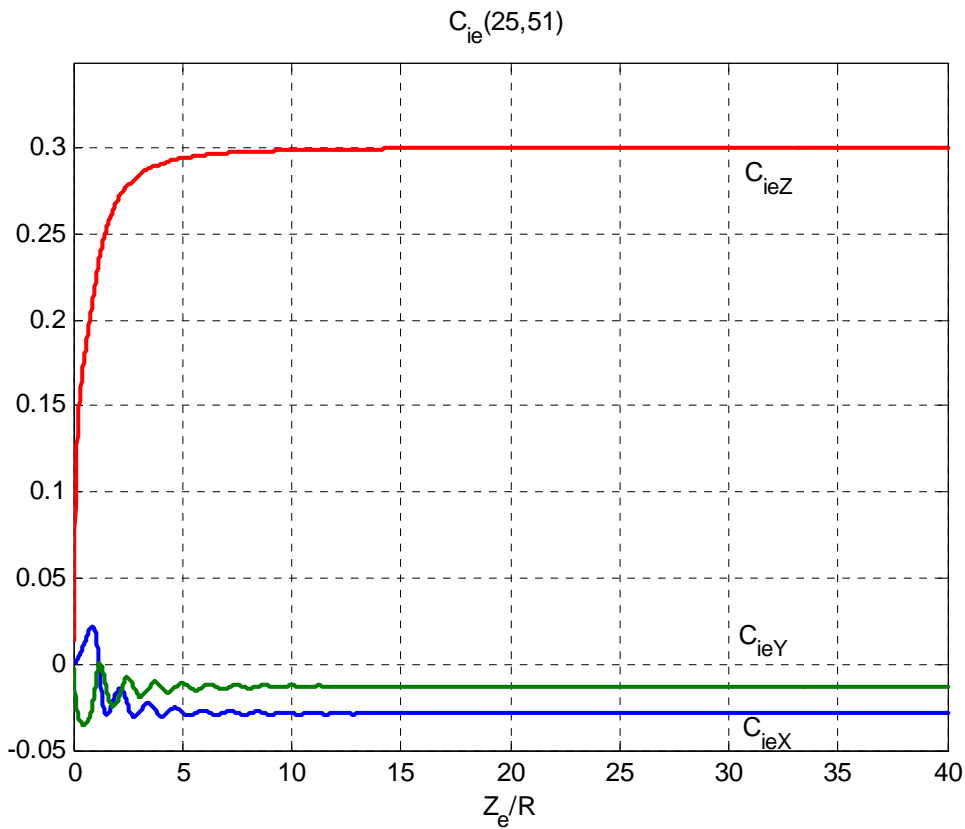


Figura 3.13 Coeficiente de influencia (25-51)



Determinados todos los coeficientes de influencia y resuelto el sistema de ecuaciones algebraicas lineales representado por la expresión (3.5), se obtiene la circulación asociada a cada anillo vorticoso,  $\gamma$ . La distribución según envergadura de dicha circulación, adimensionalizada de manera que  $\gamma^* = 100\gamma/(\Omega B^2)$  es mostrada en las Figuras 3.14 y 3.15.

En la Figura 3.14 se muestran las sucesivas distribuciones asociadas a cada uno de los 50 tramos según cuerda de 50 paneles dispuestos a lo largo de la envergadura de pala, representados éstos por las abscisas adimensionalizadas de sus respectivos puntos de colocación,  $X(P_c)/R$ . Se observa que dichas distribuciones tienden a anularse en los extremos de pala, dado que la pala debe comportarse como una superficie sustentadora de envergadura finita, y que la circulación crece desde el borde de ataque de la pala (donde debe anularse también) hasta el borde de fuga, a partir de donde es transportada por los hilos vorticosos libres de la estela. La Figura 3.15 muestra la misma distribución, siendo esta vez la abscisa dada por la posición según cuerda de los puntos de colocación, coordenada que es adimensionalizada con la cuerda local de la sección de pala. En esta figura se visualiza asimismo el incremento de circulación hacia el borde de fuga de la pala, circulación que es transportada finalmente por los hilos vorticosos de la estela.

Las Figuras 3.16 y 3.17 representan, en el mismo sistema de coordenadas que las figuras precedentes, las distribuciones según envergadura y cuerda de las circulaciones adimensionalizadas,  $\Gamma^* = 100\Gamma/(\Omega B^2)$ , asociadas al hilo sustentador de cada panel. Como fue expuesto, dichas intensidades resultan de realizar la suma algebraica de las circulaciones de los anillos concurrentes en el segmento de hilo vorticoso ligado al cuarto de cuerda de cada panel. Por esta razón, la circulación adimensional  $\Gamma^*$  se anula también hacia el borde de fuga de la pala, verificando así la condición de Kutta. Esta circulación asociada al hilo sustentador ligado al cuarto de cuerda del panel origina la fuerza sustentadora local, normal al vector velocidad resultante local, debida a la aplicación del teorema de Kutta-Joukowski. Circulaciones resultantes positivas generan fuerzas sustentadoras con componentes positivas según el eje Z.

Determinadas entonces las circulaciones asociadas a la red vorticoso ligada a la pala y al sistema vorticoso de la estela, es posible determinar el campo de velocidades, tanto el inducido como el resultante, en todo el campo fluidodinámico. En particular, resulta de mayor interés calcular las distribuciones de velocidad sobre los paneles que conforman la pala, teniendo en consideración la futura incorporación de los efectos de la viscosidad en proximidad de las superficies.

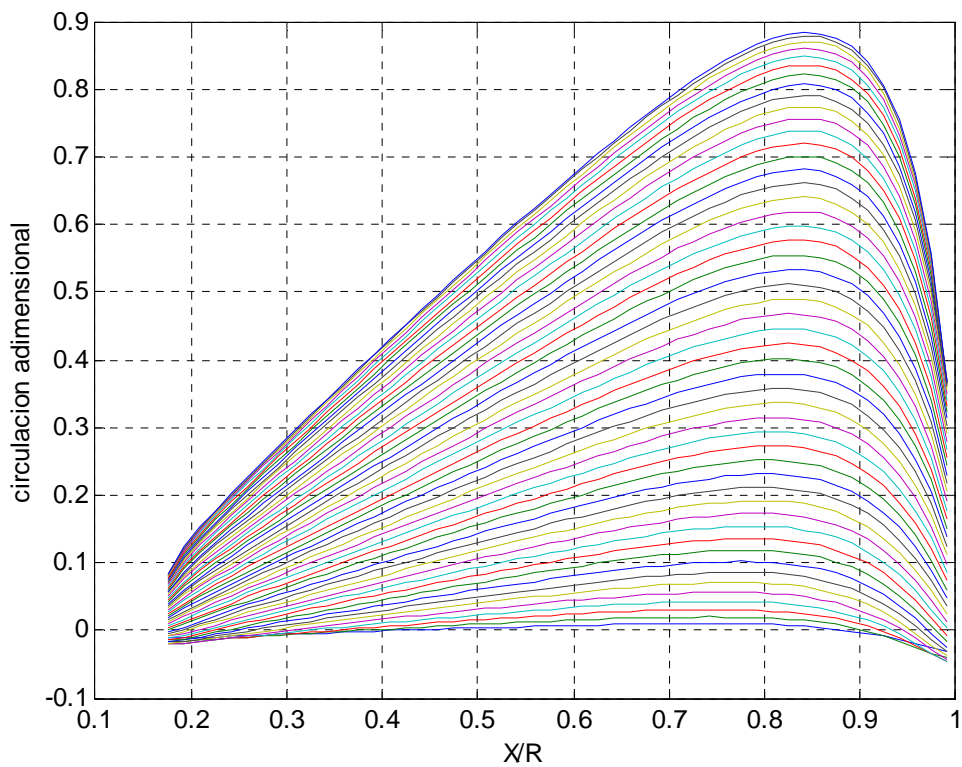


Figura 3.14 Distribución de la circulación adimensional asociada a los paneles de la pala, vista según envergadura

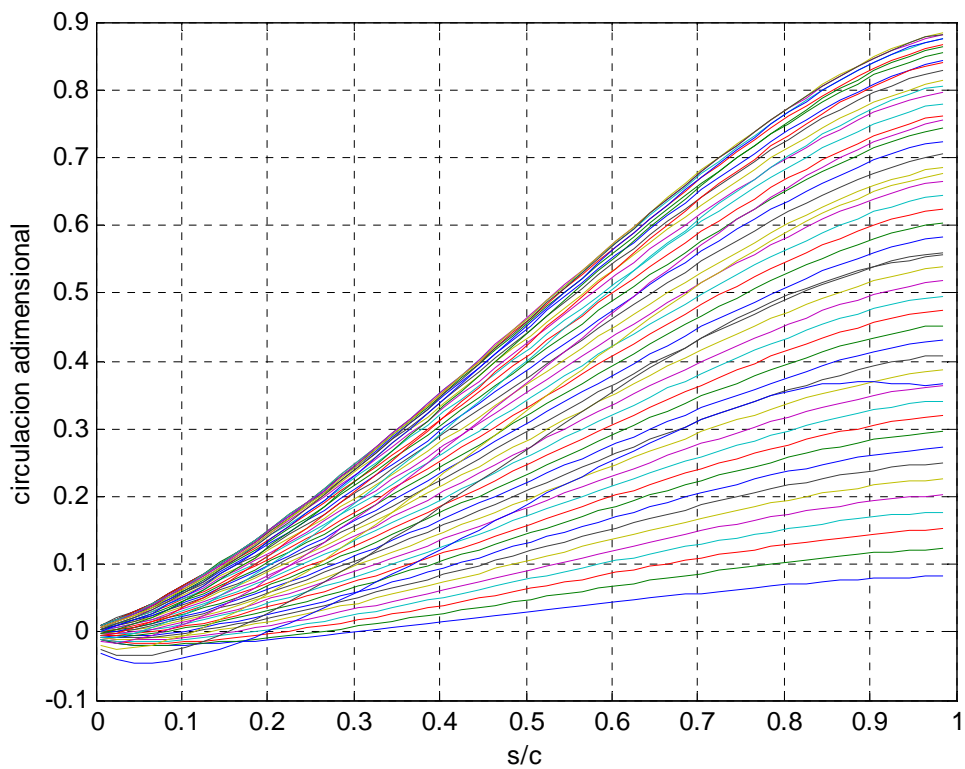


Figura 3.15 Distribución de la circulación adimensional asociada a los paneles de la pala, vista según cuerda

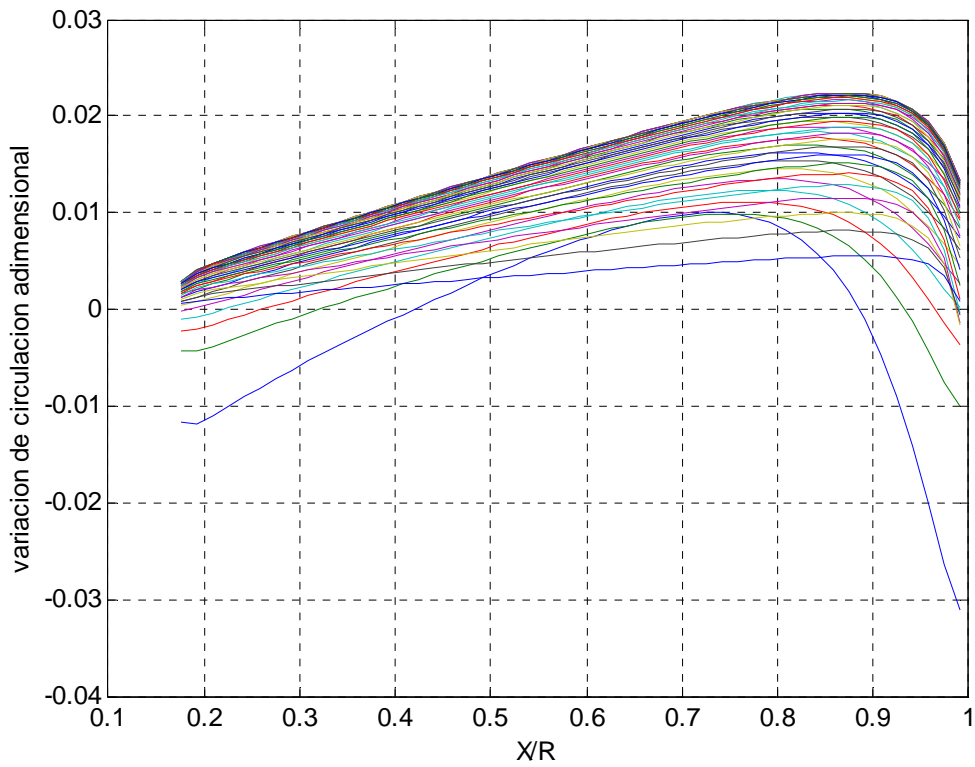


Figura 3.16 Distribución de la variación de circulación adimensional asociada a los paneles de la pala, vista según envergadura

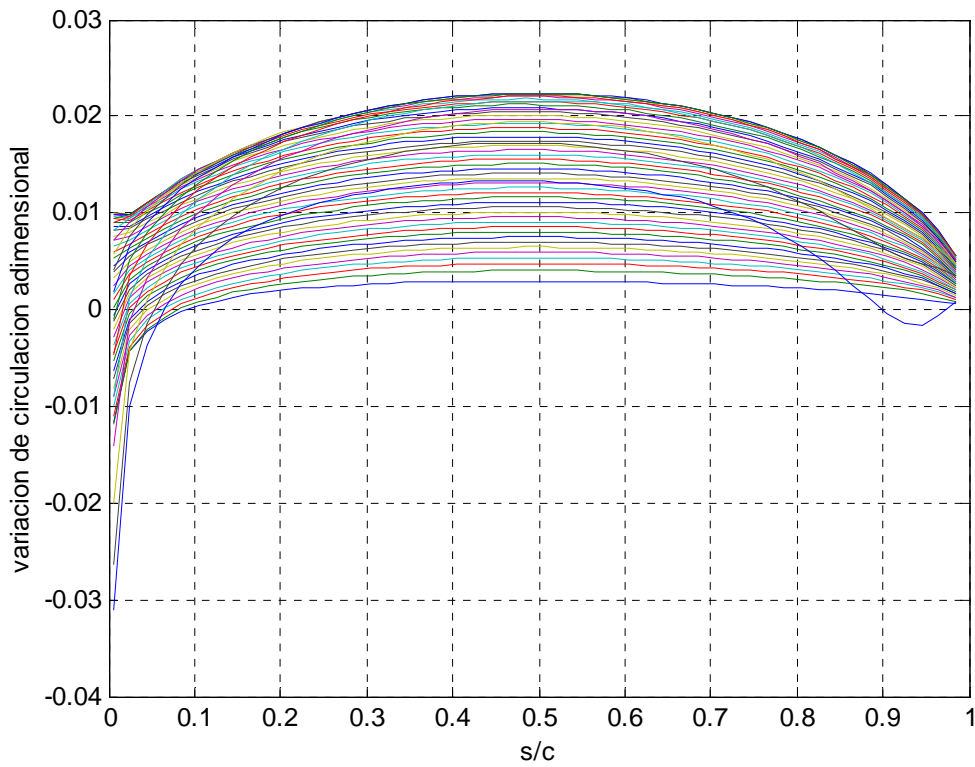


Figura 3.17 Distribución de la variación de circulación adimensional asociada a los paneles de la pala, vista según cuerda

Las Figuras 3.18 a 3.20 muestran las representaciones vectoriales de las velocidades inducidas por el sistema vorticoso ligado y el sistema de la estela, correspondientes a los puntos de colocación de los paneles. Sobre la pala se observa un importante flujo inducido en dirección Z(-) -downwash-, excepto en el caso de los paneles ubicados en el tercio anterior de la pala, donde las velocidades inducidas muestran componentes axiales en dirección Z(+) -upwash-, situación que debe esperarse a partir de la condición de contorno impuesta sobre cada panel, y de la presencia de una circulación general sobre un elemento sustentador.

Por otra parte, en las Figuras 3.21 a 3.23 se representan a los vectores velocidades resultantes, correspondiendo también la ubicación de estos vectores al punto de colocación del panel. Como debería esperarse de la aplicación de la condición de contorno en el punto de colocación, se verifica que sobre cada panel de la pala el vector velocidad resultante es tangente al mismo. Asimismo, se observa el incremento de las velocidades resultantes hacia la punta de la pala, producto del aumento de la velocidad tangencial debida a la rotación.

Una vez conocido el campo de velocidades sobre el hilo ligado al panel y la circulación del mismo, se determinan los vectores fuerza aerodinámica -bajo condiciones invíscidas-, los cuales resultan aplicados en el punto medio de la línea sustentadora del panel, según se muestran en las Figuras 3.24 a 3.27. Lógicamente, esta distribución debe anularse hacia los bordes de la pala, y dado que en esta discretización cada línea sustentadora tiene la misma longitud, la distribución de carga resulta de la combinación de la distribución de velocidades resultantes (las cuales crecen hacia la punta de pala) y de la distribución de circulación (la cual se anula hacia los extremos). Esto se traduce en un incremento de las cargas hacia la punta de pala. Una vez calculadas las fuerzas actuantes sobre cada panel, la determinación de las componentes de la fuerza resultante, de la cupla y la potencia absorbida es inmediata.

Entre los principales resultados que se extraen de la aplicación del método de los paneles se encuentra la determinación de las distribuciones de las presiones sobre la pala, bajo condiciones invíscidas. Estas distribuciones pueden representarse mediante la variación de los coeficientes de presión,  $C_p$ , considerando la distribución de presión adimensionalizada con la presión dinámica local (Gould y Fiddes, 1992), siendo esta última

$$q = \frac{1}{2} \rho [V_0^2 + \Omega^2 (X^2 + Y^2)]. \quad (3.20)$$

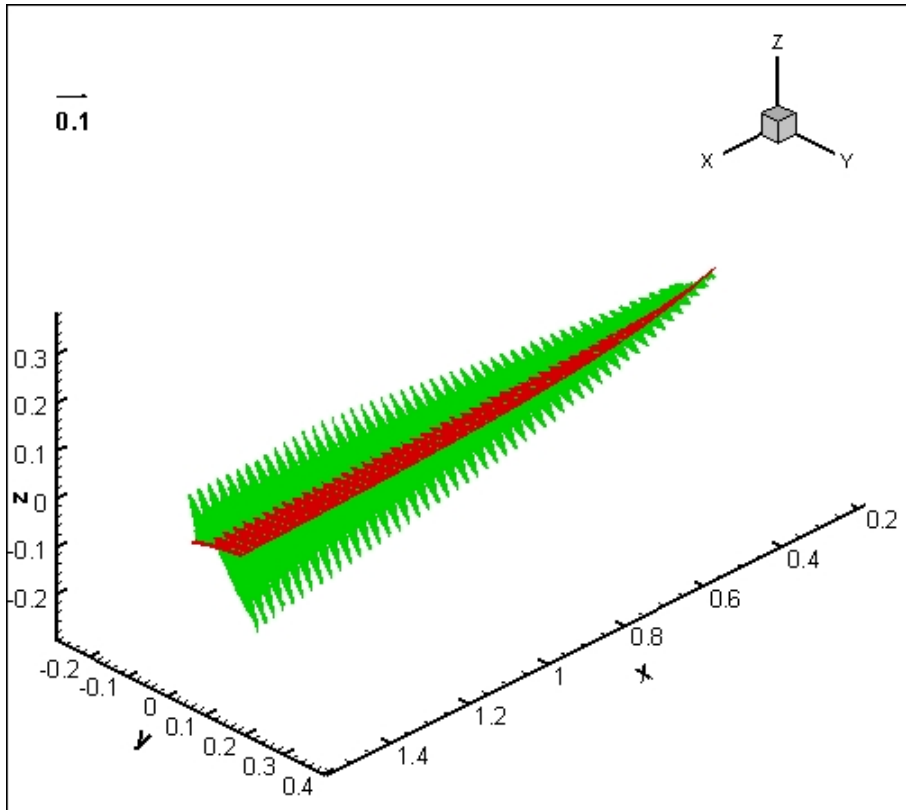


Figura 3.18 Distribución de las velocidades inducidas sobre los paneles (referencia en m/s).

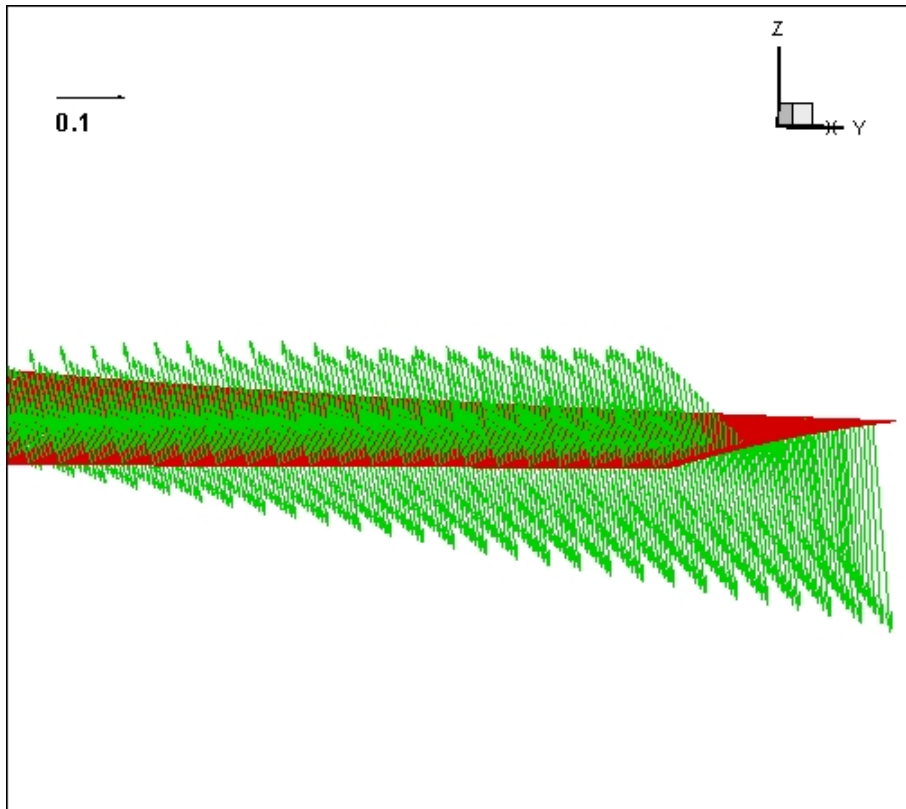


Figura 3.19 Velocidades inducidas, detalle de la punta de pala (referencia en m/s).

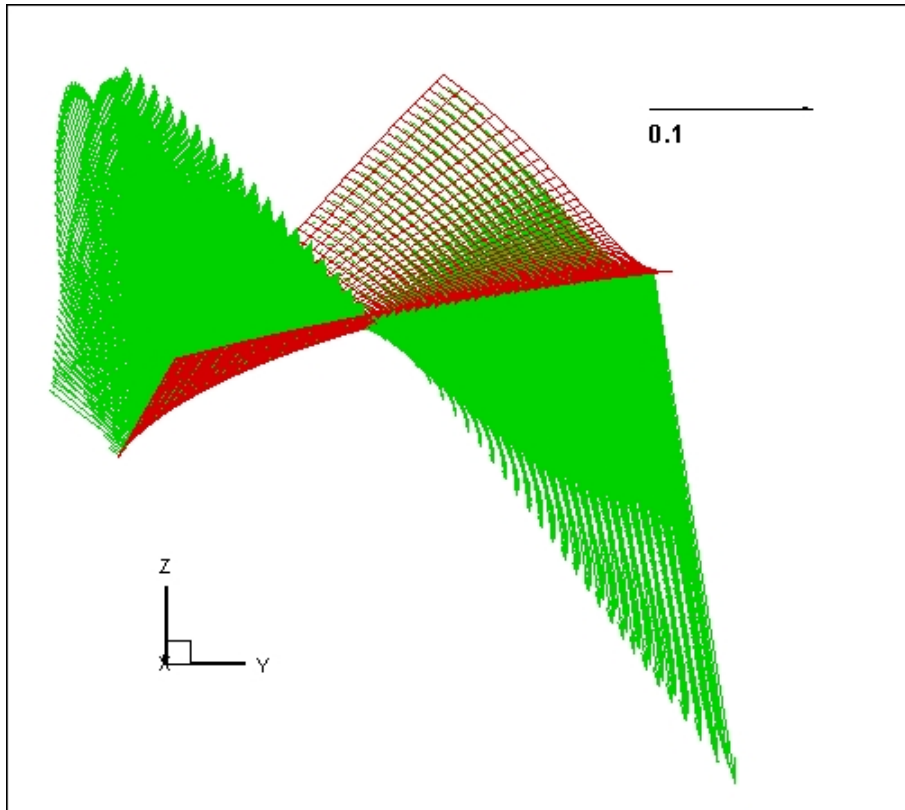


Figura 3.20 Velocidades inducidas, vista desde la punta de pala (referencia en m/s).

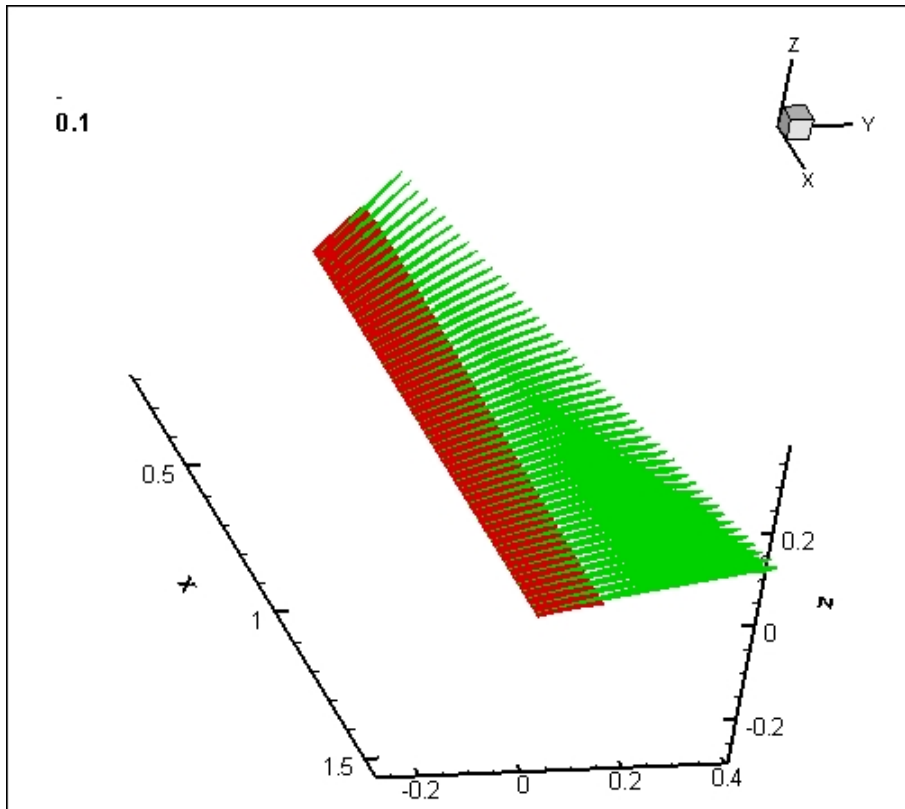


Figura 3.21 Distribución de velocidades resultantes sobre los panales (referencia en m/s).

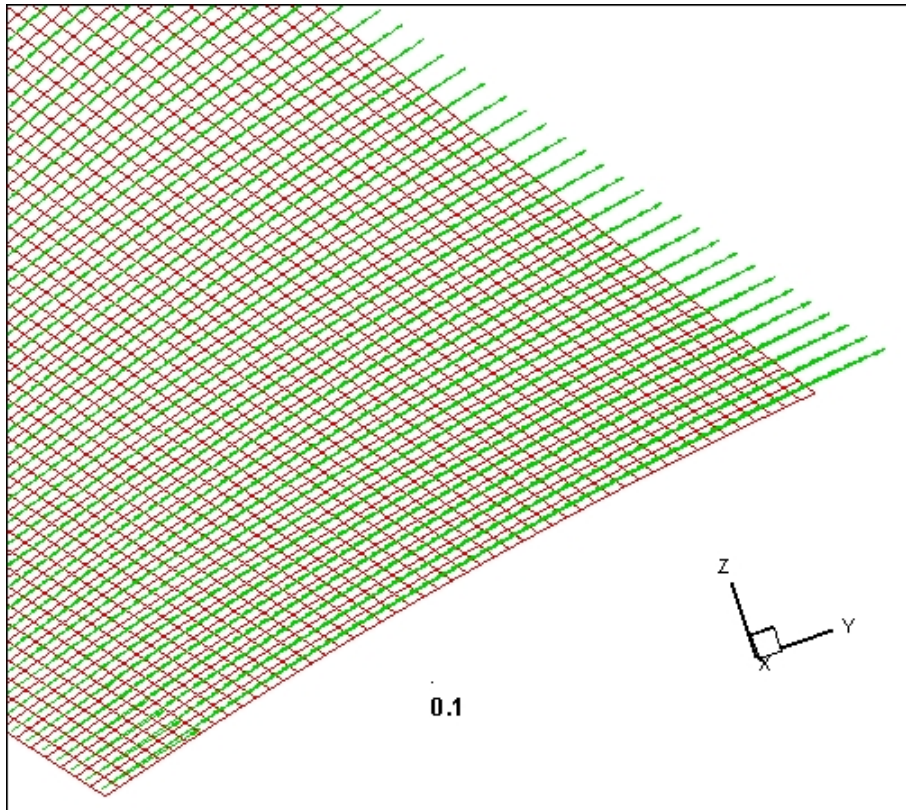


Figura 3.22 Velocidades resultantes, detalle de la punta de pala (referencia en m/s).

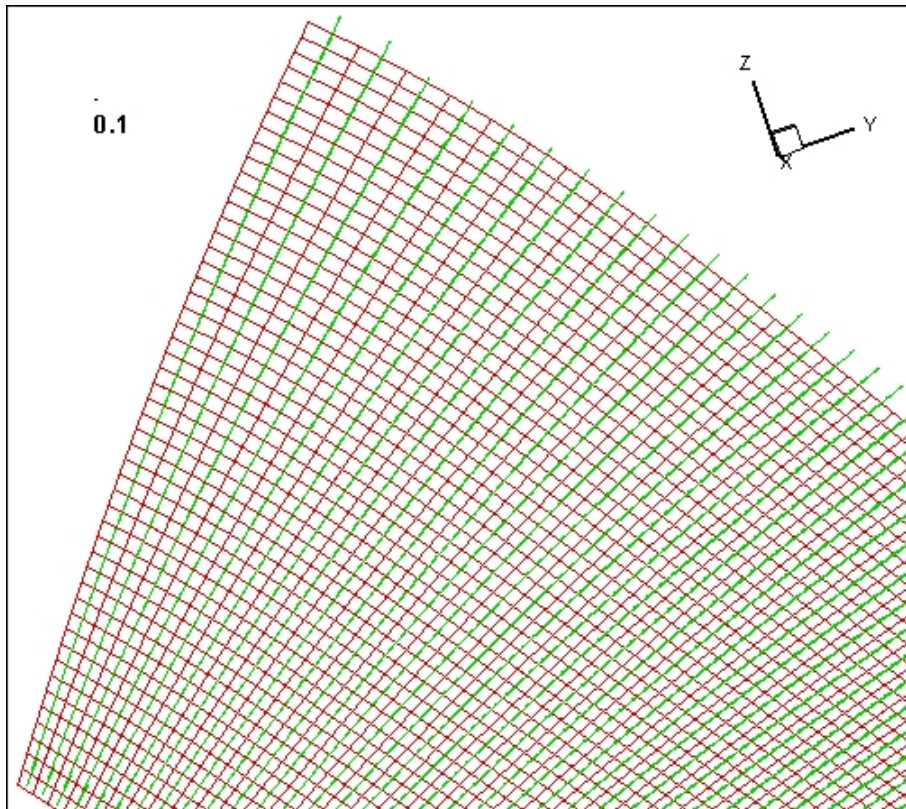


Figura 3.23 Velocidades resultantes, detalle de la raíz de pala (referencia en m/s).

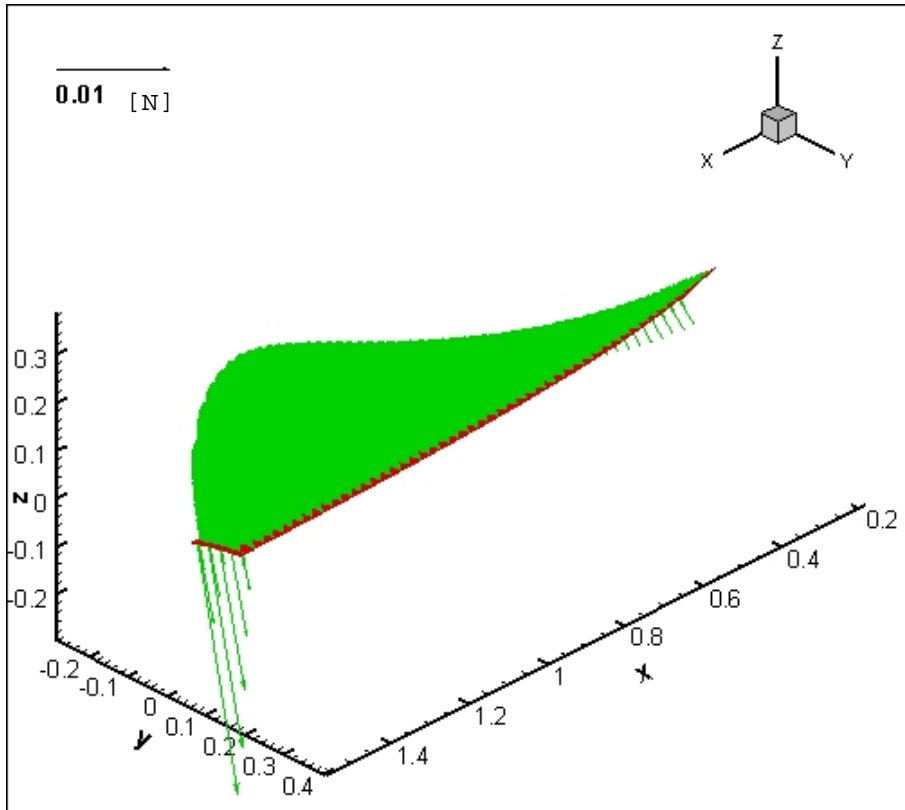


Figura 3.24 Distribución del vector fuerza inviscida, vista desde el borde de fuga de la pala.

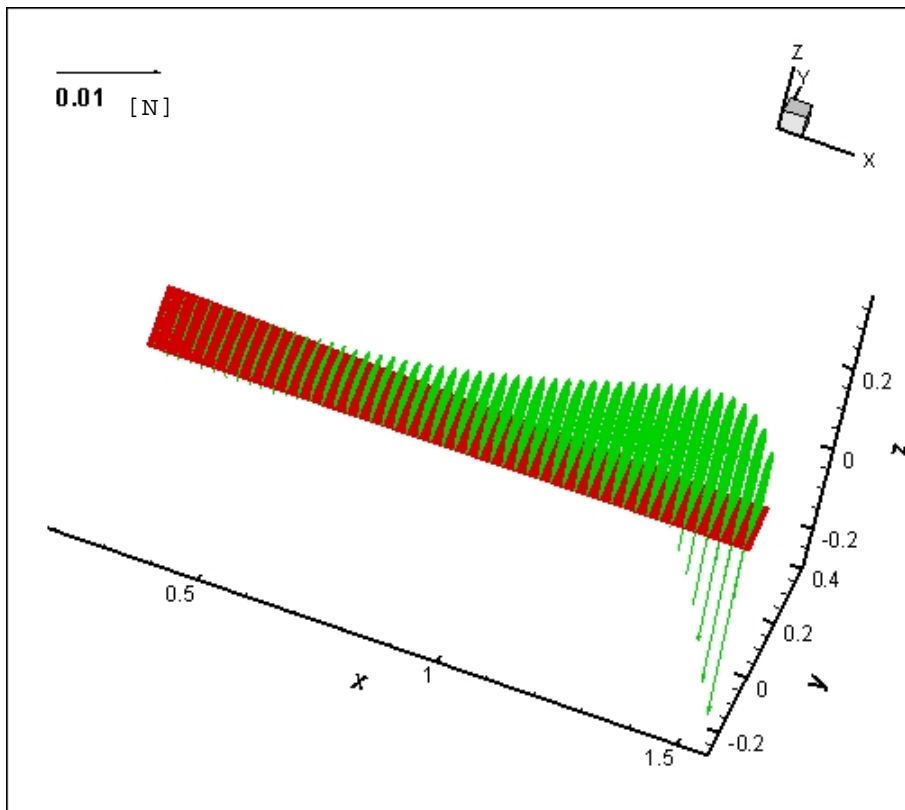


Figura 3.25 Distribución del vector fuerza inviscida, vista desde el borde de ataque de la pala.



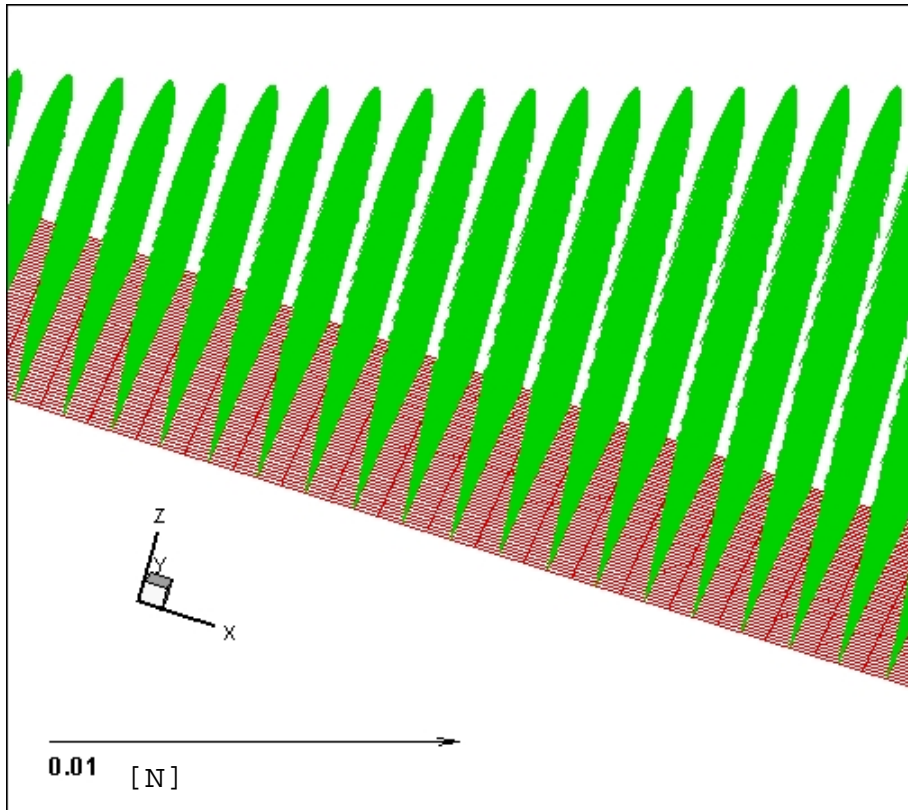


Figura 3.26 Distribución del vector fuerza inviscida, detalle de la porción media de la pala.

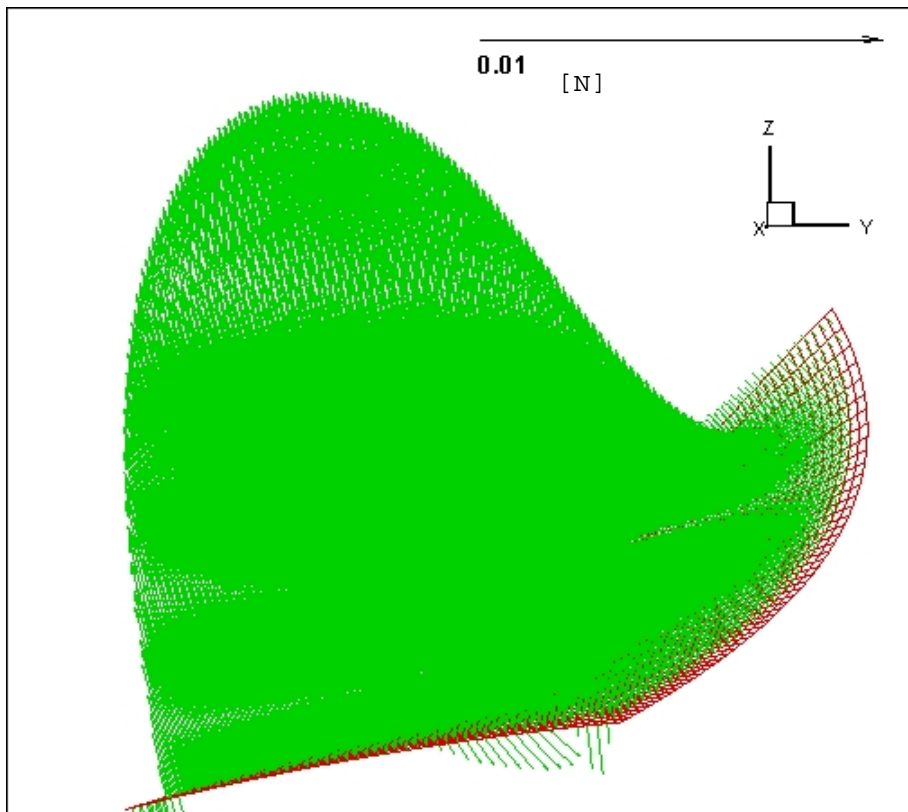


Figura 3.27 Distribución del vector fuerza inviscida, vista desde la punta de la pala.

Resulta entonces un coeficiente de presión local, dado por

$$C_p = 1 - \left( \frac{V_r^2}{V_0^2 + \Omega^2 (X^2 + Y^2)} \right) \quad (3.21)$$

donde  $V_r$  representa el módulo de la velocidad resultante sobre la pala, en la estación de cálculo. La distribución de este coeficiente es mostrada en la Figura 3.28.

Adicionalmente, otros resultados de gran utilidad lo representan los gradientes de presión que se imponen sobre las capas viscosas que se desarrollan sobre las superficies de la pala. Las distribuciones de los gradientes de presión según cuerda y según envergadura se representan, respectivamente, en las Figuras 3.29 y 3.30. Se reconoce en la Figura 3.29 la presencia de un gradiente de presión favorable en la porción  $0 < x/c < 0,5$  y de un gradiente desfavorable en la fracción  $0,5 < x/c < 1,0$  de la pala, el cual puede llegar a producir el desprendimiento de la capa límite si resulta ser lo suficientemente adverso. Por otra parte, los gradientes de presión generados en la dirección de la envergadura, resultan fundamentalmente de equilibrar los efectos de las aceleraciones, centrífuga y de Coriolis, actuantes.

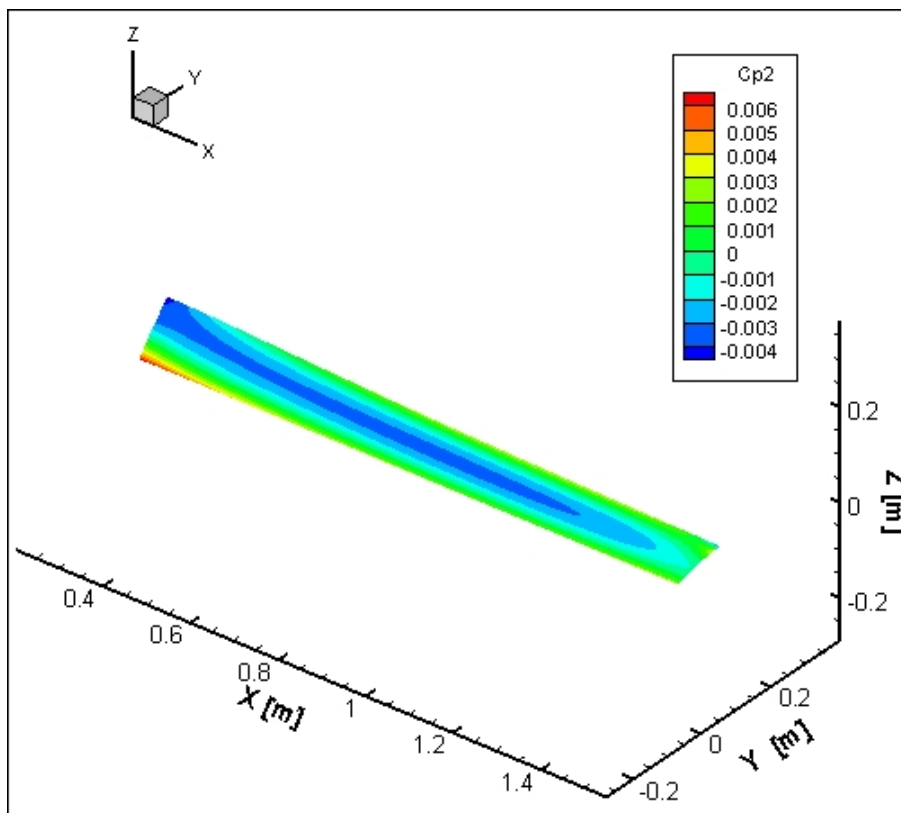


Figura 3.28 Distribución del coeficiente de presión sobre el extradós de la pala.

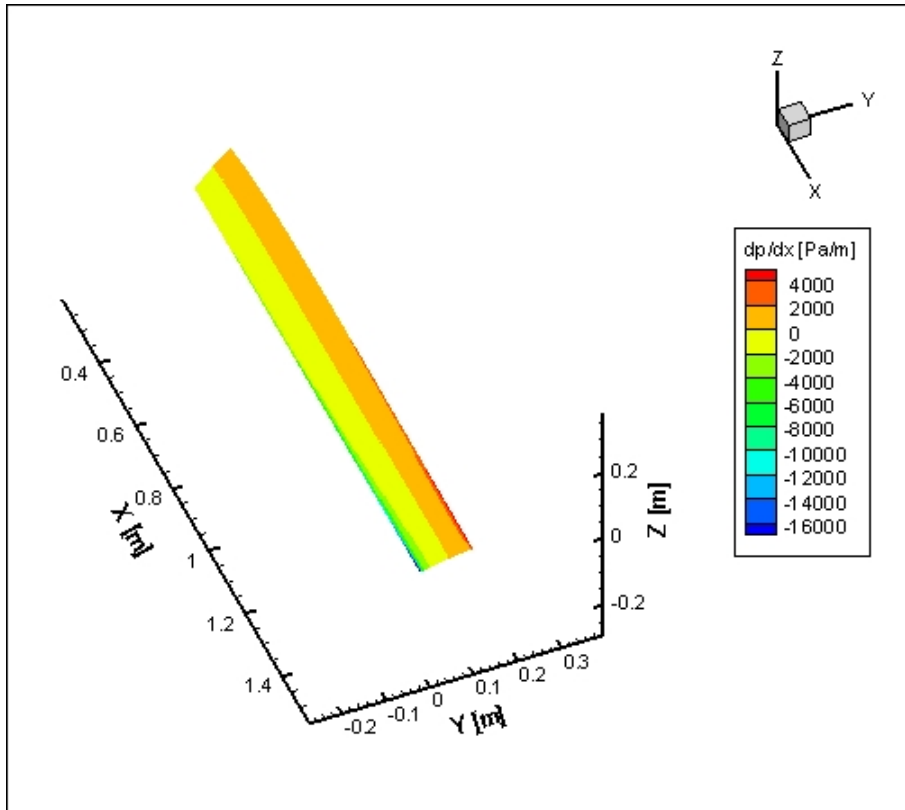


Figura 3.29 Distribución de la componente según cuerda del gradiente de presiones sobre el extradós de la pala.

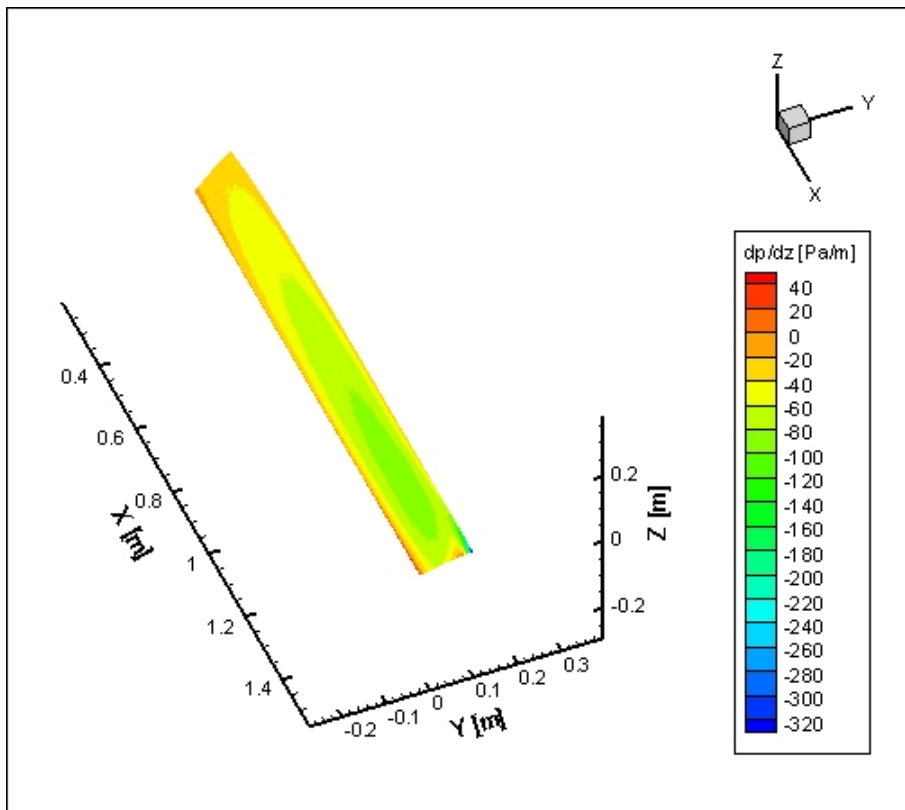


Figura 3.30 Distribución de la componente según envergadura del gradiente de presiones sobre el extradós de la pala.

### 3.4. CONCLUSIONES

El presente modelo permite una representación más real y acabada del comportamiento fluidodinámico de la pala de una turbina eólica de eje horizontal frente a los modelos que contemplan la discretización de la pala mediante paneles distribuidos solamente a lo largo de la envergadura. Características geométricas como la flecha, el ahusamiento, la torsión y la presencia de los extremos en una pala de envergadura finita hacen que los efectos tridimensionales sean relevantes, requiriéndose entonces la representación de las palas mediante paneles adecuadamente distribuidos sobre sus superficies, tanto según envergadura, como según cuerda.

Tratándose de elementos sustentadores de envergadura finita, la representación del campo fluidodinámico alrededor de los mismos requiere de la determinación del campo de velocidades inducido por la presencia de una estela, el cual debe adicionarse al flujo incidente. Si bien este flujo inducido, de características no viscosas, se atenúa lejos de la pala, su presencia en proximidades de la pala define completamente al flujo inviscido alrededor de la misma, y por ende a sus características aerodinámicas, dado que es un campo más a considerar en el cálculo del desarrollo de la capa límite de la pala.

Dado que el presente modelo incluye un tubo de corriente que se expande a medida que atraviesa al rotor, representa una formulación más real del campo fluidodinámico alrededor de una turbina eólica de eje horizontal. Por otra parte, el establecimiento previo de la geometría de una estela fija (en lugar de utilizar métodos que implican mayores complejidades, donde la estela se desarrolla paso a paso y se deforma bajo la acción de sus propias velocidades inducidas) simplifica los cálculos numéricos y reduce los tiempos computacionales.

Si bien se ha considerado la presencia de una única pala, el presente modelo puede incluir los efectos de interferencia mutua entre palas y sus correspondientes estelas. Este modelo más completo sería adecuado para el análisis de las cargas aerodinámicas de las palas y la estimación de la performance de una turbina eólica de eje horizontal, procedimientos tendientes al diseño preliminar del rotor. Un análisis aerodinámico aún más completo incluiría a los efectos viscosos con la determinación de la capa límite tridimensional sobre las palas, una vez determinado el campo fluidodinámico inviscido en proximidad del rotor. El análisis del flujo viscoso será llevado a cabo en el próximo capítulo.

# CAPÍTULO 4

## MODELIZACIÓN DEL FLUJO VISCOSO SOBRE LAS SUPERFICIES DE LA PALA

### 4.1. INTRODUCCIÓN

Como se indicó en el capítulo anterior, en el análisis aerodinámico de turbinas eólicas, el número de Reynolds característico resulta lo suficientemente alto para diferenciar dos zonas en el campo fluidodinámico: una capa delgada próxima a la superficie de las palas donde dominan los efectos de la viscosidad debido a los importantes gradientes de velocidad presente en dicha región, y una amplia zona donde los efectos viscosos pueden ser despreciados cuando son comparados con los efectos inerciales. Consecuentemente, ese flujo puede ser analizado como la superposición de una corriente externa no viscosa y un flujo viscoso definido por la presencia de una capa límite en proximidades de las superficies, lugar donde los efectos de la viscosidad quedan mayormente confinados. Estas dos regiones interactúan, definiendo las cargas aerodinámicas actuantes sobre las palas de la turbina eólica.

A pesar del hecho de que las ecuaciones de un fluido perfecto no conducen a soluciones que satisfacen la condición de no deslizamiento sobre la pared, en el caso de una capa límite muy delgada y adherida, la solución correspondiente al flujo invíscido –en realidad solamente válida fuera de la capa límite- puede ser determinada con error despreciable considerando que la superficie del cuerpo representa el límite exterior de la capa límite.

Dado que el campo de presiones que rodea a los cuerpos es mayormente determinado por el flujo invíscido cuando la corriente está adherida a los mismos, el campo de velocidades bajo condiciones no viscosas debe ser calculado previamente con la finalidad de imponer a dicho campo de presiones sobre la capa límite. Una vez que la distribución de velocidades sobre la superficie del cuerpo ha sido determinado, la misma es aplicada como condición de contorno sobre el límite exterior de la capa viscosa en las denominadas ecuaciones de la capa límite de Prandtl, las cuales resuelven los perfiles de velocidades dentro de la capa viscosa.

Como las ecuaciones de la capa límite deben resolverse considerando las características geométricas de la pala, entonces deben ser escritas en coordenadas curvilíneas generalizadas. Los dos ejes coordenados que describen la superficie tridimensional de la pala se denominan coordenadas de la capa límite.

Una vez que los perfiles de velocidad desarrollados dentro de la capa límite han sido determinados, puede calcularse la distribución de la tensión de corte sobre la pared, y consecuentemente, se puede determinar la fricción viscosa sobre la superficie. Esta última debe ser adicionada a la resistencia inducida, originada por un cuerpo de envergadura no infinita y calculada bajo condiciones invíscidas.

Estos resultados se restringen al desarrollo de una capa límite tridimensional que resulta adherida a la superficie del cuerpo, dado que una separación extensiva de la capa límite sobre la superficie del cuerpo conduce a un gradiente de presiones cuya distribución será diferente de aquél determinado bajo condiciones no viscosas.

## **4.2. ANTECEDENTES**

Tal como lo establecen Zhang y Lakshminarayana (1990), es necesario el desarrollo de técnicas de predicción que puedan resolver flujos en proximidad de superficies para el diseño y el análisis de turbomáquinas. Consecuentemente, las técnicas tipo capa límite resultan esenciales para desarrollar un método rápido y preciso para predecir el comportamiento de las capas viscosas sobre las palas de rotores, las cuales se ven además sujetas a fuerzas centrífugas y de Coriolis.

Los códigos basados en la resolución numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes no serían capaces de resolver eficientemente estas capas viscosas debido a las limitaciones impuestas sobre el mallado. En general, estas soluciones también resultan mucho más costosas en términos de recursos computacionales y si bien son capaces de simular la física de un flujo muy complejo (por ejemplo, en la presencia de flujos con interacción intensa o con separación), presentan una baja capacidad de resolución debido a las restricciones en la cantidad asequible de puntos en la grilla computacional. Por otra parte, su implementación no siempre resulta esencial cuando se trata de análisis y diseño.

En el caso de palas de turbomáquinas, las fuerzas centrífuga y de Coriolis debidas a la rotación, combinadas con los gradientes de presión y las fuerzas viscosas, causan que el flujo resulte tridimensional, aun sin considerar los efectos de una envergadura finita de pala. Dichas fuerzas centrífuga y de Coriolis contribuyen particularmente al desarrollo de la capa límite e influyen su comportamiento, generando un flujo cruzado dentro de la capa viscosa, cuya magnitud depende de la velocidad de rotación y de la geometría del rotor.

En la capa límite, se denomina como componente cruzada del flujo a la componente que se encuentra a ángulos rectos respecto de la dirección de la línea de corriente del flujo exterior, el cual es considerado como no viscoso. Este flujo cruzado también es denominado como transversal o como secundario. La representación esquemática de estas corrientes dentro de la capa límite es mostrada en la Figura 4.1. El flujo transversal causa que la dirección de las líneas de corriente próximas a la superficie se desvíe, a veces considerablemente, de la dirección seguida por la línea de corriente para el flujo del extremo superior de la capa viscosa. Tanto sobre la superficie, como también en el borde superior de la capa límite, ese flujo cruzado es nulo.

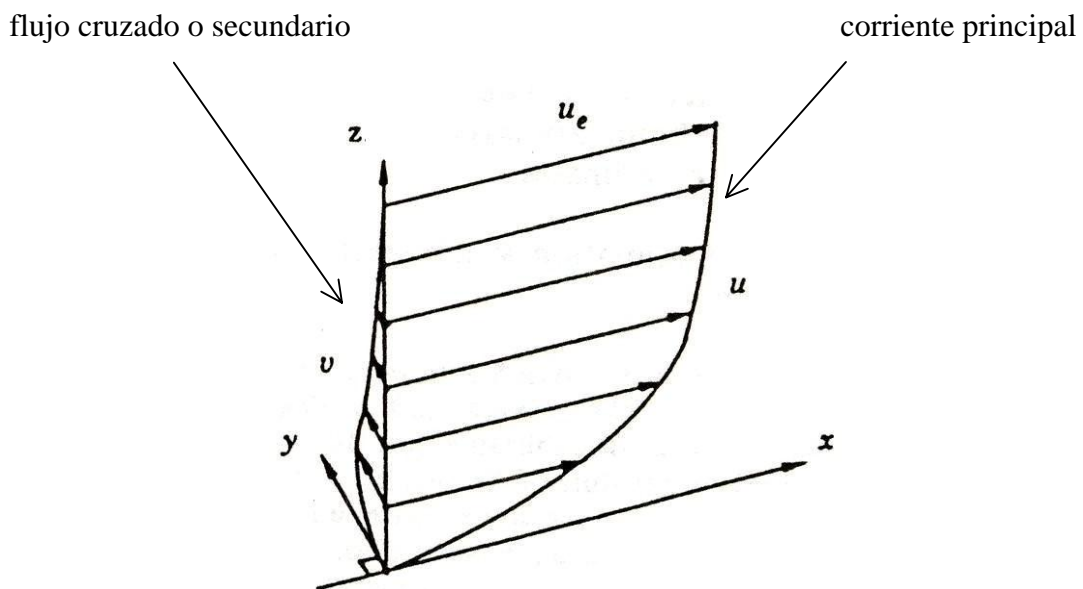


Figura 4.1 Representación esquemática de los flujos principal y cruzado (también denominado secundario) en una capa límite tridimensional.

Con la necesidad de desarrollar técnicas mejoradas que puedan proveer una detallada resolución de los efectos viscosos tridimensionales próximos a la superficie de las palas de las turbinas, se aplica entonces el concepto de aproximación zonal (Anderson, 1985), considerando la existencia de una delgada región próxima a las superficies, dominada por las fuerzas de presión, las fuerzas viscosas y las fuerzas de Coriolis, y donde resultan válidas las hipótesis de la teoría de la capa límite. Este análisis zonal requiere de los siguientes tres análisis: la construcción de un sistema coordenado general no ortogonal, el cálculo de las condiciones de contorno para la capa viscosa a partir de una distribución conocida de las presiones estáticas, y la resolución de las ecuaciones de la capa límite tridimensional para la predicción del crecimiento de la capa viscosa bajo las condiciones de flujo prescritas.

Las ecuaciones de la capa límite tridimensional han sido estudiadas numéricamente por varias décadas, período durante el cual la capacidad de obtener soluciones numéricas ha avanzado desde resolver ecuaciones para perfiles semejantes sobre formas geométricamente simples hasta la actual posibilidad de resolver las ecuaciones para los perfiles no semejantes sobre una configuración geométrica compleja.

Por otra parte, muchas técnicas previas destinadas a la predicción del desarrollo de las capas límites tridimensionales sobre las palas de turbomáquinas se basaban en técnicas integrales o en el supuesto de que el flujo cruzado sea pequeño, con lo cual desacoplaban las dos ecuaciones para la cantidad de movimiento.

Asimismo, como lo reconocen Cebeci et al. (1981), si bien la mayoría de los problemas concernientes a capas límites se corresponden con capas viscosas turbulentas donde la transición tiene lugar prontamente, es importante para el estudio de estos problemas procurar una metodología precisa para la determinación de la capa límite laminar que se genera hasta que tiene lugar la transición a capa límite turbulenta.

Entre los primeros intentos de resolver una capa límite tridimensional sobre una superficie en rotación se encuentra el trabajo de Fogarty (1951) quien consideró el caso de una capa límite laminar desarrollada sobre una placa plana que rota en su plano, alrededor de un eje de rotación perpendicular a su borde de ataque. La solución presentada resulta válida en una región alejada del eje de rotación, por lo cual este modelo analiza solamente lo que equivaldría a una porción de pala de envergadura infinita que se encuentra a varias longitudes de cuerda de distancia desde su eje de rotación. En su simplificación, resulta válido el principio de independencia con respecto a los flujos según cuerda y según envergadura.



Consecuentemente, las ecuaciones del movimiento resultan tales que la componente de velocidad según cuerda resulta independiente de la componente según envergadura originada por la rotación, y entonces la línea de separación no resulta afectada por dicha rotación. Por otra parte, esta teoría no es válida más allá de la línea de separación laminar.

Posteriormente, Tan (1953) extendió el trabajo de Fogarty presentando una solución mediante series, la cual resultaba válida en la región próxima al eje de rotación.

Dado que la pala de la turbomáquina axial está torsionada de tal modo que el ángulo de ataque tiene un valor especificado, variando generalmente a lo largo de la envergadura, el siguiente paso de análisis resultó la modelación de la pala mediante superficies alabeadas simples, como ser la superficie helicoidal.

Así, Miyake y Fujita (1974) evaluaron el desarrollo de la capa límite laminar sobre una pala delgada de una turbomáquina axial, representada mediante una superficie helicoidal, sin carga, embestida por una corriente uniforme. En este análisis la pala rotante se encuentra torsionada alrededor del borde de ataque, de tal modo que el ángulo de ataque resulta nulo a lo largo de todo el borde de ataque. Asimismo, asumieron que la pala era infinitamente larga y no consideraron el efecto del cubo sobre el flujo en la capa límite. Con la finalidad de analizar los efectos tridimensionales, adoptaron una configuración de pala helicoidal bajo una velocidad constante sobre cada elemento de pala, siendo entonces la distribución de presiones constante en todo el campo fluidodinámico. El sistema coordenado curvilíneo utilizado era ortogonal solamente sobre la superficie de la pala. La técnica empleada se basó en la obtención de una solución en series, compuesta por grupos de funciones similares.

El modelo de pala helicoidal fue también adoptado por Morris (1981), quien describió el desarrollo de una capa límite laminar sobre una pala helicoidal torsionada, en rotación, donde la selección de la geometría y las condiciones de la corriente libre se establecieron de modo que resultara un flujo a incidencia nula en el borde de ataque y con una distribución de presiones constante sobre la pala. Las ecuaciones de la capa límite fueron resueltas utilizando una doble expansión en series de potencias de la distancia medida desde el borde de ataque y del coseno del ángulo de torsión, determinando los perfiles de velocidades según cuerda y según envergadura y la variación del coeficiente de fricción sobre la superficie. Las ecuaciones de gobierno fueron planteadas en un sistema coordenado ortogonal, rotante, definido sobre la superficie de la pala. Mediante la introducción de las definiciones de las funciones de corriente para el flujo primario y para el flujo cruzado, arribó a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias que fueron resueltas numéricamente.

Desarrollos posteriores han considerado efectos tales como los gradientes de presión, la curvatura o la compresibilidad, si bien la incorporación de estos factores no han alterado el entendimiento alcanzado del comportamiento del flujo viscoso tridimensional mediante el estudio de los modelos más simplificados.

Tal como se ha establecido, primeramente se derivaron las ecuaciones de la capa límite tridimensional en sistemas coordenados ortogonales. Sin embargo, tal tipo de sistema coordenado es difícil de construir para describir una superficie arbitraria como la que corresponde a la pala de un turbina, la cual incluye curvatura y alabeo. Consecuentemente, y tal como lo establece Anderson (1985) en su trabajo, es deseable proponer un sistema coordenado curvilíneo no ortogonal, donde dos coordenadas yacen sobre la superficie de la pala y la tercera coordenada resulta normal a las coordenadas de la superficie (y por ende, a la propia superficie). Debido a la rotación de las palas, otro requerimiento del sistema coordenado es que deba también rotar, de manera que la fuerzas aparentes (fuerza de Coriolis y centrípeta) aparezcan explícitamente en las ecuaciones de la capa límite. Por otra parte, propone que las condiciones de contorno sobre el borde externo de la capa viscosa sean obtenidos directamente a partir de datos experimentales o de resultados numéricos a partir de las ecuaciones de Euler. La técnica empleada por Anderson se basó en representar el conjunto de ecuaciones de gobierno en un sistema de ecuaciones en diferencias, acoplado y cuasilinelizado, el cual fue resuelto mediante un procedimiento iterativo.

Si bien no resulta aplicada a palas rotantes, la metodología presentada por Wie y Harris (1991) -que fuera especialmente diseñada para configuraciones tipo fuselaje- se basa en la resolución numérica de las ecuaciones de la capa límite tridimensional mediante un procedimiento basado en la técnica de las diferencias finitas, con un esquema que resulta independiente, desde el punto de vista de la estabilidad, de la dirección del flujo cruzado. Los sistemas coordenados curvilíneos utilizados son tanto un sistema no ortogonal definido a través de la configuración del fuselaje, como el sistema coordenado ortogonal definido por las líneas de corriente del flujo potencial sobre dicho cuerpo. Como los autores lo aseveran, cada sistema coordenado tiene sus particulares ventajas y desventajas. El primero es óptimo desde el punto de vista de la generación de la malla y del control del espaciado de dicha grilla, resultando también más práctico desde el punto de vista de la interrelación con el flujo invíscido, el cual es generalmente calculado en un sistema coordenado definido a través de la geometría del cuerpo. Por otra parte, el sistema curvilíneo basado en las líneas de corriente

invíscidas es ortogonal y tiene la ventaja de presentar valores nulos para el flujo cruzado tanto sobre la superficie del cuerpo como sobre el límite exterior de la capa viscosa. Sin embargo, este sistema resulta dependiente del ángulo de ataque del cuerpo, y la distribución de líneas en la malla, así como el espaciado entre ellas, es difícil, si no imposible, de controlar.

En otro enfoque del problema, Mughal y Drela (1993) desarrollaron un método numérico para la resolución de las ecuaciones de la capa límite tridimensional, en forma integral, para mallas no ortogonales. Una interpolación mediante *cubic-splines* fue implementada para suavizar los valores medidos de velocidad de la corriente exterior.

Por su parte, Karimipannah y Olsson (1993) investigaron los efectos de la rotación y de la compresibilidad sobre las capas límites de las palas de compresores transónicos. Para ello, adoptaron un sistema coordenado cuasi-ortogonal, a lo largo del sistema de líneas de corriente, del flujo externo. Dicho sistema se encuentra fijo a la superficie de la pala y rota con la misma. Las ecuaciones de la capa límite son integradas, con la finalidad de determinar la variaciones del espesor de cantidad de movimiento y el coeficientes de fricción de la capa viscosa.

Asvapoositkul y Zangeneh (1998) presentaron asimismo un método para la determinación de capas límites tridimensionales en álabes de turbomáquinas. Mediante una aproximación en diferencias finitas en un sistema coordenado curvilíneo fijo a las palas, las ecuaciones de la capa límite no estacionaria fueron resueltas en el tiempo, hasta alcanzar la solución correspondiente al estado de régimen permanente. En el sistema de ecuaciones de gobierno, todos los factores de escala se calcularon sobre la superficie de la pala. Las ecuaciones de la capa límite fueron resueltas en un sistema coordenado curvilíneo no-ortogonal, donde dos coordenadas se ubican sobre la pared, mientras que la tercera coordenada representa la distancia medida normalmente desde la superficie. En la modelación numérica utilizada, las derivadas espaciales en direcciones paralelas a la superficie presentes en las ecuaciones de cantidad de movimiento fueron discretizadas mediante un operador contra-corriente (*upwind*) explícito, de segundo orden, mientras que las derivadas espaciales normales a la pared se utilizó un operador implícito, de segundo orden, representado por un esquema en diferencias centrales.

### 4.3. FORMULACIÓN MATEMÁTICA

#### 4.3.1. Ecuaciones generales del movimiento. Definición del sistema de coordenadas.

Las ecuaciones que gobiernan el flujo laminar, isotérmico y estacionario de un fluido newtoniano sobre una pala en rotación, en donde se desprecian los efectos gravitatorios y de compresibilidad, son mostradas en el sistema (4.1-2). Dicho sistema está representado por ecuación de continuidad (4.1) y por la ecuación de la cantidad de movimiento (4.2):

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{V}) = 0 \quad (4.1)$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{V})\vec{V} + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p - \nu\nabla^2\vec{V} + 2\vec{\Omega} \times \vec{V} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = 0 \quad (4.2)$$

donde  $\vec{V}$  es el vector velocidad relativa con respecto a la terna no inercial,  $\vec{\Omega}$  es el vector velocidad angular relativo al sistema inercial,  $\vec{r}$  denota las posiciones de las partículas relativas a la terna móvil, y siendo  $\rho$  y  $\nu$ , respectivamente, la densidad y la viscosidad cinemática del fluido, las cuales son asumidas constantes. El término  $2\vec{\Omega} \times \vec{V}$  es denominado aceleración de Coriolis y el término  $\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$  representa a la aceleración centrípeta.

En el presente problema, el sistema coordenado rotante, el cual se encuentra fijo a la pala en rotación, está representado por  $(X^1, X^2, X^3) = (X, Y, Z)$ , donde  $Z(+)$  coincide con la dirección del viento y el eje de rotación de la turbina,  $X(+)$  está definido a lo largo del borde de ataque de la pala, y la definición de  $Y(+)$  resulta a partir de la definición de un sistema coordenado ortogonal derecho. En este sistema coordenado, denominado *global*, los versores se encuentran definidos por  $\{\hat{i}_1; \hat{i}_2; \hat{i}_3\} = \{\hat{e}_x; \hat{e}_y; \hat{e}_z\}$ . En el sistema *global* ortogonal, los vectores velocidad y posición se definen mediante

$$\vec{V}(X, Y, Z) = V^1\hat{i}_1 + V^2\hat{i}_2 + V^3\hat{i}_3 = U\hat{e}_x + V\hat{e}_y + W\hat{e}_z \quad (4.3)$$

$$\vec{r} = X^1\hat{i}_1 + X^2\hat{i}_2 + X^3\hat{i}_3 = X\hat{e}_x + Y\hat{e}_y + Z\hat{e}_z \quad (4.4)$$

Por otra parte, y debido a la naturaleza del presente problema, se define asimismo un sistema coordenado curvilíneo. Este último, denominado *local*, es representado por una terna adherida a la superficie de la pala, por lo cual no resulta necesariamente ortogonal. Este sistema está definido genéricamente por  $(x^1, x^2, x^3)$ .

Los sistemas coordenados *global* y *local* se encuentran esquematizados en la Figura 4.2.

La relación entre las bases de los sistemas local y global esta dada en la ecuación (4.5), en donde  $\{\bar{g}_1; \bar{g}_2; \bar{g}_3\}$  representa la base natural (o vectores base covariantes) del sistema curvilíneo *local*, los cuales no son necesariamente unitarios. En particular, en el sistema *local*, los versores están representados por  $\{\hat{e}_1; \hat{e}_2; \hat{e}_3\}$ .

$$\bar{g}_i = \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \hat{i}_j = [b_{ij}] \hat{i}_j \quad \text{i.e.,} \quad \begin{Bmatrix} \bar{g}_1 \\ \bar{g}_2 \\ \bar{g}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial x^1} & \frac{\partial X^2}{\partial x^1} & \frac{\partial X^3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial X^1}{\partial x^2} & \frac{\partial X^2}{\partial x^2} & \frac{\partial X^3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial X^1}{\partial x^3} & \frac{\partial X^2}{\partial x^3} & \frac{\partial X^3}{\partial x^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{i}_2 \\ \hat{i}_3 \end{Bmatrix}. \quad (4.5)$$

A partir del análisis tensorial, Malvern (1969) y Aris (1962), resultan las siguientes componentes del tensor métrico covariante,

$$g_{ij} = \bar{g}_i \cdot \bar{g}_j = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial X^n}{\partial x^i} \frac{\partial X^n}{\partial x^j} \quad (i = 1,2,3) \quad (j = 1,2,3) \quad (4.6)$$

siendo los versores

$$\hat{e}_i = \frac{\bar{g}_i}{\sqrt{g_{ii}}} = \frac{\bar{g}_i}{h_i} \quad (i = 1,2,3) \quad h_i = \sqrt{g_{ii}} \quad (\text{no sumar}), \quad (4.7)$$

donde  $h_1, h_2$  y  $h_3$  denotan los factores de escala, siendo también denominados *métricos*.

En el sistema curvilíneo resulta

$$\vec{V} = v^1 \bar{g}_1 + v^2 \bar{g}_2 + v^3 \bar{g}_3 = u^1 \hat{e}_1 + u^2 \hat{e}_2 + u^3 \hat{e}_3 \quad (4.8)$$

donde las  $v^i$  representan las componentes contravariantes y las  $u^i$  representan las componentes físicas del vector velocidad en el sistema coordenado curvilíneo, siendo

$$v^i = \frac{u^i}{\sqrt{g_{ii}}} = \frac{u^i}{h_i} \quad (\text{no sumar}). \quad (4.9)$$

Por otra parte, la relación entre las componentes contravariantes del vector velocidad en el sistema curvilíneo *local* y las mismas en el sistema ortogonal *global*, están dadas por

$$v^i = [a_{ij}]^T V^j = [a_{ji}] V^j \quad [a_{ij}] = [b_{ij}]^{-1}. \quad (4.10)$$

Particularmente, en el siguiente análisis,  $x^1$  representará la coordenada según envergadura,  $x^2$  la coordenada según cuerda, y  $x^3$  la coordenada que se dirige desde la superficie de la pala hacia el flujo, tal como se muestran en la Figura 4.2. Las componentes de los vectores posición y velocidad en el sistema curvilíneo se redefinen como

$$\begin{cases} x \equiv x^2 \\ y \equiv x^3 \\ z \equiv x^1 \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{e}_x \equiv \hat{e}_2 \\ \hat{e}_y \equiv \hat{e}_3 \\ \hat{e}_z \equiv \hat{e}_1 \end{cases} \quad \begin{cases} u \equiv u^2 \\ v \equiv u^3 \\ w \equiv u^1 \end{cases} . \quad (4.11)$$

Con la presente redefinición, la dirección  $x$  es definida sobre la superficie del perfil, dirigida desde el borde de ataque al borde de fuga de la sección alar, en correspondencia con la componente  $u$  de la velocidad. La dirección  $z$  apunta a lo largo de la envergadura, dirigida hacia la punta de la pala, en correspondencia con la velocidad  $w$ . Finalmente, la dirección  $y$  representa la dirección saliente desde la superficie, sobre la cual se define la componente  $v$  del vector velocidad. Es justamente, a partir de esta definición, que la coordenada  $y$  resulta relacionada con el espesor de la capa límite. De las definiciones dadas, resulta

$$\vec{V} = w \hat{e}_1 + u \hat{e}_2 + v \hat{e}_3 = w \hat{e}_z + u \hat{e}_x + v \hat{e}_y. \quad (4.12)$$

#### 4.3.2. Ecuaciones de la capa límite laminar y estacionaria en coordenadas curvilíneas no-ortonormales

Bajo las condiciones usuales de análisis de los órdenes de magnitud de las variables del problema, Schlichting (1972) y Panton (1984), la capa viscosa es considerada muy delgada cuando resulta comparada con las distancias según cuerda y envergadura sobre las cuales se desarrolla, resultando

$$\begin{aligned} O(v) \ll O(\sqrt{u^2 + w^2}) \\ O\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) > O\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \quad O\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) > O\left(\frac{\partial}{\partial z}\right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

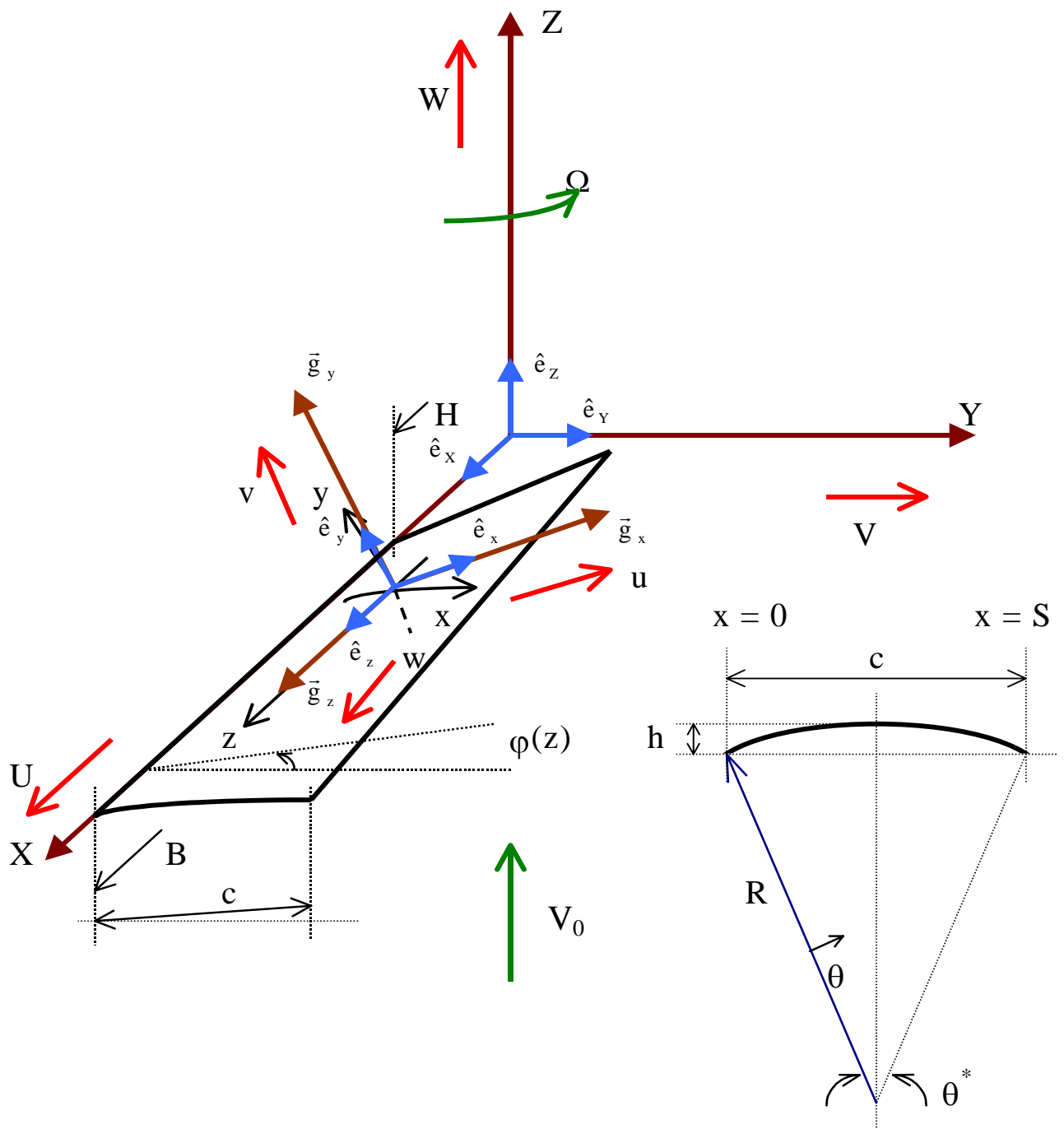


Figura 4.2 Geometría de la pala y sistemas coordenados global y local.

Entonces, a partir del análisis de órdenes de magnitud del sistema de ecuaciones (4.1-4.2), previa transformación de las mismas mediante la aplicación de un dominio en coordenadas curvilíneas generalizadas, resultan las expresiones (4.14) a (4.16) de las ecuaciones de gobierno, las cuales presentan una formulación semejante a las dadas por Anderson (1985) y Karimipannah y Olsson (1993) y cuyos pasos de obtención se encuentran desarrollados en el Apéndice 2.

Se destaca que:

- (i) se considera la capa límite en un flujo tridimensional, laminar, isotérmico y estacionario de un fluido viscoso de tipo newtoniano,
- (ii) el sistema de ecuaciones (4.14-4.16) es expresado en componentes físicas contravariantes en un sistema coordenado curvilíneo generalizado solidario con la pala rotante,
- (iii) las ecuaciones que describen la conservación de cantidad de movimiento retienen las aceleraciones convectiva, centrípeta y de Coriolis, el gradiente de presión y el laplaciano de la velocidad,
- (iv) por generalizado se entiende un sistema coordenado cuya base no es ortonormal, siendo el coeficiente métrico  $g_{12} \neq 0$ , ni homogénea y
- (v) por homogénea se entiende una base cuya orientación en el espacio euclídeo  $R^3$  es constante.

Así, estas ecuaciones de gobierno son:

*Ecuación de continuidad:*

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial v}{\partial y} + w K_{10} + u K_{20} = 0 \quad (4.14)$$

*Ecuación para la cantidad de movimiento según envergadura (z):*

$$\begin{aligned} & \frac{w}{h_1} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{h_2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{v}{h_3} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{w_{NV}}{h_1} \frac{\partial w_{NV}}{\partial z} - \frac{u_{NV}}{h_2} \frac{\partial w_{NV}}{\partial x} + \\ & + (ww - w_{NV}w_{NV})K_{111} + (wu - w_{NV}u_{NV})K_{121} + (uu - u_{NV}u_{NV})K_{221} - \\ & - 2\sqrt{\frac{g_{33}}{g_0}} [g_{12}(w_{NV} - w) + h_1h_2(u_{NV} - u)](h_3a_{33}\Omega) - \frac{v}{g_{33}} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$



Ecuación para la cantidad de movimiento según cuerda ( $x$ ):

$$\begin{aligned} & \frac{w}{h_1} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{u}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{h_3} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{w_{NV}}{h_1} \frac{\partial u_{NV}}{\partial z} - \frac{u_{NV}}{h_2} \frac{\partial u_{NV}}{\partial x} + \\ & + (ww - w_{NV}w_{NV})K_{112} + (wu - w_{NV}u_{NV})K_{122} + (uu - u_{NV}u_{NV})K_{222} - \\ & - 2\sqrt{\frac{g_{33}}{g_0}} [h_1 h_2 (w - w_{NV}) + g_{12} (u - u_{NV})] (h_3 a_{33} \Omega) - \frac{v}{g_{33}} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde  $\Omega$  denota a la velocidad angular de la turbina. El gradiente de presión se encuentra ya incluido en las ecuaciones de la cantidad de movimiento dado que es impuesto por el flujo no viscoso. Particularmente, el gradiente es resuelto a partir de las ecuaciones generales para la cantidad de movimiento bajo la condición que, sobre el borde externo de la capa límite,

$$\frac{\partial u}{\partial y} \cong 0 \quad \frac{\partial w}{\partial y} \cong 0 \quad (4.17)$$

y sabiendo que

$$\vec{V}_{NV} = w_{NV} \hat{e}_z + u_{NV} \hat{e}_x + v_{NV} \hat{e}_y \quad (4.18)$$

representa la velocidad del flujo invíscido sobre el borde superior de la capa viscosa, en el sistema coordenado curvilíneo, donde el subíndice NV corresponde a *no viscoso*.

Los coeficientes que aparecen en las ecuaciones (4.14) a (4.16), los cuales consideran las características geométricas de las secciones de pala y actúan como símbolos de Christoffel, resultan,

$$K_{10} = \frac{g_{33}}{g_0} \left\{ \left[ (h_2)^2 - \frac{g_0}{g_{33}} \frac{1}{(h_1)^2} \right] \frac{\partial h_1}{\partial z} - \frac{g_{12}}{h_1} \frac{\partial g_{12}}{\partial z} + h_1 h_2 \frac{\partial h_2}{\partial z} + \frac{g_0}{g_{33}} \frac{1}{h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial z} \right\} \quad (4.19)$$

$$K_{20} = \frac{g_{33}}{g_0} \left\{ \left[ (h_1)^2 - \frac{g_0}{g_{33}} \frac{1}{(h_2)^2} \right] \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{g_{12}}{h_2} \frac{\partial g_{12}}{\partial x} + h_1 h_2 \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{g_0}{g_{33}} \frac{1}{h_3 h_2} \frac{\partial h_3}{\partial x} \right\} \quad (4.20)$$

$$K_{111} = \frac{g_{33}}{g_0} g_{12} \left\{ \frac{g_{12}}{(h_1)^2} \frac{\partial h_1}{\partial z} + \frac{\partial h_1}{\partial x} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial g_{12}}{\partial z} \right\} \quad (4.21)$$

$$K_{121} = \frac{g_{33}}{g_0} \left\{ h_1 h_2 \left[ 1 + \left( \frac{g_{12}}{h_1 h_2} \right)^2 \right] \frac{\partial h_1}{\partial x} - 2 g_{12} \frac{\partial h_2}{\partial z} \right\} \quad (4.22)$$

$$\mathbf{K}_{221} = \frac{\mathbf{g}_{33}}{\mathbf{g}_0} \mathbf{h}_1 \left\{ \frac{\partial \mathbf{g}_{12}}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{h}_2 \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{z}} - \frac{\mathbf{g}_{12}}{\mathbf{h}_2} \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{x}} \right\} \quad (4.23)$$

$$\mathbf{K}_{112} = \frac{\mathbf{g}_{33}}{\mathbf{g}_0} \mathbf{h}_2 \left\{ \frac{\partial \mathbf{g}_{12}}{\partial \mathbf{z}} - \mathbf{h}_1 \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\mathbf{g}_{12}}{\mathbf{h}_1} \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{z}} \right\} \quad (4.24)$$

$$\mathbf{K}_{122} = \frac{\mathbf{g}_{33}}{\mathbf{g}_0} \left\{ \mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2 \left[ 1 + \left( \frac{\mathbf{g}_{12}}{\mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2} \right)^2 \right] \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{z}} - 2 \mathbf{g}_{12} \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{x}} \right\} \quad (4.25)$$

$$\mathbf{K}_{222} = \frac{\mathbf{g}_{33}}{\mathbf{g}_0} \mathbf{g}_{12} \left\{ \frac{\mathbf{g}_{12}}{(\mathbf{h}_2)^2} \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{z}} - \frac{1}{\mathbf{h}_2} \frac{\partial \mathbf{g}_{12}}{\partial \mathbf{x}} \right\}. \quad (4.26)$$

### 4.3.3. Geometría de la pala

En el presente caso, el perfil se encuentra definido por un segmento de arco circular con longitud  $S$ , cuerda  $c$ , máxima ordenada  $h$ , y radio de curvatura  $R$ . En el sistema ortogonal *global*, las coordenadas de la superficie de la pala ( $X_s, Y_s, Z_s$ ), se relacionan con el sistema *local*, el cual está fijo a la superficie de la pala y siguiendo ese contorno, mediante

$$\begin{cases} X_s = z \\ Y_s = 2R \sin(\theta/2) \cos \beta \\ Z_s = 2R \sin(\theta/2) \sin \beta \end{cases} \quad y = 0 \quad (4.27)$$

donde

$$\theta = \frac{x}{R} \quad \beta = \varphi(z) + \frac{1}{2}(\theta^* - \theta) \quad \frac{\theta^*}{2} = \arcsin \left[ \left( \frac{h}{c} + \frac{c}{4h} \right)^{-1} \right] \quad (4.28)$$

$$H \leq z \leq B \quad 0 \leq \theta \leq \theta^* \quad 0 \leq x \leq S$$

y  $\varphi(z)$  denota la torsión geométrica de la pala. En el presente análisis, este ángulo se define como

$$\varphi(z) = \arctan \left( \frac{V_0}{\Omega z} \right) - \alpha_c(z), \quad (4.29)$$

donde  $V_0$  representa a la velocidad del viento sobre el disco que representa la turbina eólica en rotación, velocidad que es menor que la correspondiente al viento no perturbado por la presencia de la turbina y  $\alpha_C$  denota el ángulo de ataque local, medido desde la cuerda.

Sobre la superficie de la pala resulta

$$\begin{cases} \vec{g}_1 = (1, -2R\varphi'\sin(\theta/2)\sin\beta, 2R\varphi'\sin(\theta/2)\cos\beta) \\ \vec{g}_2 = (0, \cos\gamma, -\sin\gamma) \\ \vec{g}_3 = (-R\varphi'\sin\theta, \sin\gamma, \cos\gamma) \end{cases} \quad (4.30)$$

$$\gamma = \theta - \varphi(z) - \frac{\theta^*}{2} \quad \varphi' = \frac{d\varphi}{dz}$$

donde  $\vec{g}_3$  fue determinada, por conveniencia, mediante el producto  $\vec{g}_1 \times \vec{g}_2$ . Tal como lo muestran los siguientes elementos covariantes del tensor métrico,

$$\begin{cases} g_{11} = (h_1)^2 = 1 + 4R^2(\varphi')^2 \sin^2(\theta/2) \\ g_{22} = (h_2)^2 = 1 \\ g_{33} = (h_3)^2 = 1 + R^2(\varphi')^2 \sin^2\theta \\ g_{12} = g_{21} = -2R\varphi'\sin^2(\theta/2) \\ g_{13} = g_{31} = g_{23} = g_{32} = 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

$$g_0 = \det [g_{ij}] = g_{33}[g_{11} \cdot g_{22} - (g_{12})^2] = (g_{33})^2$$

$\vec{g}_3$  resulta normal tanto a  $\vec{g}_1$  como a  $\vec{g}_2$ . Sin embargo, para la configuraciones propuestas tanto para la sección como para la geometría de la pala,  $\vec{g}_1$  y  $\vec{g}_2$  no resultan ser vectores perpendicular entre sí, dado que  $g_{12}$  no es nulo.

#### 4.3.4. Transformación del dominio físico

Con la finalidad de ajustar un dominio computacional regular al dominio físico que presenta una forma no regular debido al crecimiento de los espesores en el desarrollo de la capa límite, se definen nuevas variables adimensionales  $(\xi, \eta, \zeta)$ , siendo

$$\begin{cases} \xi = \xi(x) = \frac{x}{S} \\ \eta = \eta(x, y, z) = \frac{y}{f(x, z)} \\ \zeta = \zeta(z) = 1 - \frac{z}{B} \end{cases} \quad (4.32)$$

Consecuentemente, esta transformación conduce al establecimiento de un dominio computacional regular definido por

$$\begin{cases} 0 \leq \xi \leq 1 \\ 0 \leq \eta \leq 1 \\ 0 \leq \zeta \leq 1 - \zeta_0 \end{cases} \quad \zeta_0 = H/B \quad (4.33)$$

donde  $\zeta_0$  representa la razón entre el radio del cubo, H, y el radio de punta de pala, B. Por otra parte,  $\zeta$  crece en sentido contrario a z, desde la punta hacia la raíz de pala, de acuerdo con el crecimiento de la capa límite a lo largo de la envergadura de la pala.

En particular,  $f(x,z)$  considera el crecimiento del espesor de la capa límite con una ley similar al desarrollo de la capa límite bidimensional de Blasius, adoptándose en consecuencia la siguiente formulación,

$$f(x,z) = \pm \left[ C_1 + C_2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{1 + (\Omega z / V_0)^2}} \right] \quad (4.34)$$

donde el signo (+) corresponde al extradós del perfil, donde y es positivo, mientras que el signo (-) corresponde al intradós, donde y es negativa. Esto es ilustrado esquemáticamente en la Figura 4.3.

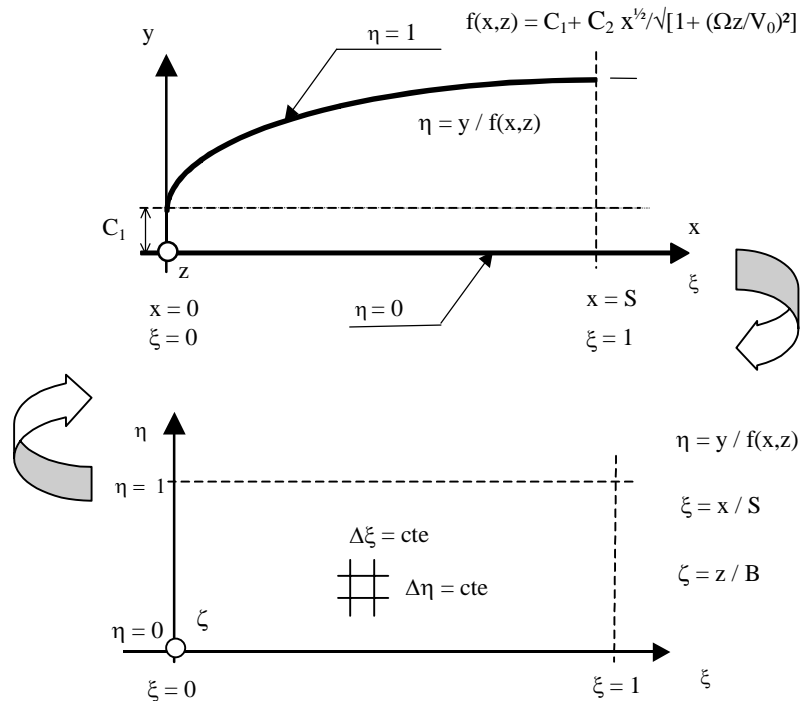


Figura 4.3 Dominio físico y dominio computacional.

Así,  $\eta = 1$  representa una distancia medida desde la superficie de la pala que debe superar al denominado espesor de la capa límite, si bien este último está indeterminado a priori. Los coeficientes  $C_1$  y  $C_2$  son constantes dimensionales positivas que tiene por finalidad ajustar los valores de la función  $f(x,z)$  para cada problema específico.

#### 4.4. ECUACIONES DE GOBIERNO DE LA CAPA LÍMITE

Mediante la introducción de las nuevas variables adimensionales, las ecuaciones de la capa límite (4.14-16) resultan,

*Ecuación de continuidad:*

$$\frac{1}{h_2 S} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{k_2}{h_2} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{k_3}{h_3} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{k_1}{h_1} \frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{1}{h_1 B} \frac{\partial w}{\partial \zeta} + u K_{20} + w K_{10} = 0 \quad (4.35)$$

*Ecuación para la cantidad de movimiento según cuerda (x):*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_2} \frac{u}{S} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \left( w \frac{k_1}{h_1} + u \frac{k_2}{h_2} + v \frac{k_3}{h_3} \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{1}{h_1} \frac{w}{B} \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \frac{1}{h_2} \frac{u_{NV}}{S} \frac{\partial u_{NV}}{\partial \xi} + \frac{1}{h_1} \frac{w_{NV}}{B} \frac{\partial u_{NV}}{\partial \zeta} + \\ & + (ww - w_{NV} w_{NV}) K_{112} + (uw - u_{NV} w_{NV}) K_{122} + (uu - u_{NV} u_{NV}) K_{222} - \\ & - 2 \frac{g_{33}}{\sqrt{g_0}} [h_1 h_2 (w - w_{NV}) + g_{12} (u - u_{NV})] a_{33} \Omega - v \frac{(k_3)^2}{g_{33}} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

*Ecuación para la cantidad de movimiento según envergadura (z):*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_2} \frac{u}{S} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \left( w \frac{k_1}{h_1} + u \frac{k_2}{h_2} + v \frac{k_3}{h_3} \right) \frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{1}{h_1} \frac{w}{B} \frac{\partial w}{\partial \zeta} - \frac{1}{h_2} \frac{u_{NV}}{S} \frac{\partial w_{NV}}{\partial \xi} + \frac{1}{h_1} \frac{w_{NV}}{B} \frac{\partial w_{NV}}{\partial \zeta} + \\ & + (ww - w_{NV} w_{NV}) K_{111} + (uw - u_{NV} w_{NV}) K_{121} + (uu - u_{NV} u_{NV}) K_{221} - \\ & - 2 \frac{g_{33}}{\sqrt{g_0}} [g_{12} (w_{NV} - w) + h_1 h_2 (u_{NV} - u)] a_{33} \Omega - v \frac{(k_3)^2}{g_{33}} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

donde los coeficientes provenientes de la transformación del dominio son

$$k_1 = \frac{\partial \eta}{\partial z} \quad k_2 = \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad k_3 = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{f(\xi, \zeta)} \quad (4.38)$$

y, en el caso particular de un perfil de arco circular, los métricos se expresan genéricamente como

$$h_1 = h_1(x, z) = h_1(\xi, \zeta) \quad h_2 = 1 \quad h_3 = h_3(x, z) = h_3(\xi, \zeta) \quad (4.39)$$

resultando finalmente,

$$K_{10} = \frac{1}{(h_3)^2} \left\{ \left[ 1 - \frac{(h_3)^2}{(h_1)^2} \right] \frac{\partial h_1}{\partial z} - \frac{g_{12}}{h_1} \frac{\partial g_{12}}{\partial z} + \frac{h_3}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial z} \right\} \quad (4.40)$$

$$K_{20} = \frac{1}{(h_3)^2} \left\{ h_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} - g_{12} \frac{\partial g_{12}}{\partial x} + h_3 \frac{\partial h_3}{\partial x} \right\} \quad (4.41)$$

$$K_{111} = \frac{g_{12}}{(h_3)^2} \left\{ \frac{g_{12}}{(h_1)^2} \frac{\partial h_1}{\partial z} + \frac{\partial h_1}{\partial x} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial g_{12}}{\partial z} \right\} \quad (4.42)$$

$$K_{121} = \frac{1}{(h_3)^2} \left\{ h_1 \left[ 1 + \left( \frac{g_{12}}{h_1} \right)^2 \right] \frac{\partial h_1}{\partial x} \right\} \quad (4.43)$$

$$K_{221} = \frac{h_1}{(h_3)^2} \left\{ \frac{\partial g_{12}}{\partial x} \right\} \quad (4.44)$$

$$K_{112} = \frac{1}{(h_3)^2} \left\{ \frac{\partial g_{12}}{\partial z} - h_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} - \frac{g_{12}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial z} \right\} \quad (4.45)$$

$$K_{122} = -2 \frac{g_{12}}{(h_3)^2} \left\{ \frac{\partial h_1}{\partial x} \right\} \quad (4.46)$$

$$K_{222} = -\frac{g_{12}}{(h_3)^2} \left\{ \frac{\partial g_{12}}{\partial x} \right\}. \quad (4.47)$$

#### 4.4.1. Condiciones de Contorno

Las condiciones de contorno a aplicar a las ecuaciones diferenciales de la capa límite representan físicamente la condición de no deslizamiento sobre la pared (4.48), denotando que no existe velocidad relativa del fluido respecto de la superficie de la pala ( $\eta = 0$ ), y el requerimiento de que el flujo viscoso se ajuste a la corriente (asumida no viscosa) que fluye suficientemente lejos de las superficies de la pala ( $\eta = 1$ ), representada por la condición (4.49).

$$\begin{cases} u(\xi, 0, \zeta) = 0 \\ v(\xi, 0, \zeta) = 0 \\ w(\xi, 0, \zeta) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq \xi \leq 1 \\ 0 \leq \zeta \leq 1 - \zeta_0 \end{cases} \quad (4.48)$$

$$\begin{cases} u(\xi, 1, \zeta) = u_{NV}(\xi, \zeta) = F_u [U_{NV}(X, Y, Z), V_{NV}(X, Y, Z), W_{NV}(X, Y, Z)] \\ w(\xi, 1, \zeta) = w_{NV}(\xi, \zeta) = F_w [U_{NV}(X, Y, Z), V_{NV}(X, Y, Z), W_{NV}(X, Y, Z)] \end{cases} \quad (4.49)$$

$$\begin{cases} 0 \leq \xi \leq 1 \\ 0 \leq \zeta \leq 1 - \zeta_0 \end{cases}$$

donde  $U_{NV}$ ,  $V_{NV}$  y  $W_{NV}$  representan las componentes de velocidad correspondientes al flujo invíscido, en el sistema coordenado global adherido a la pala,  $(X, Y, Z)$ , transformación que es llevada a cabo mediante la ecuación (4.10).

#### 4.5. TENSOR DE TENSIONES VISCOSAS LAMINARES

Sea  $[\tau]$  el tensor (de segundo orden) de tensiones viscosas en flujo laminar, definido mediante

$$[\tau] = \tau_{mn} \bar{g}^m \bar{g}^n = \tau^{mn} \bar{g}_m \bar{g}_n \quad [g^{mn}] = [g_{mn}]^{-1} \quad (4.50)$$

mediante sus componentes covariantes y contravariantes, las cuales verifican, respectivamente, las siguientes relaciones,

$$\tau_{mn} = 2\mu D_{mn} \quad \tau^{rs} = 2\mu g^{mr} g^{ks} D_{mn} \quad (4.51)$$

donde  $\mu$  denota la viscosidad absoluta del fluido y  $D_{mn}$  representa los elementos covariantes del tensor velocidad de corte, el cual, para un flujo laminar estacionario e incompresible de un fluido Newtoniano, resulta

$$D_{mn} = \frac{1}{2} (v_m|_n + v_n|_m) \quad (4.52)$$

y donde los gradientes de velocidad están representados por la derivada covariante de las componentes covariantes,  $v_m$ , tal que

$$v_m|_n = \frac{\partial v_m}{\partial x^n} - \left\{ \begin{matrix} k \\ m \ n \end{matrix} \right\} v_k \quad (4.53)$$

y donde las componentes covariantes están relacionadas con las componentes contravariantes de la velocidad mediante

$$v_k = g_{kr} v^r \quad (4.54)$$

y

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ m \ n \end{matrix} \right\} = \frac{g^{kl}}{2} \left( \frac{\partial g_{nl}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^l} \right) \quad (4.55)$$

representa los símbolos de Christoffel de segunda clase.

Finalmente, luego de cierta manipulación de las ecuaciones (4.50) a (4.55) y de la sola consideración de los términos con órdenes de magnitud relevantes, las componentes físicas no nulas del tensor de tensiones viscosas resultan,

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{\mu}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial w}{\partial y} \quad \tau_{yx} = \tau_{xy} = \frac{\mu}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4.56)$$

Luego, considerando la misma transformación llevada a cabo anteriormente, se introduce la previamente definida coordenada adimensional normal a la superficie,  $\eta$ , según (4.32), por lo que las componentes físicas no nulas del tensor de tensiones viscoso se describen como

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{\mu k_3}{h_3} \frac{\partial w}{\partial \eta} \quad \tau_{yx} = \tau_{xy} = \frac{\mu k_3}{h_3} \frac{\partial u}{\partial \eta}. \quad (4.57)$$



## 4.6. MODELACIÓN NUMÉRICA

El sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales y acopladas (4.35-37) es discretizado mediante una representación en diferencias finitas, utilizando el esquema zig-zag de Krause (ver Apéndice 5), considerando constantes a  $\Delta\eta$ ,  $\Delta\xi$  y  $\Delta\zeta$ , en una formulación centrada en  $(i+1/2,j,k)$  para las ecuaciones de la cantidad de movimiento y en  $(i+1,j-1/2,k)$  para la ecuación de continuidad, según las recomendaciones de Anderson et al. (1984), donde  $(i,j,k)$  denotan los índices según las coordenadas adimensionales  $(\xi,\eta,\zeta)$ , respectivamente.

Las ecuaciones algebraicas no lineales resultantes se reorganizan en un sistema tridiagonal, tal como el presentado en (4.58). Las ecuaciones linealizadas son resueltas de manera secuencial e iterativa, con la finalidad de actualizar los coeficientes, mediante la utilización del algoritmo de Thomas presentado en Anderson et al. (1984),

$$\{A_1\}u_{j+1,k}^{i+1} + \{D_1\}u_{j,k}^{i+1} + \{B_1\}u_{j-1,k}^{i+1} = \{C_1\} \quad \text{de (4.36)}$$

$$\{A_2\}w_{j+1,k}^{i+1} + \{D_2\}w_{j,k}^{i+1} + \{B_2\}w_{j-1,k}^{i+1} = \{C_2\} \quad \text{de (4.37)} \quad (4.58)$$

$$\{A_3\}v_{j+1,k}^{i+1} + \{D_3\}v_{j,k}^{i+1} + \{B_3\}v_{j-1,k}^{i+1} = \{C_3\} \quad \text{de (4.35)}$$

siendo  $2 \leq i \leq (N_i - 1)$ ,  $1 \leq k \leq (N_k - 1)$  y  $1 \leq j \leq (N_j - 1)$ , y donde  $N_i$ ,  $N_k$  y  $N_j$  representan el número de divisiones en cada coordenada, por lo cual

$$\Delta\xi = 1/N_i \quad \Delta\zeta = (1 - \zeta_0)/N_k \quad \Delta\eta = 1/N_j. \quad (4.59)$$

Dado que tanto el borde de ataque ( $i = 0$ ), como la punta ( $k = 0$ ) de la pala (cuya superficie resulta definida por  $j = 0$ ) representan discontinuidades matemáticas para las componentes  $u$  y  $w$  de la velocidad local, una condición inicial debe ser especificada, habiéndose adoptado los siguientes supuestos

$$\begin{cases} u(0, \eta > 0, \zeta) = u_{NV}(0, \zeta) \\ w(\xi, \eta > 0, 0) = w_{NV}(\xi, 0) \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, 0, \zeta) = 0 \\ w(\xi, 0, 0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq \xi \leq 1 \\ 0 \leq \zeta \leq 1 - \zeta_0 \end{cases} \quad (4.60)$$

Por otra parte, se propone una aproximación tipo Kármán-Pohlhausen para la descripción del perfil de velocidades en la capa límite cuando  $i = 1$ , debido a los requerimientos de linealización de los términos no lineales en  $i = 2$ .

Los términos no lineales provenientes de los términos convectivos que aparecen en las ecuaciones de cantidad de movimiento se linealizan evaluando los términos de velocidad que aparecen como coeficientes de las derivadas mediante las siguientes aproximaciones:

$$\mathbf{u}_{j,k}^{i+1} \Big|_1 \approx (2\mathbf{u}_{j,k}^i - \mathbf{u}_{j,k}^{i-1}) \Big|_0 \quad \mathbf{w}_{j,k}^{i+1} \Big|_1 \approx (2\mathbf{w}_{j,k}^i - \mathbf{w}_{j,k}^{i-1}) \Big|_0 \quad 2 \leq i < N_i \quad (4.61)$$

y solamente para la primera iteración ( $n = 1$ ).

Para dicha primera iteración, los valores “iniciales” adoptados ( $n = 0$ ) para la distribución según cuerda de la velocidad corresponden a perfiles de Kármán-Pohlhausen para capa límites sin gradiente de presión. Para la distribución de velocidad según envergadura, los perfiles iniciales se adoptaron a partir de la formulación presentada por Pai (1956) para el problema de una placa plana que rota en su propio plano.

Luego de la primera iteración, y hasta la iteración  $n = n_{\text{máx}}$ , los términos no lineales son calculados a partir de las aproximaciones,

$$\mathbf{u}_{j,k}^{i+1} \Big|_{n+1} \approx \mathbf{u}_{j,k}^{i+1} \Big|_n \quad \mathbf{w}_{j,k}^{i+1} \Big|_{n+1} \approx \mathbf{w}_{j,k}^{i+1} \Big|_n \quad n \geq 1 \quad 2 \leq i < N_i \quad (4.62)$$

Es decir, estos son actualizados a partir de los resultados obtenidos en la iteración previa.

Por otra parte, con la finalidad de determinar la tensión de corte en la pared, las derivadas espaciales de la velocidad en la ecuación (4.57) son discretizadas mediante el siguiente esquema en diferencias finitas, no centrado y de segundo orden

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \eta}(x,0,z) &\approx \frac{1}{2\Delta\eta} [-3\mathbf{w}(x,0,z) + 4\mathbf{w}(x,\Delta\eta,z) - \mathbf{w}(x,2\Delta\eta,z)] \quad \varepsilon = O[(\Delta\eta)^2] \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta}(x,0,z) &\approx \frac{1}{2\Delta\eta} [-3\mathbf{u}(x,0,z) + 4\mathbf{u}(x,\Delta\eta,z) - \mathbf{u}(x,2\Delta\eta,z)] \quad \varepsilon = O[(\Delta\eta)^2] \end{aligned} \quad (4.63)$$

dado que las representaciones numéricas son evaluadas sobre la superficie de la pala, por la condición de no deslizamiento, resultan

$$\mathbf{u}(x,0,z) = \mathbf{w}(x,0,z) = 0. \quad (4.64)$$

## 4.7. EJEMPLO

A modo de ejemplo, se evalúa el desarrollo de la capa límite tridimensional sobre una pala torsionada conformada por perfiles delgados de arco circular de cuerda constante,  $c$ , y flecha  $h$ . Dicha pala es evaluada para la configuración geométrica y bajo la condiciones de operación siguientes:

cuerda,  $c = 0,125$  m

flecha adimensionalizada,  $h/c = 0,02$

radio de la pala en raíz,  $H = 0,25$  m

radio en la punta,  $B = 1,50$  m

longitud de la pala,  $b = 1,25$  m

densidad del aire,  $\rho = 1,2$  kg/m<sup>3</sup>

viscosidad del aire,  $\mu = 1,8 \cdot 10^{-5}$  kg/(m.s)

viscosidad cinemática del aire,  $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5}$  m<sup>2</sup>/s

velocidad no perturbada del viento,  $V_{\infty} = 12,0$  m/s

velocidad del aire sobre el rotor,  $V_0 = 8,4$  m/s

velocidad angular de la turbina eólica,  $\Omega = 28$  s<sup>-1</sup>

razón de velocidades en la punta,  $\sigma_0 = (\Omega B)/V_0 = 5,0$

$C_1 = 0,0001$  m

$C_2 = 0,0134$  m<sup>1/2</sup>

La distribución de velocidades en proximidad de la pala, en el sistema coordenado global y para sus componentes ( $U_{NV}, V_{NV}, W_{NV}$ ), ha sido obtenida bajo consideraciones invíscidas, como resultado de la aplicación de la técnica de paneles descrita en el Capítulo 3. Si bien la máxima discretización se ha realizado dividiendo tanto la envergadura como la cuerda de la pala en 100 porciones iguales, con el fin de visualizar adecuadamente los gráfico se ha representado las soluciones correspondientes al caso de 25 divisiones idénticas sobre cuerda y envergadura, representando asimismo esos resultados exclusivamente sobre el extradós de la pala. Dichas distribuciones se muestran en las Figuras 4.4 a 4.7, donde se incluye asimismo la distribución del módulo de la velocidad no viscosa sobre el extradós de la pala.

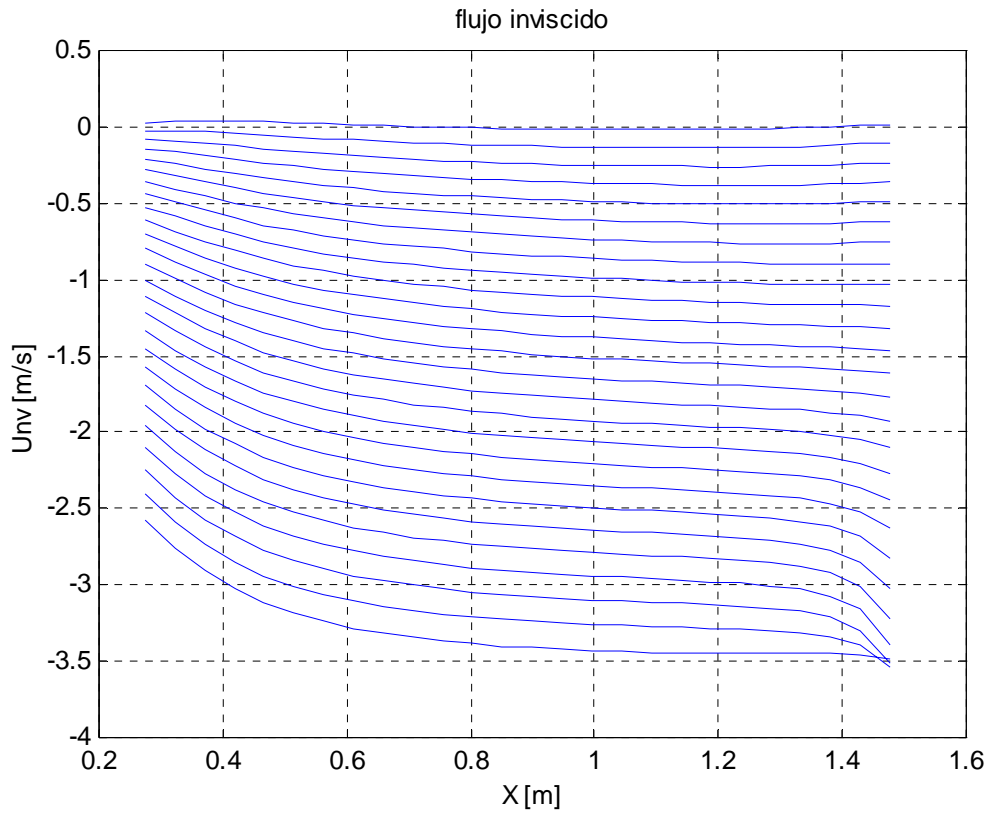


Figura 4.4 Distribución de la componente X de la velocidad invíscida,  $U_{NV}$ , en el sistema global.

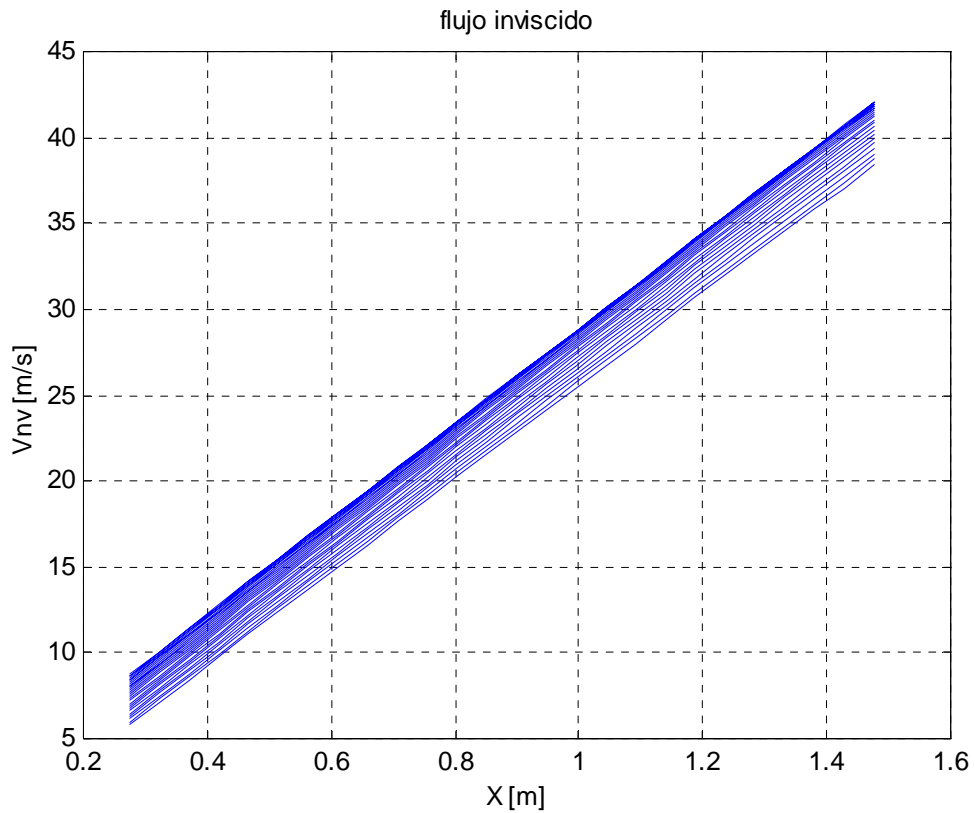


Figura 4.5 Distribución de la componente Y de la velocidad invíscida,  $V_{NV}$ , en el sistema global.

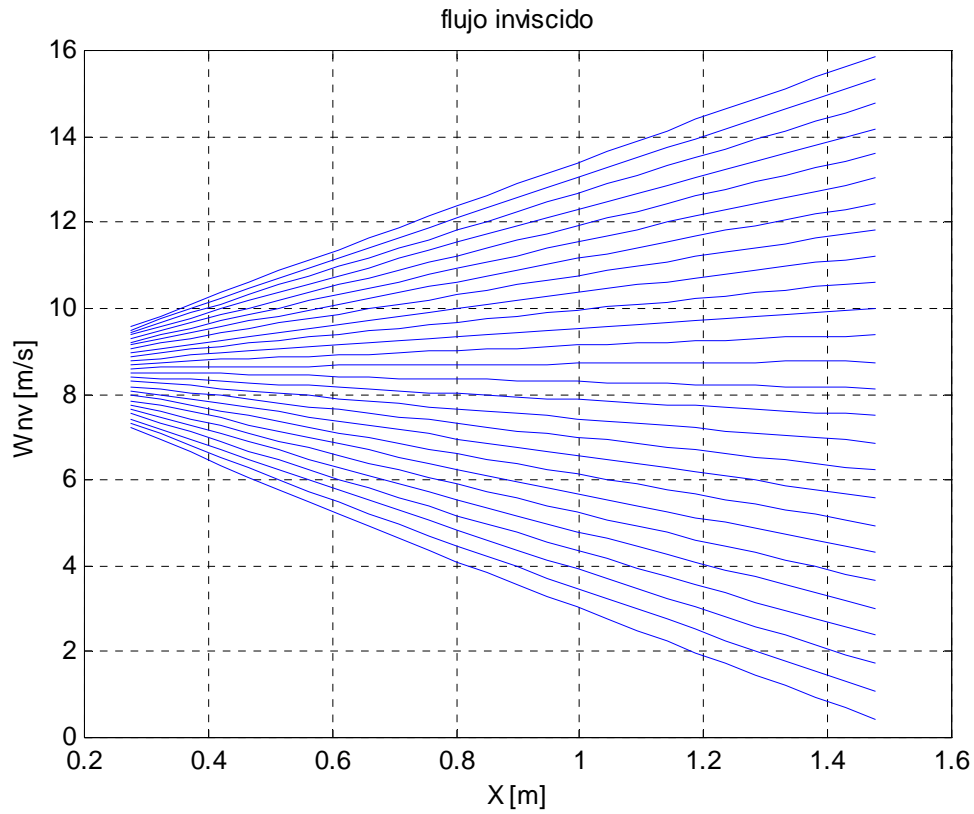


Figura 4.6 Distribución de la componente Z de la velocidad inviscida,  $W_{NV}$ , en el sistema global.

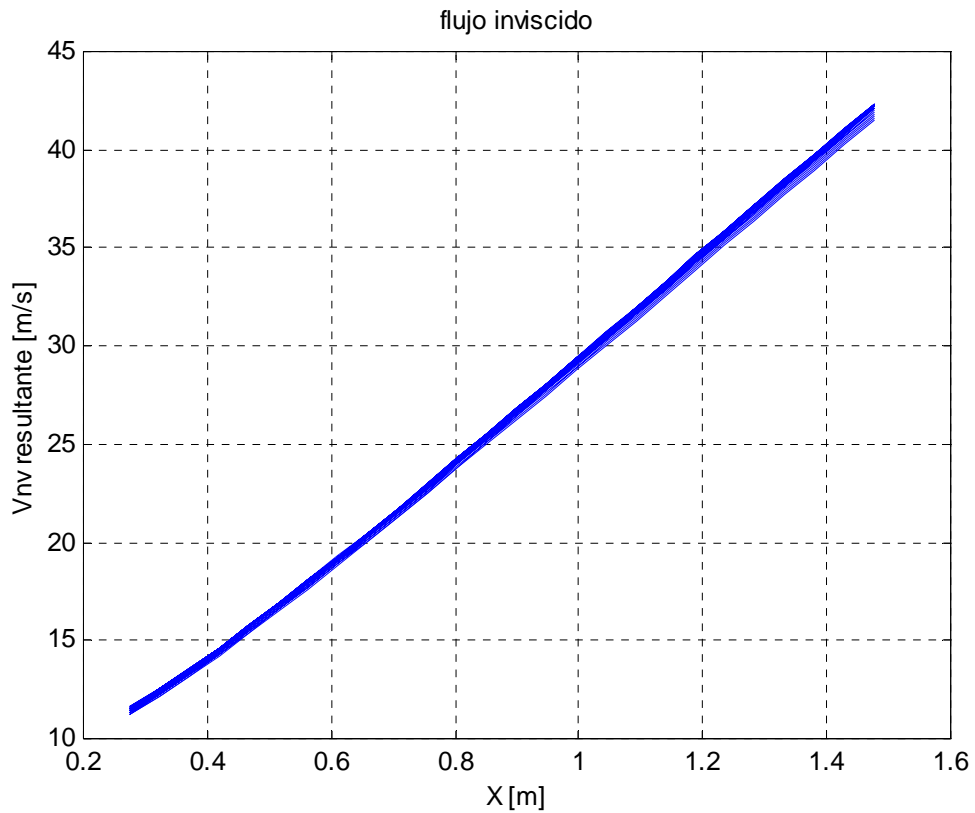


Figura 4.7 Distribución de la velocidad inviscida resultante, en el sistema global.

Mediante la transformación entre las bases global y local, las distribuciones de velocidad no viscosa sobre las superficies de la pala se reformulan para considerar las direcciones según cuerda y según envergadura ( $x$  y  $z$ , respectivamente) del sistema curvilíneo, determinando las distribuciones de las componentes invíscidas  $u_{NV}$  y  $w_{NV}$  que se representan, respectivamente, en las Figuras 4.8 y 4.9. Estas distribuciones de velocidad son una medida del gradiente de presiones actuante sobre la capa viscosa, y por ende representan las condiciones de contorno impuestas sobre el borde superior del dominio físico para las ecuaciones de la capa límite.

Dado que, para el caso de una placa plana de envergadura infinita que rota en su propio plano con velocidad angular  $\omega$  y sin movimiento de avance, el flujo no viscoso está representado por  $V_{NV} = \omega X$  y  $U_{NV} = -\omega Y$ , y como existe una similitud entre la placa plana rotante y la pala torsionada rotante, debería esperarse un comportamiento fluidodinámico semejante. Por ello, y dado que el eje global  $X$  y el eje local  $z$  son prácticamente paralelos, el comportamiento de las distribuciones de las velocidades a lo largo de dichos ejes debe resultar semejante. Ello puede ser reconocido a partir de las Figuras 4.4 y 4.9, donde las velocidades según envergadura,  $U_{NV}$  y  $w_{NV}$ , son representadas desde la raíz de la pala hasta su punta para las 26 estaciones distribuidas desde el borde de ataque hasta el borde de fuga del perfil. La discrepancia de los presentes resultados de los correspondientes a la placa plana en rotación se deben al efecto de torsión de la pala, por lo que la diferencia resulta más acentuada hacia la raíz de la pala, dado que la torsión también se incrementa hacia el eje de rotación de la turbina.

Por otra parte, y si bien la componente de velocidad local según la cuerda,  $u_{NV}$ , muestra una distribución prácticamente lineal con la longitud según la envergadura, incrementándose desde la raíz hasta la punta de la pala tal como crece  $V_{NV}$ , la distribución de  $u_{NV}$  resulta ligeramente más compleja dado que involucra la variación de velocidad por efecto de la curvatura del perfil de arco circular que conforma la pala. Es como consecuencia de esa diferencia de velocidades  $u_{NV}$  entre extradós e intradós, que se genera una fuerza de sustentación sobre la pala.

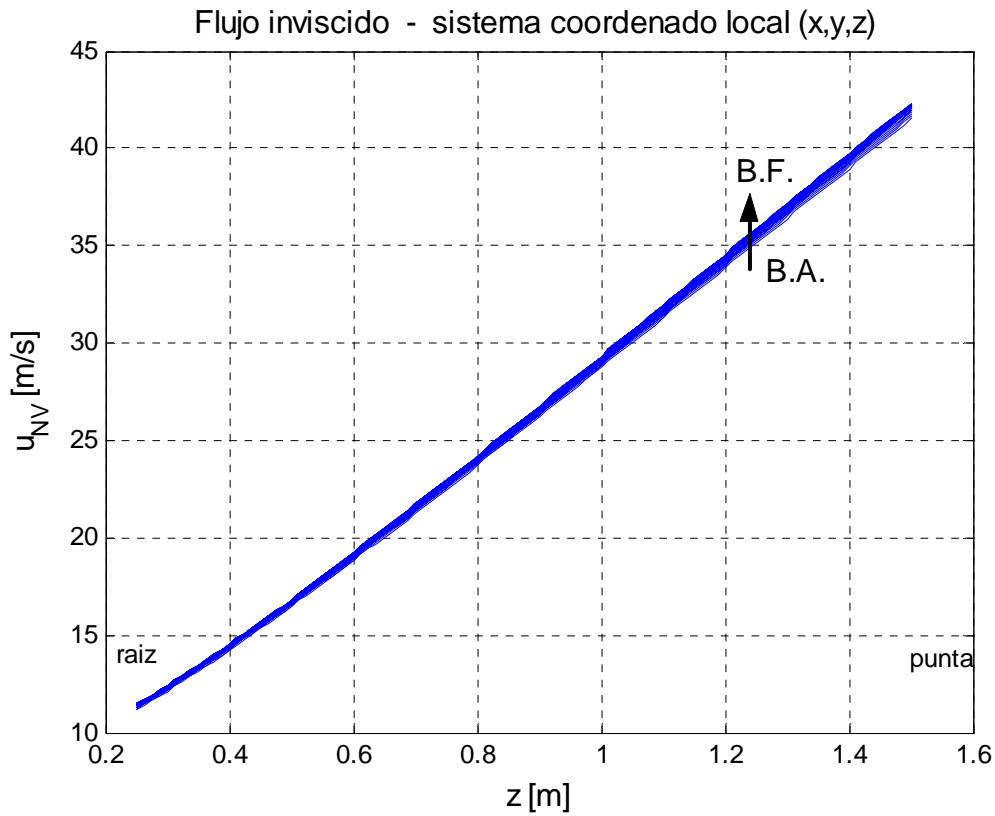


Figura 4.8 Distribución de la velocidad inviscida según cuerda,  $u_{NV}$ , en el sistema local.

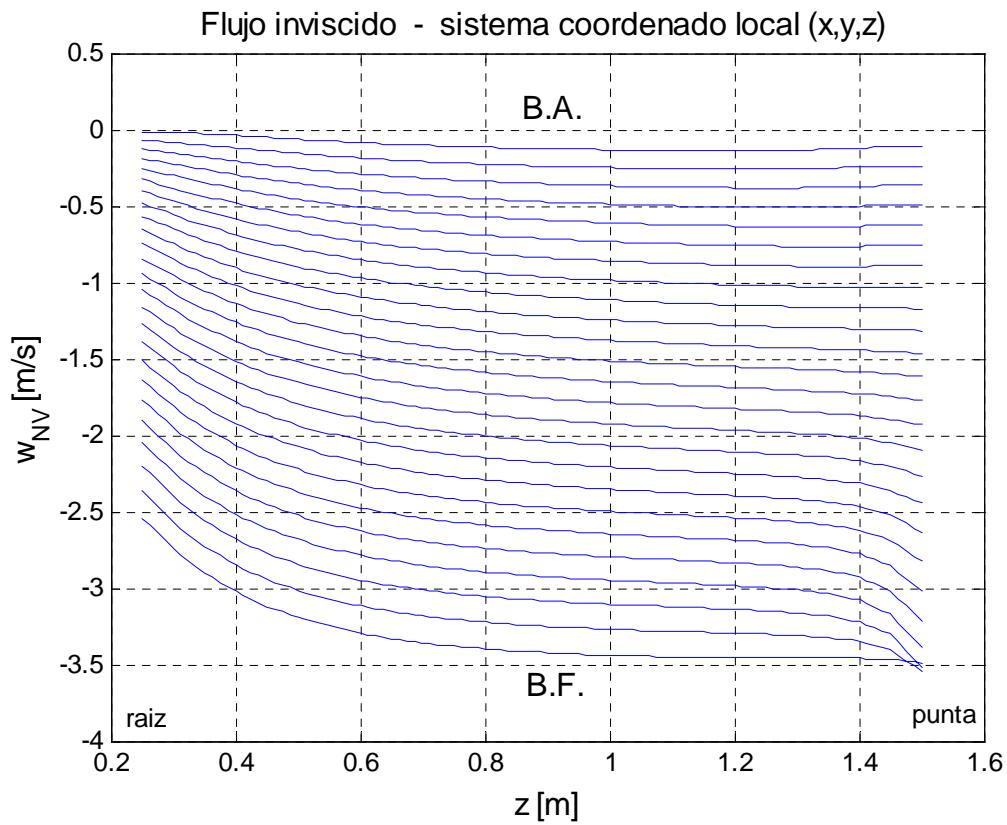


Figura 4.9 Distribución de la velocidad inviscida según envergadura,  $w_{NV}$ , en el sistema local.

Para la modelación numérica de la región viscosa, la superficie de la pala es discretizada en 100x100 estaciones, en correspondencia con divisiones constantes tanto a lo largo de la envergadura como a lo largo de la línea media del perfil, resultando respectivamente  $\Delta z = 0,0125$  m y  $\Delta x = 0,00126$  m. El ancho del dominio físico, representado por  $\delta(x,z)$ , es dividido en el correspondiente dominio computacional en 800 segmentos de igual longitud, siendo entonces  $\Delta \eta = 0,00125$ .

Dadas las características iterativas de la resolución de los sistemas de ecuaciones algebraicas no lineales, proveniente de la discretización de las ecuaciones diferenciales de gobierno, se requiere de la propuesta de una solución "inicial", la cual es iterada hasta verificar un determinado criterio de convergencia. Los perfiles iniciales de velocidad propuestos para las distribuciones según cuerda y según envergadura se representan en las Figuras 4.10 y 4.11, respectivamente, donde se muestran dichos perfiles sobre algunas estaciones según cuerda, considerando una posición correspondiente al 80% de la envergadura de la pala.

En las figuras siguientes se representan, para el extradós, las distribuciones de las componentes físicas de la velocidad dentro de la capa viscosa, representada mediante las componentes según cuerda,  $u$ , y según envergadura,  $w$ . Ambas componentes corresponden a las velocidades relativas a la pala en rotación. Dichos resultados se representan para cuatro diferentes estaciones a lo largo de la envergadura alar, distancias medidas a partir de la raíz de pala,

- (a) 90% (es decir, en proximidad de la punta de pala), Figuras 4.12 y 4.13,
- (b) 80%, Figuras 4.14 y 4.15,
- (c) 50% (a mitad de la envergadura), Figuras 4.16 y 4.17, y
- (d) 20%, Figuras 4.18 y 4.19.

Por otra parte, las representaciones según cuerda corresponden a distribuciones en el espesor de la capa viscosa ubicadas a intervalos iguales a lo largo de las superficies del perfil, desde una estación ubicada en proximidades del borde de ataque,  $x/S = 0,10$ , hasta el borde de fuga,  $x/S = 1,00$ , considerando incrementos  $\Delta(x/S) = 0,10$ .

Para el caso analizado, y con referencia a la distribución de perfiles de velocidad correspondientes al extradós, las distribuciones más alejadas del borde de ataque que son representadas en las Figuras 4.12 a 4.19 corresponden a la posición adimensionalizada  $x/S = 0,96$  dado que para  $x/S = 0,98$  se presenta la separación de la capa límite laminar. Sin embargo no se observa, en el presente caso, separación sobre el intradós del perfil.



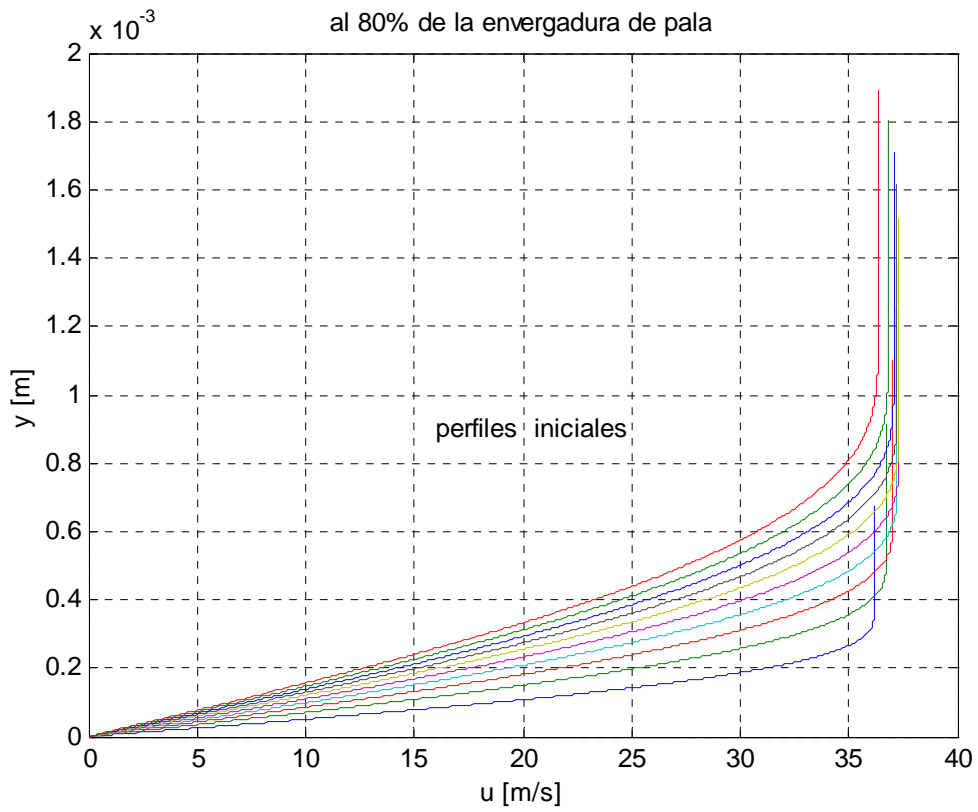


Figura 4.10 Perfiles iniciales para la velocidad según cuerda,  $u$ , al 80%b.

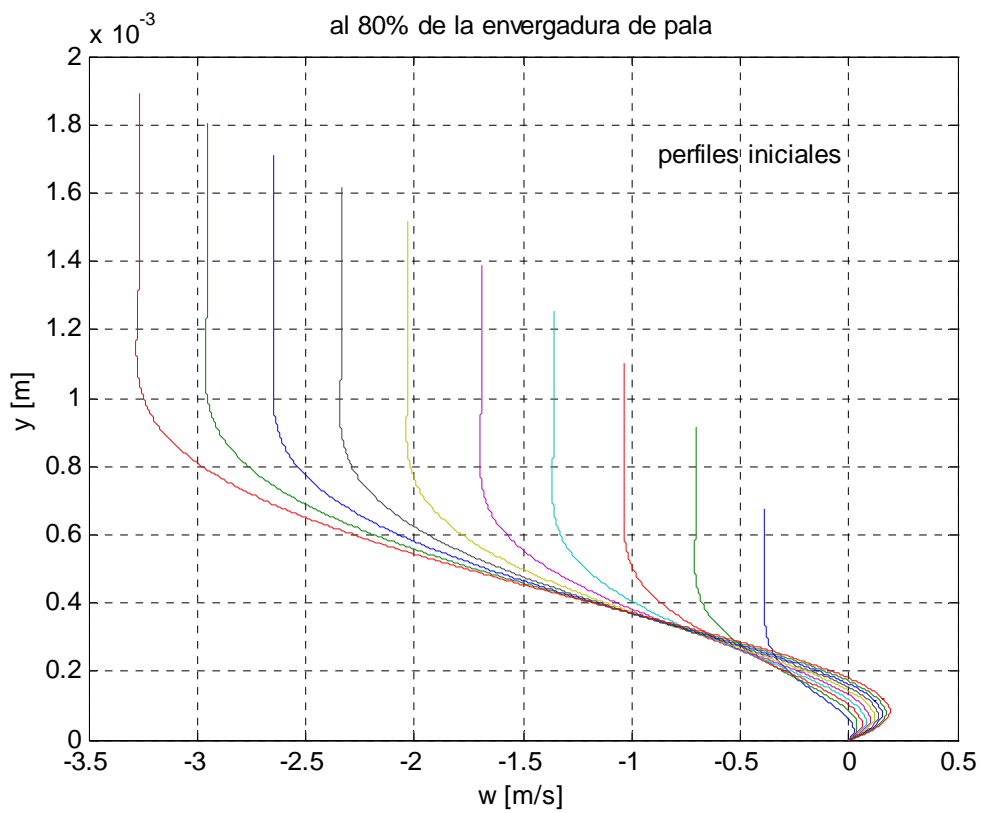


Figura 4.11 Perfiles iniciales para la velocidad según envergadura,  $w$ , al 80%b.

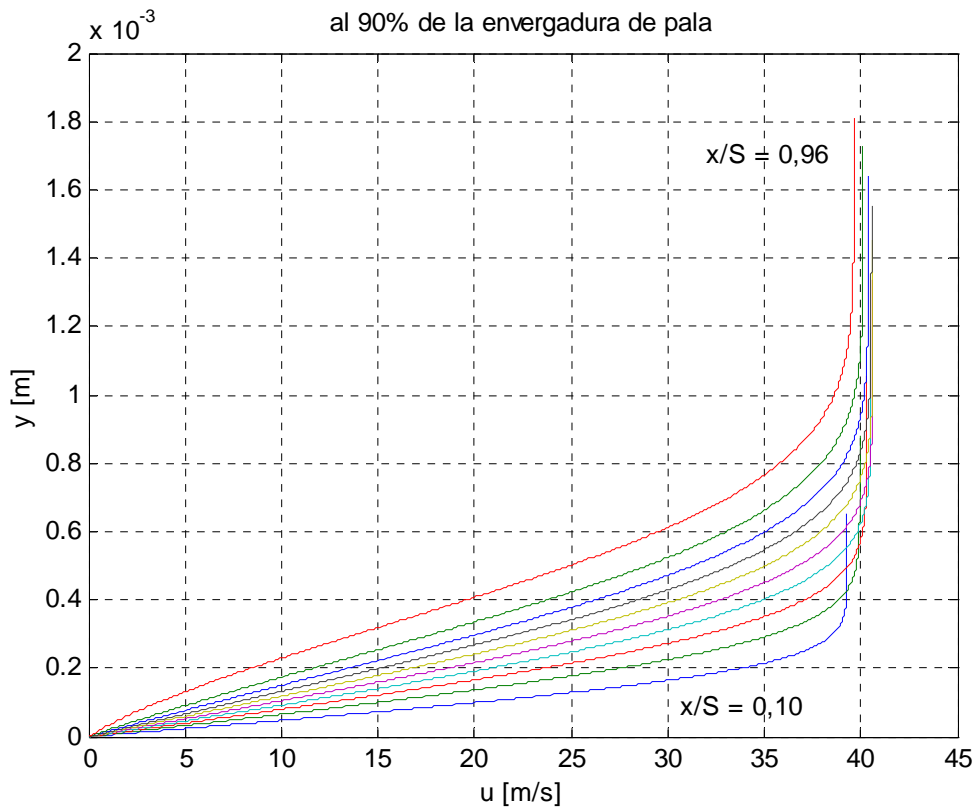


Figura 4.12 Perfiles de la velocidad según cuerda, u, sobre extradós, al 90%b.

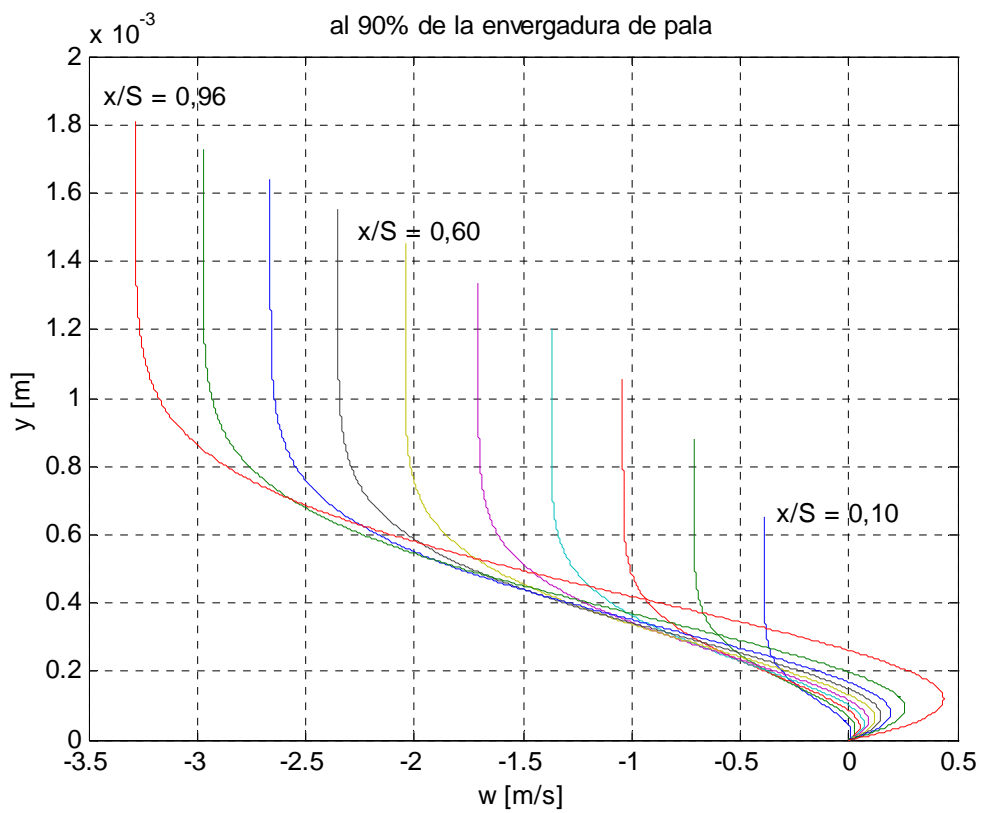


Figura 4.13 Perfiles de la velocidad según envergadura, w, sobre extradós, al 90%b.

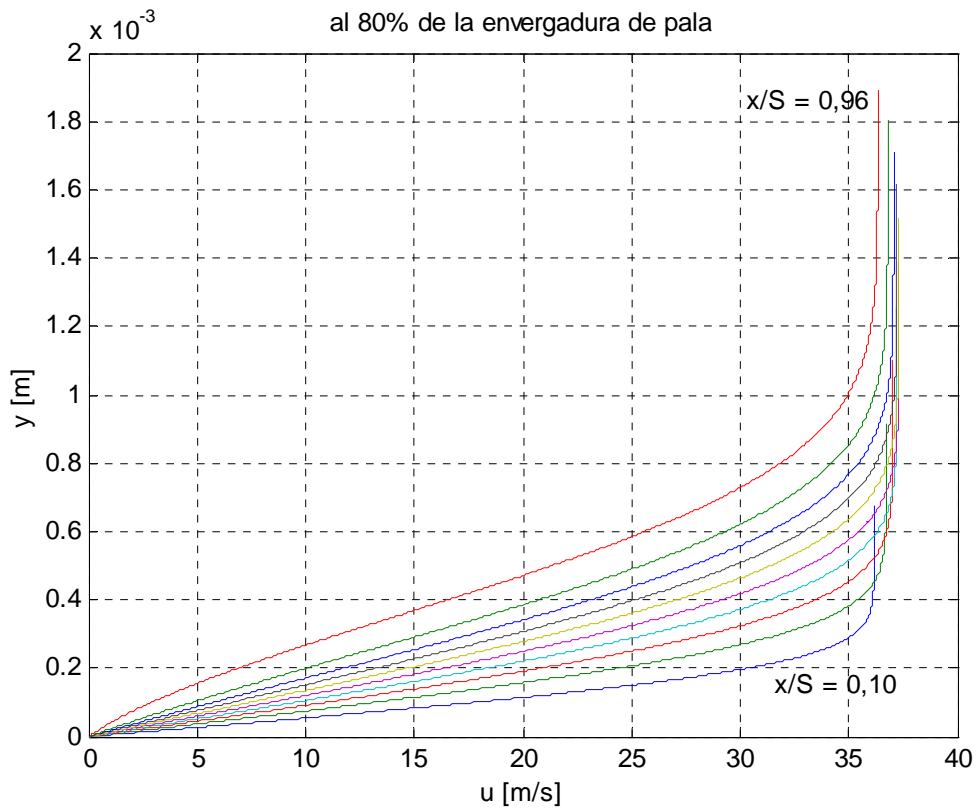


Figura 4.14 Perfiles de la velocidad según cuerda,  $u$ , sobre extradós, al 80%b.

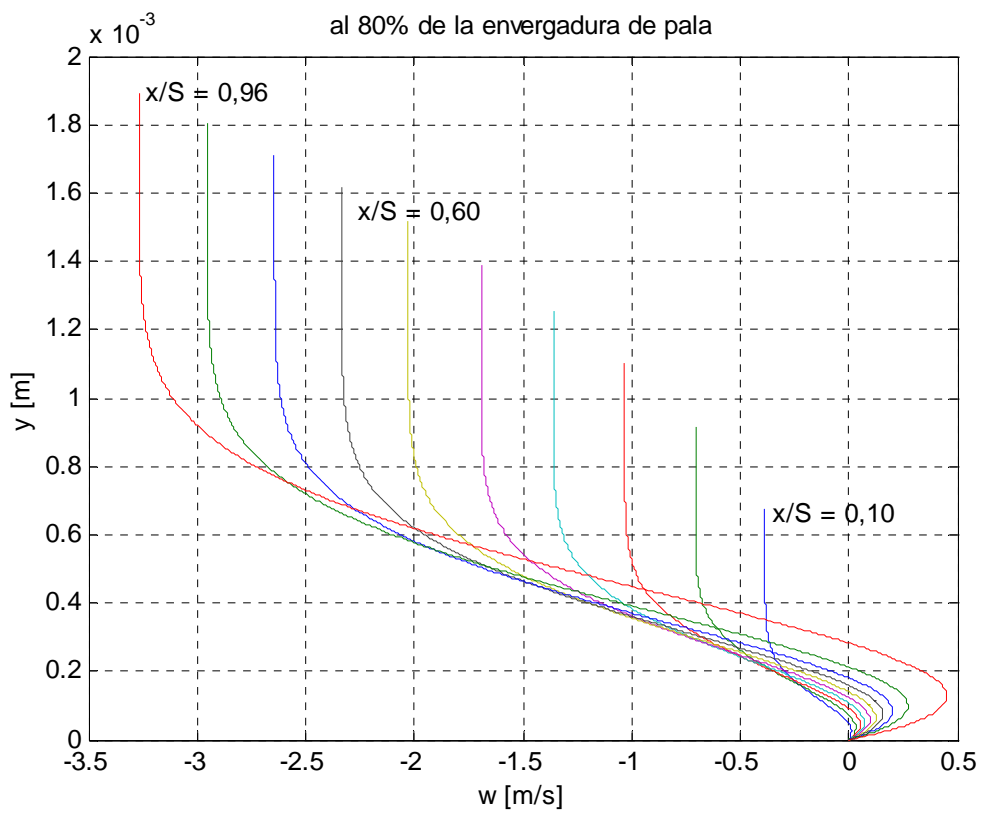


Figura 4.15 Perfiles de la velocidad según envergadura,  $w$ , sobre extradós, al 80%b.

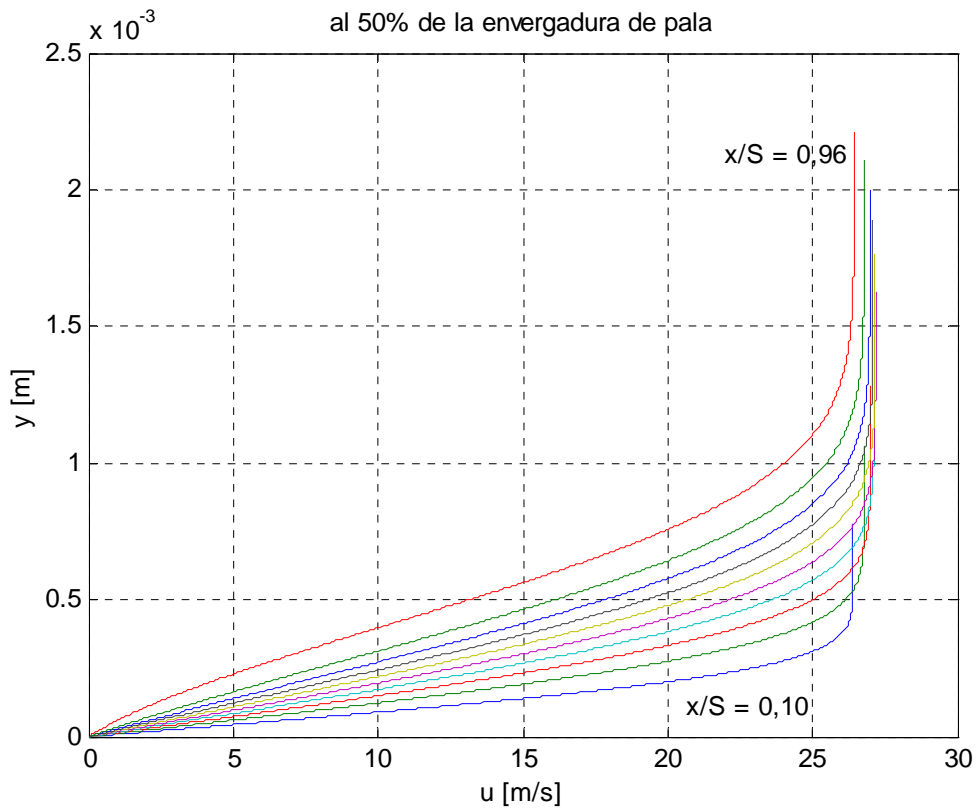


Figura 4.16 Perfiles de la velocidad según cuerda,  $u$ , sobre extradós, al 50%b.

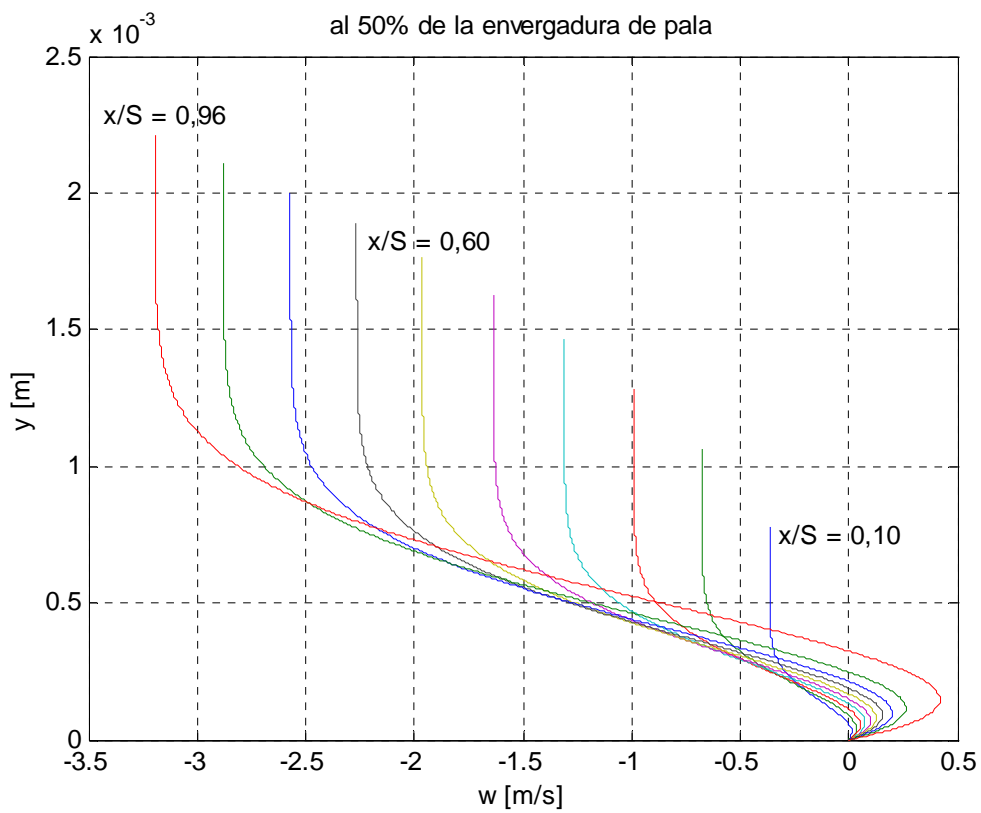


Figura 4.17 Perfiles de la velocidad según envergadura,  $w$ , sobre extradós, al 50%b.

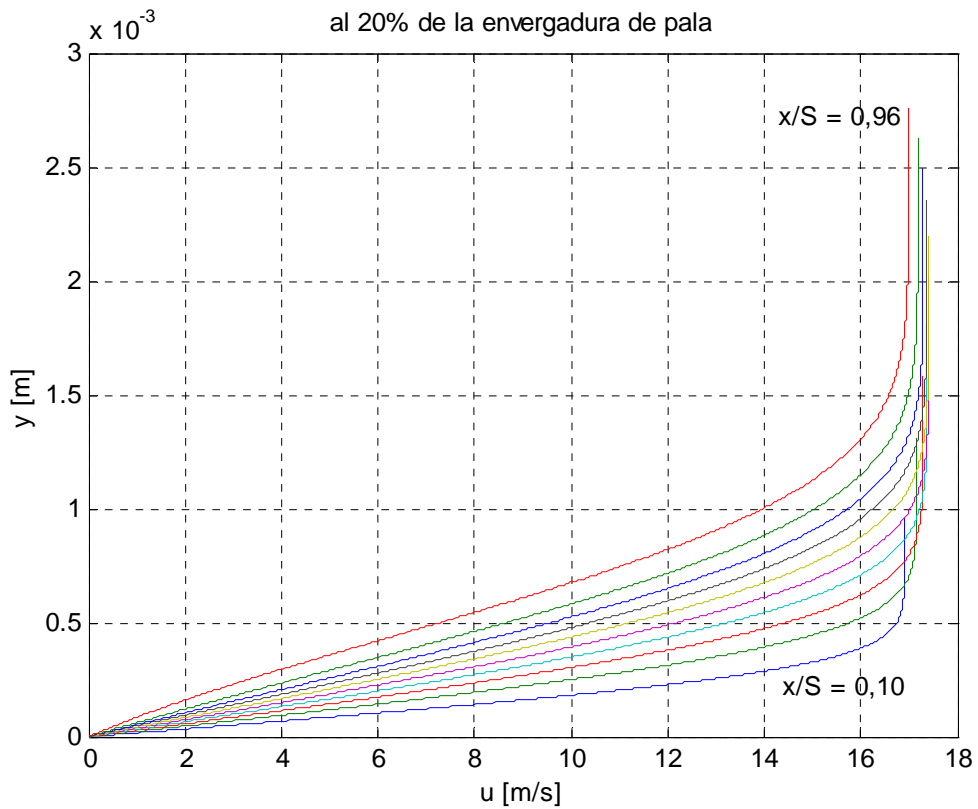


Figura 4.18 Perfiles de la velocidad según cuerda,  $u$ , sobre extradós, al 20%b.

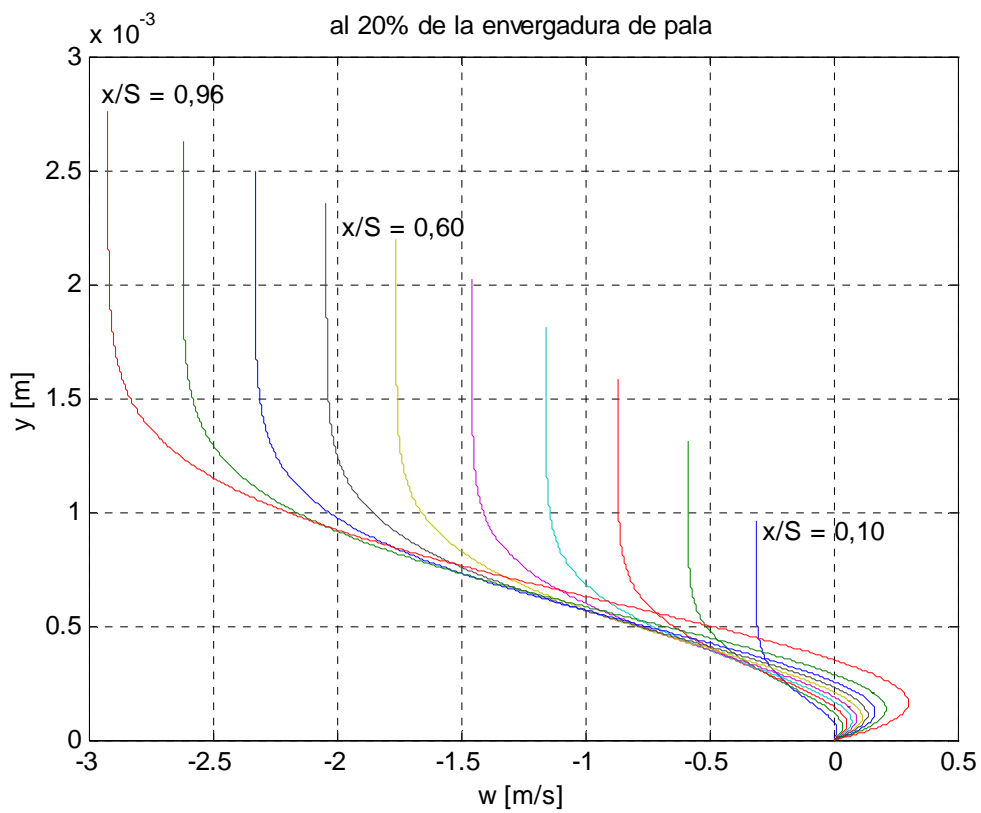


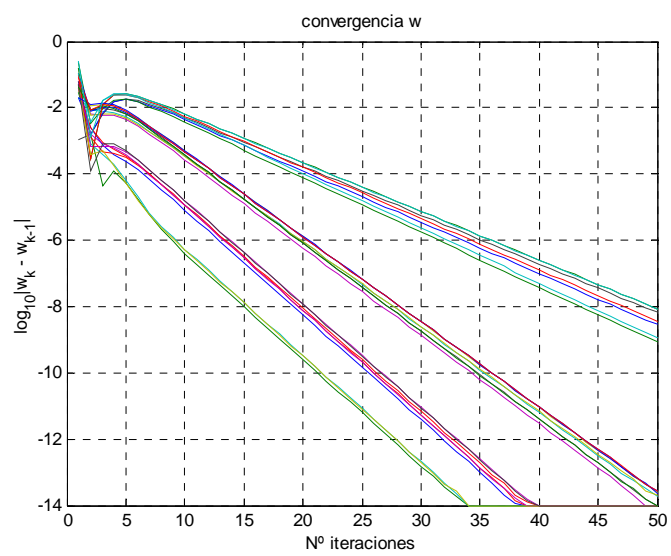
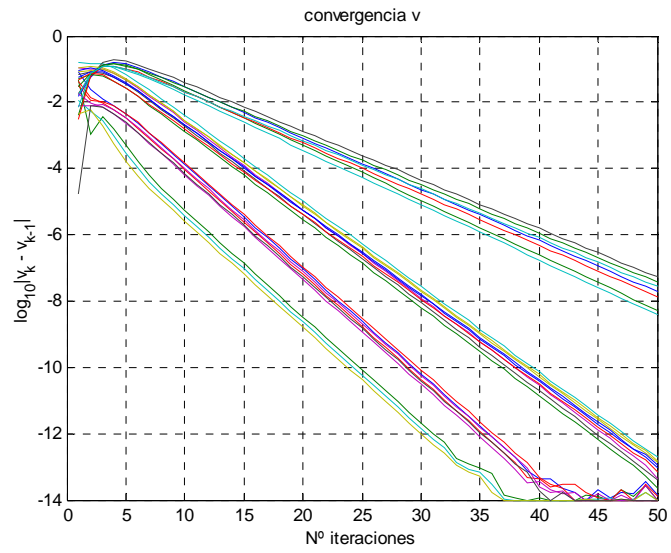
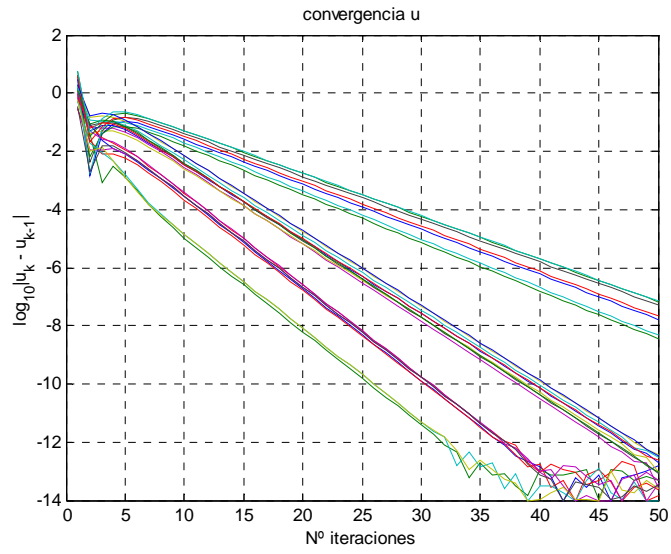
Figura 4.19 Perfiles de la velocidad según envergadura,  $w$ , sobre extradós, al 20%b.

La historia de la convergencia de los valores de las componentes del campo de velocidad, para determinadas posiciones según cuerda y envergadura, son mostrados en la serie de Figuras 4.20, donde se muestran en escala logarítmica, la variación de la diferencia de la componente de la velocidad entre iteraciones sucesivas.

El crecimiento de la capa límite es fácilmente reconocible a partir de dichas figuras precedentes, donde si bien no se ha mantenido fija a la escala vertical, se observa el incremento del espesor de la capa límite desde el borde de ataque hasta el borde de fuga, y desde la punta de pala hasta la raíz de la misma. Dichas figuras también muestran que las pendientes de los perfiles sobre la pared disminuyen a medida que el aire fluye desde el borde de ataque al borde de fuga. Este efecto es aún más pronunciado hacia la raíz, debido a las relativamente bajas velocidades de dicha región, que al encontrarse próximas al eje de rotación, presentan menores velocidades tangenciales.

Finalmente, las Figuras 4.21 a 4.24 muestran la distribución sobre la superficies de extradós de las tensiones viscosas de corte,  $\tau_{yx}$  y  $\tau_{yz}$ . Se observa que, en particular,  $\tau_{yx}$  muestra un comportamiento similar a la tensión de corte para la capa límite de Blasius (representado en la Figura 4.22), es decir, con un rápido decrecimiento desde el borde de ataque para la primera fracción de superficie, para posteriormente ir disminuyendo paulatinamente hacia el borde de fuga de la pala. Asimismo, esta tensión viscosa muestra un lento decrecimiento desde la punta de pala a la raíz. Por su parte, la distribución de  $\tau_{yz}$  muestra valores muy reducidos con respecto a los presentados por la distribución de  $\tau_{yx}$ . En consecuencia, la contribución de  $\tau_{yx}$  y  $\tau_{yz}$  a la resistencia por fricción resulta relativamente poco significativa.

De hecho, la comparación con la formulación de la capa límite de Blasius no es estricta, dado que esta última corresponde a un flujo con gradiente de presión nulo, (4.65.a), pero en este caso se utiliza la expresión dada por Blasius, si bien modificándola para considerar el cambio de la velocidad invíscida sobre el contorno superior de la capa límite (4.65.b). Una comparación más adecuada se correspondería, para cada gradiente de presión local, con un valor particular del coeficiente  $\beta$  para la familia de soluciones semejantes de Falkner-Skan. Si bien esto fue realizado en un número discreto de posiciones, se vuelve impráctico si se lo realiza para cada punto de la superficie de la pala.



Figuras 4.20 Historia de la convergencia de las componentes u, v y w, respectivamente.

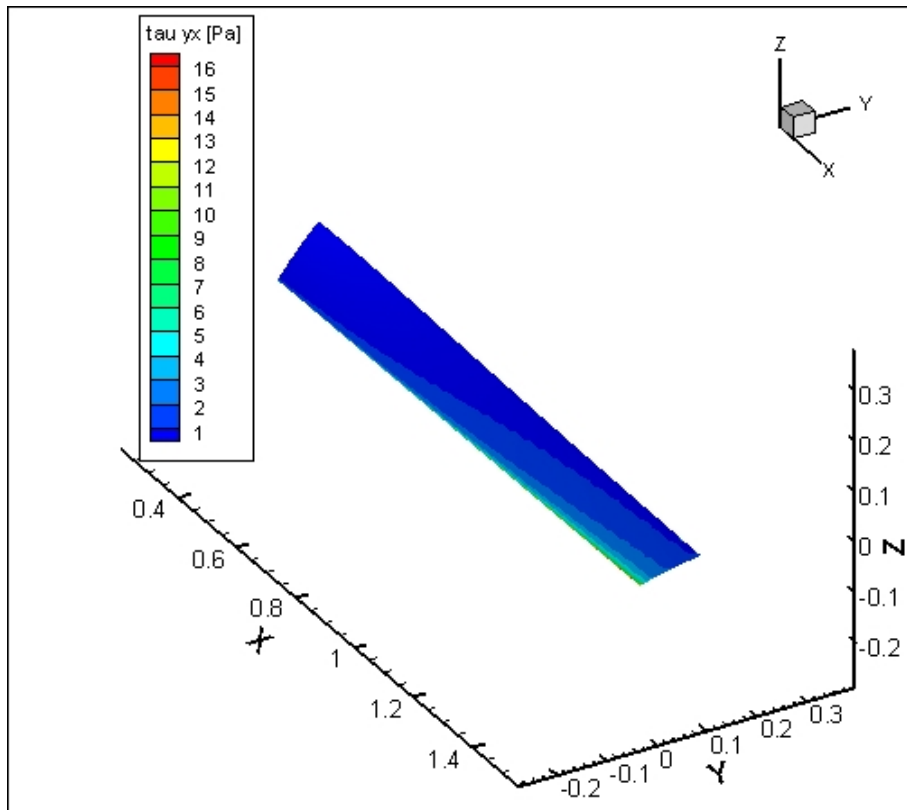


Figura 4.21 Distribución de la tensión cortante viscosa  $\tau_{yx}$  sobre el extradós de la pala.

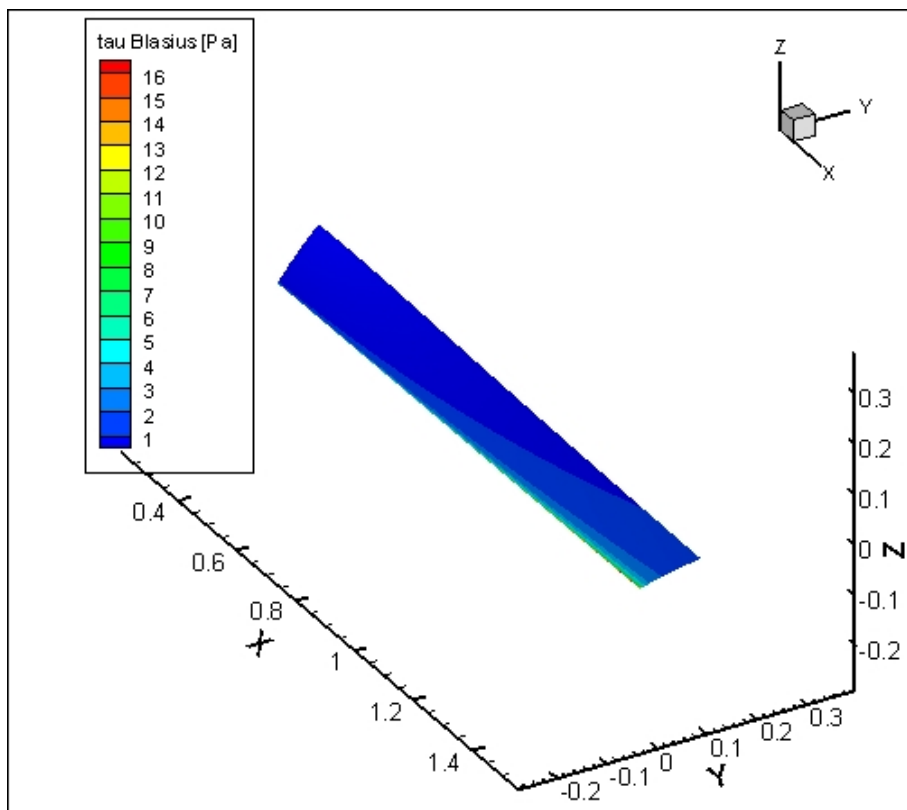


Figura 4.22 Distribución de la tensión cortante viscosa  $\tau_{yx}$  sobre el extradós de la pala, considerando un flujo de Blasius casi equivalente.



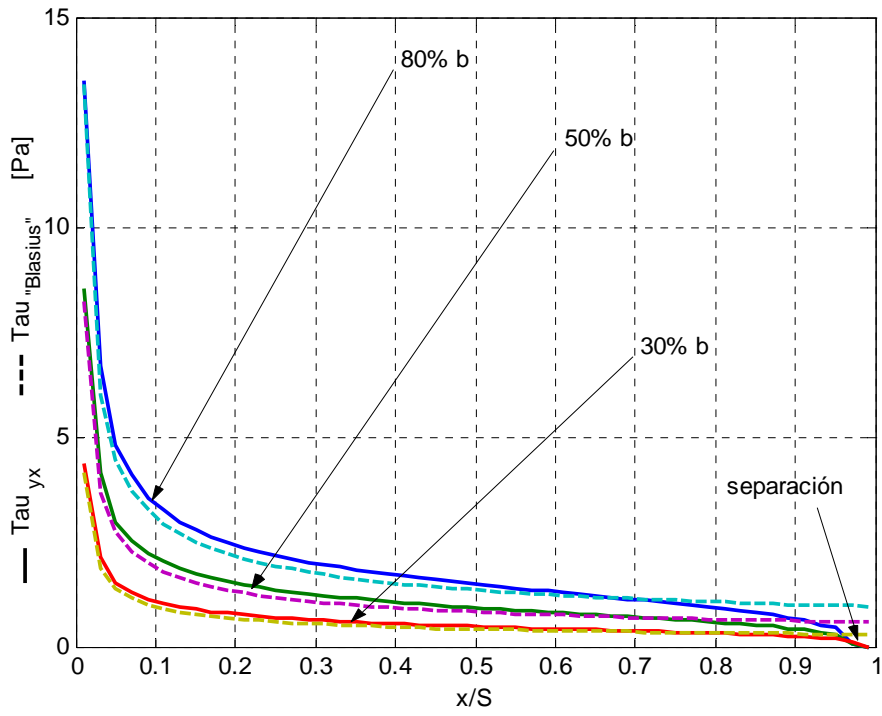


Figura 4.23 Distribución de la tensión cortante viscosa  $\tau_{yx}$  sobre la pala, y su comparación con un flujo de Blasius casi equivalente, para determinadas posiciones según envergadura.

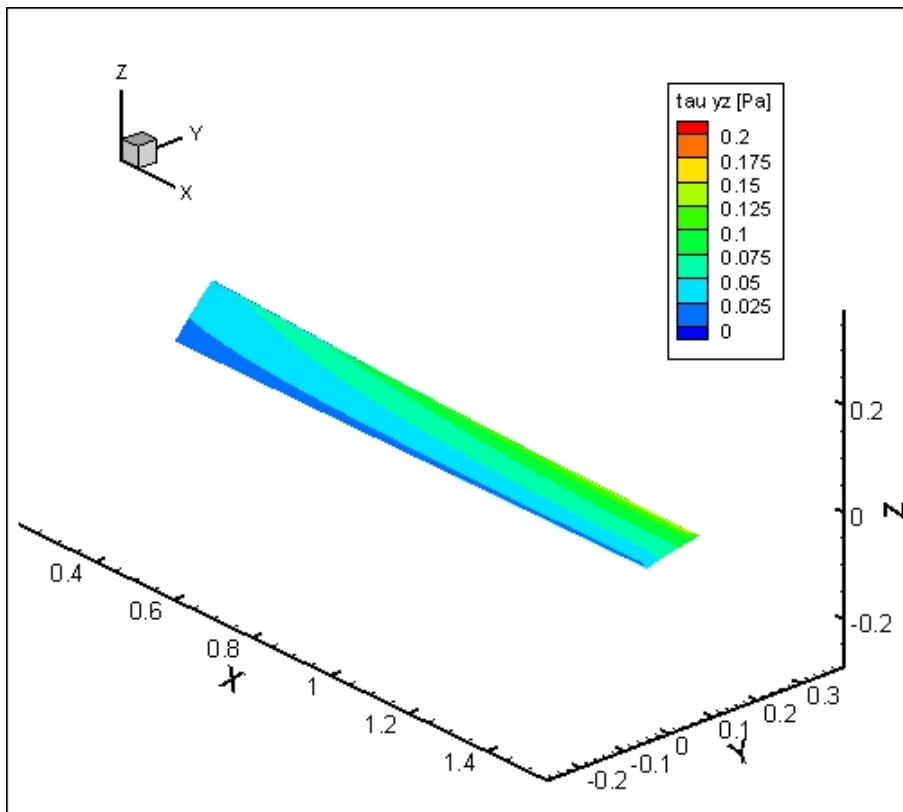


Figura 4.24 Distribución de la tensión cortante viscosa  $\tau_{yz}$  sobre el extradós de la pala.

$$\tau_w^B(x) = 0,332\mu U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \quad (4.65.a)$$

$$\tau_{yx}^{B'}(x, y=0, z) \approx 0,332\mu u_{NV}(x, z) \sqrt{\frac{u_{NV}(x, z)}{\nu x}} \quad (4.65.b)$$

De todas formas, se considera que la aproximación utilizada es válida, y tal como se muestra en la Figura 4.23 se evidencia que en las porciones de superficie donde actúa un gradiente de presiones favorable, la tensión sobre la pared es mayor a la determinada por la aproximación a Blasius. Por otra parte, en la zona del gradiente adverso, la tensión en la pared disminuye por debajo de los valores predichos por la aproximación al flujo de Blasius. En el caso del flujo de Blasius no se presenta separación alguna, pero por el contrario, en el presente problema la separación del flujo en proximidades del borde de fuga de la pala se evidencia dado que la tensión sobre la pared se ha anulado. El presente ejemplo fue definido -tanto en lo referente a la geometría de la pala como a las condiciones de trabajo- para obtener una capa límite laminar extensiva que a lo sumo se separe en la última porción de la pala. En este caso, la separación tiene lugar alrededor del 97% de la cuerda.

Otras comparaciones presentadas con la finalidad de contrastar los resultados del presente trabajo se refieren al espesor de la capa viscosa y a los espesores de desplazamiento y de cantidad de movimiento de la capa límite. En las expresiones (4.66-68) se presentan las correspondientes definiciones, basados en este caso solamente para la corriente dirigida según la cuerda, así como los valores que tendrían estos espesores mediante la aproximación al flujo de Blasius, indicados mediante el supraíndice 'B'.

$$\delta(x, z) = \left\{ y \mid u(x, y, z) \equiv 0,99u_{NV}(x, z) \right\} \quad \delta^{B'}(x, z) \cong 5,0 \sqrt{\frac{\nu x}{u_{NV}(x, z)}} \quad (4.66)$$

$$\delta_1(x, z) = \int_0^\infty [1 - u(x, y, z) / u_{NV}(x, z)] dy \quad \delta_1^{B'}(x, z) = 1,721 \sqrt{\frac{\nu x}{u_{NV}(x, z)}} \quad (4.67)$$

$$\delta_2(x, z) = \int_0^\infty [u(x, y, z) / u_{NV}(x, z)] [1 - u(x, y, z) / u_{NV}(x, z)] dy \quad (4.68)$$

$$\delta_2^{B'}(x, z) = 0,664 \sqrt{\frac{\nu x}{u_{NV}(x, z)}} \quad .$$

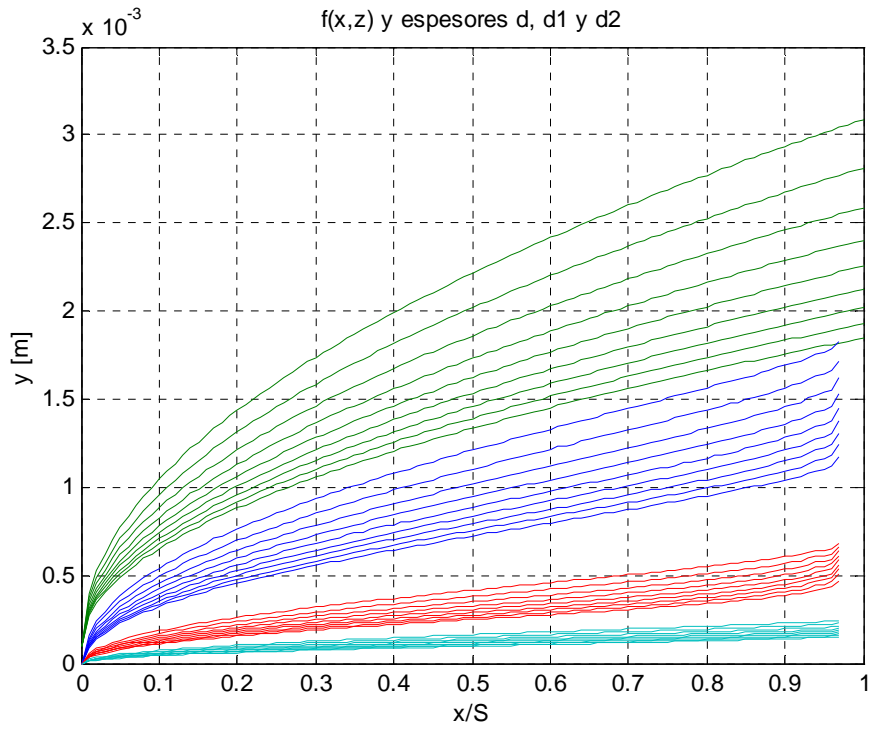
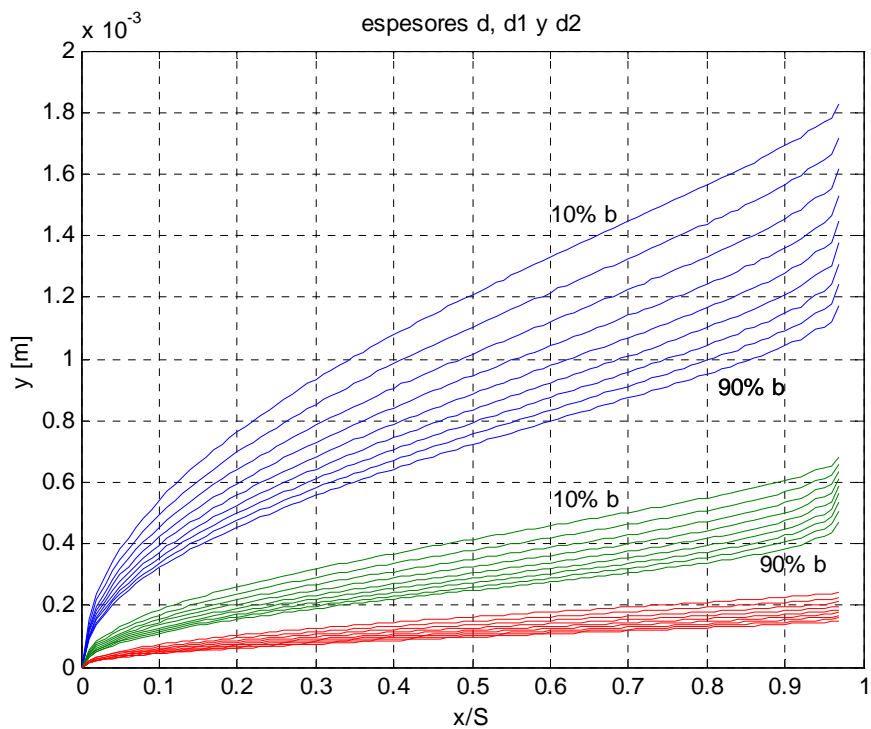


Figura 4.25 Espesores de la capa viscosa y límite del dominio físico



— espesor capa límite      — espesor de desplazamiento      — espesor cantidad mov.

Figura 4.26 Espesores de la capa límite sobre el extradós de la pala

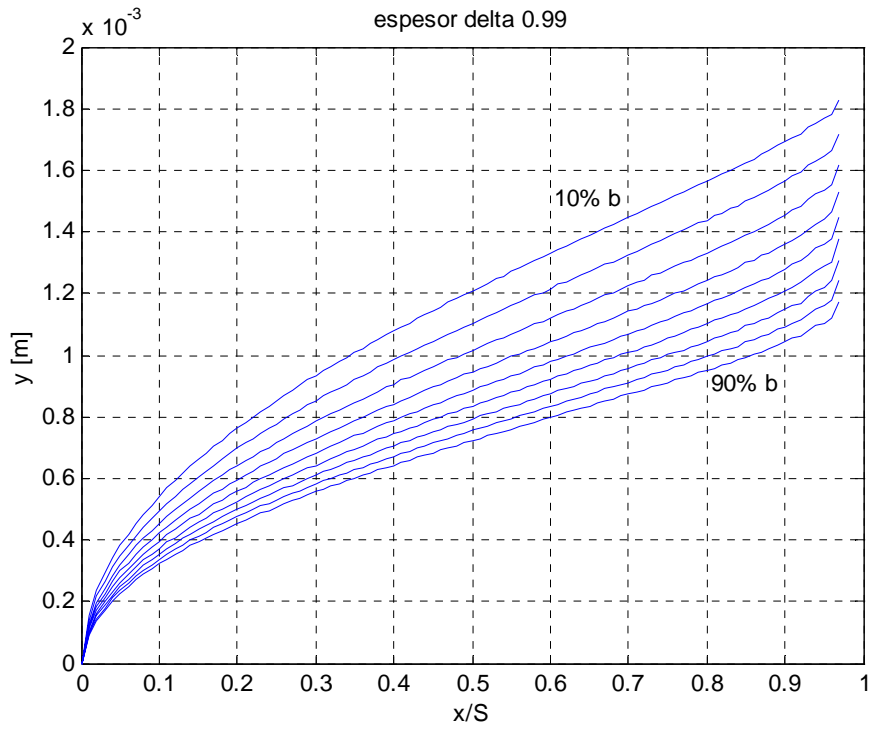


Figura 4.27 Distribución del espesor de la capa viscosa sobre el extradós de la pala

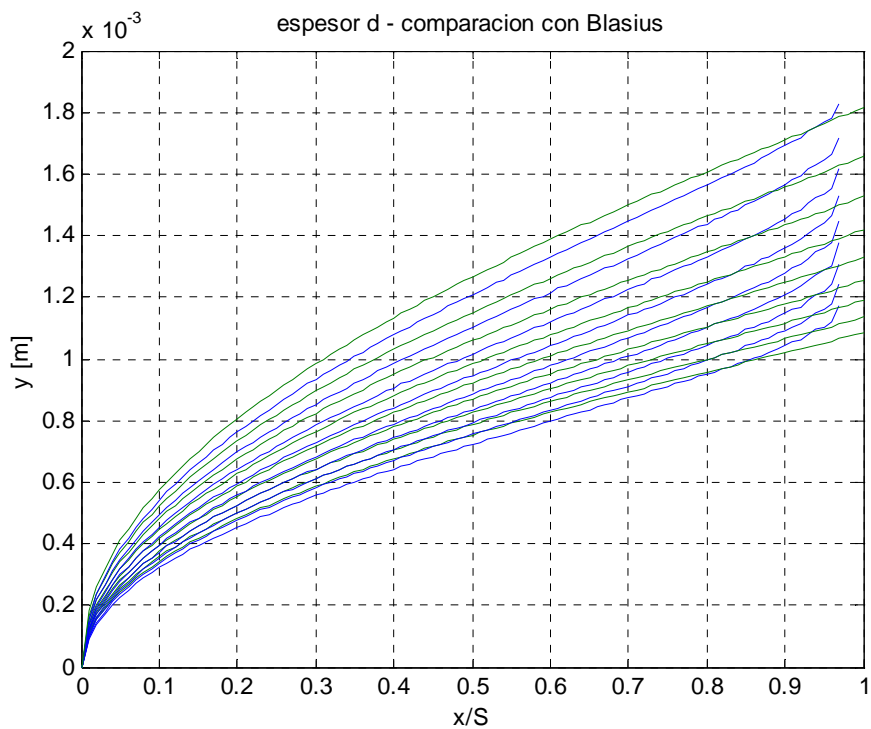


Figura 4.28 Comparación del espesor de la capa viscosa con la solución aproximada a Blasius

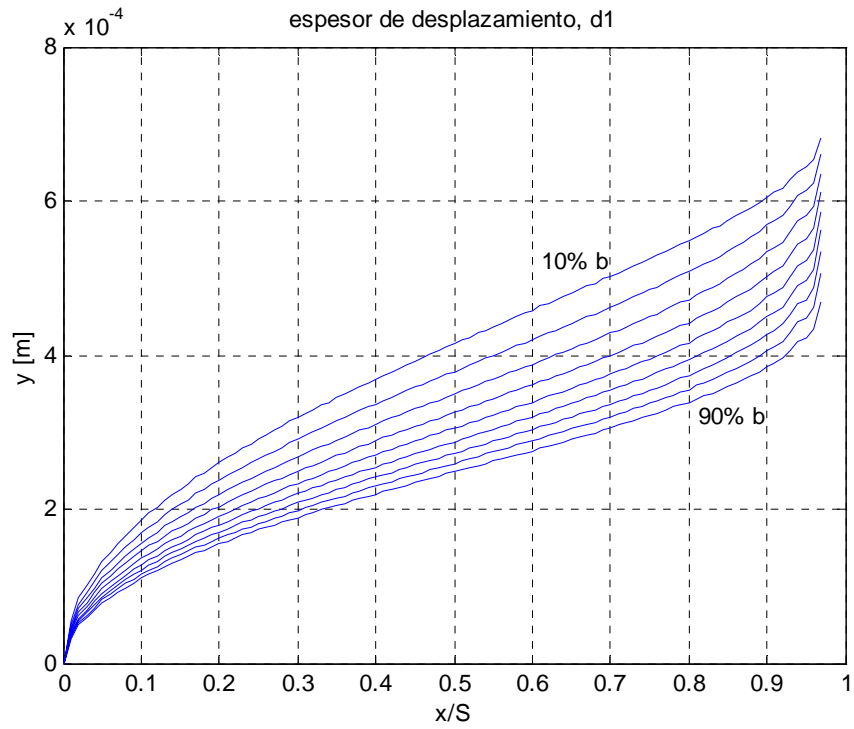


Figura 4.29 Distribución del espesor de desplazamiento sobre el extradós de la pala.

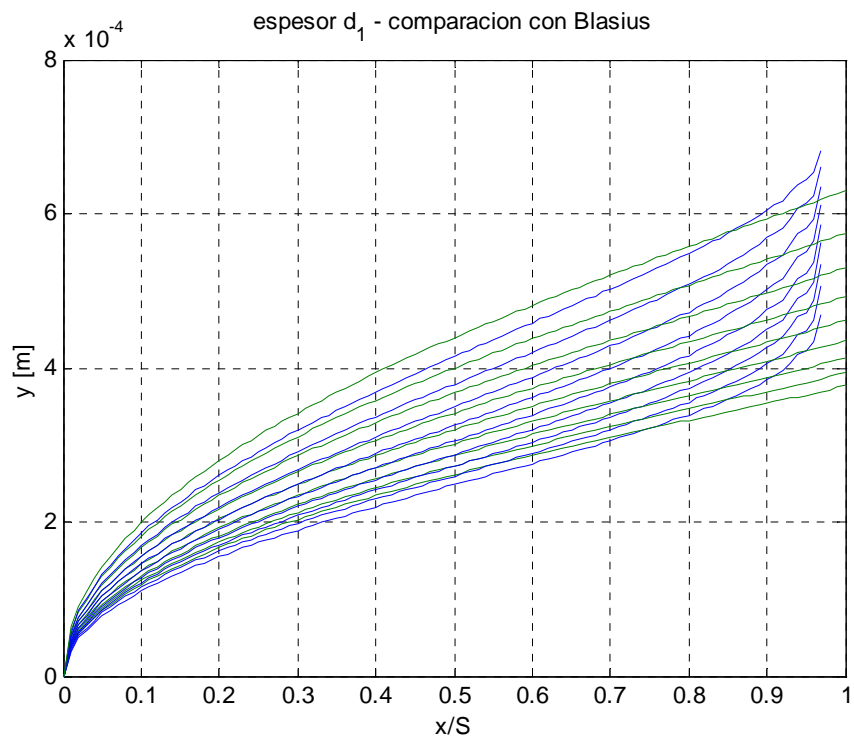


Figura 4.30 Comparación del espesor de desplazamiento con la solución aproximada a Blasius —

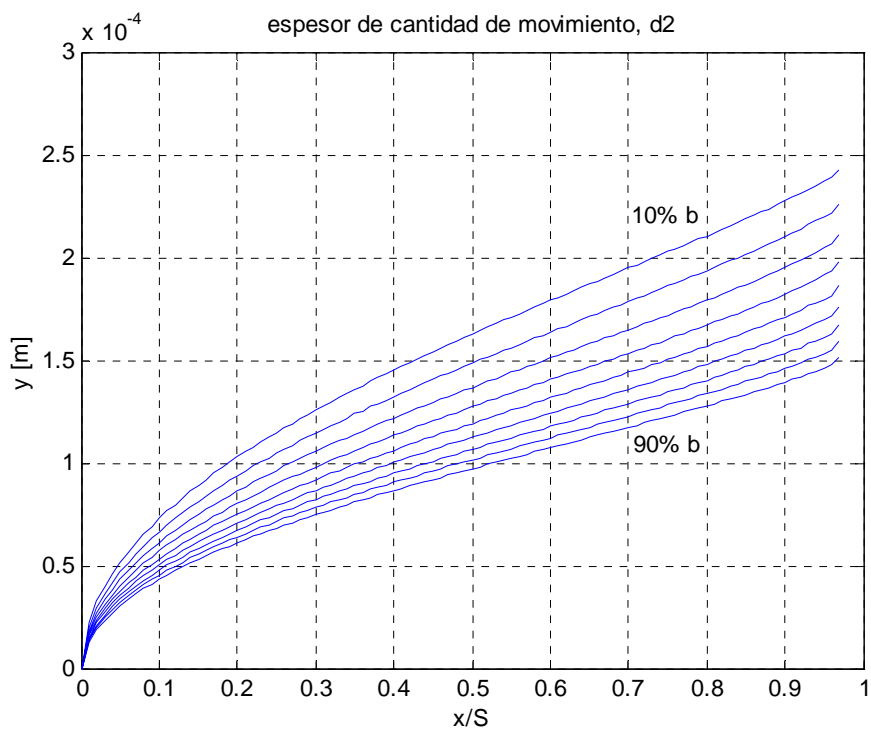


Figura 4.31 Distribución del espesor de cantidad de movimiento sobre el extradós de la pala.

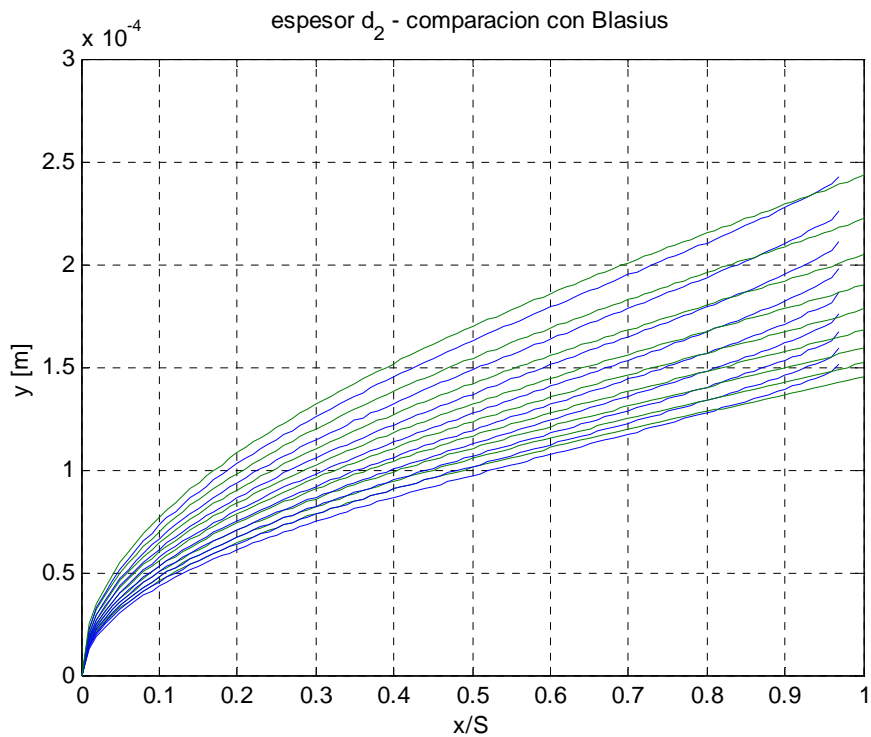


Figura 4.32 Comparación del espesor de cantidad de movimiento con la solución aproximada a Blasius —

Estos resultados se grafican en la serie de Figuras 4.25 a 4.32. En la Figura 4.25 se verifica que el dominio físico que define al dominio computacional es adecuado para la resolución numérica de las ecuaciones, dado que supera suficientemente al espesor de la capa límite, ocupando el campo viscoso aproximadamente unos dos tercios del dominio físico.

Consecuentemente con la aproximación a la línea de separación, los espesores muestran un súbito incremento, superando localmente los valores de los espesores del modelo aproximado de Blasius. Otro resultado evidenciado por la distribución de los espesores de este ejemplo, es que por la presencia de los gradientes de presión favorables sobre la primera mitad de la pala, los espesores determinados numéricamente resultan menores que los propuestos por el modelo aproximado al flujo de Blasius. Los gradientes de presión desfavorables de la segunda mitad de la pala inducen el incremento de los espesores, valores que terminan superando los correspondientes a la aproximación al flujo de Blasius, para posiciones ubicadas entre el 70 y el 80% de la cuerda local.

Es asimismo en la Figura 4.33 y en su detalle, Figura 4.34, que se observan las zonas de separación, dado que los ángulos de las líneas de corriente límites definidas sobre la propia superficie de la pala, (ver definiciones en Apéndice 1) se aproximan a los 90 grados en el último 5% de la cuerda local, denotando la proximidad de la condición de tensiones  $\tau_{yx}$  nulas sobre la superficie. Por su parte, tanto la Figura 4.35 como su detalle, Figura 4.36, muestran el comportamiento de las líneas de corriente del flujo invíscido, las cuales describen trayectorias curvadas hacia la raíz de pala por la composición de las velocidades del viento y de rotación.

La transición a capa límite turbulenta se predice cuando, de acuerdo al criterio de Michel (Gandía *et al.*, 1992), se satisface la siguiente relación

$$\text{Re}_{\delta_2} > 1,174 \left( 1 + \frac{22400}{\text{Re}_x} \right) \text{Re}_x^{0,46}, \quad (4.69)$$

donde  $\text{Re}_{\delta_2}$  denota el número de Reynolds basado en el espesor de cantidad de movimiento de la capa límite y  $\text{Re}_x$  es el número de Reynolds *local*, medido desde el borde de ataque de la pala y considerando el flujo dirigido según cuerda,

$$\text{Re}_x = u_{NV} x / \nu \quad (4.70)$$

siendo  $\nu$  la viscosidad cinemática del aire. En la Figura 4.37 se presenta la distribución de este último grupo adimensional, y dado que no se satisface la relación (4.69) el flujo sobre la pala puede suponerse completamente laminar, premisa base del presente trabajo.

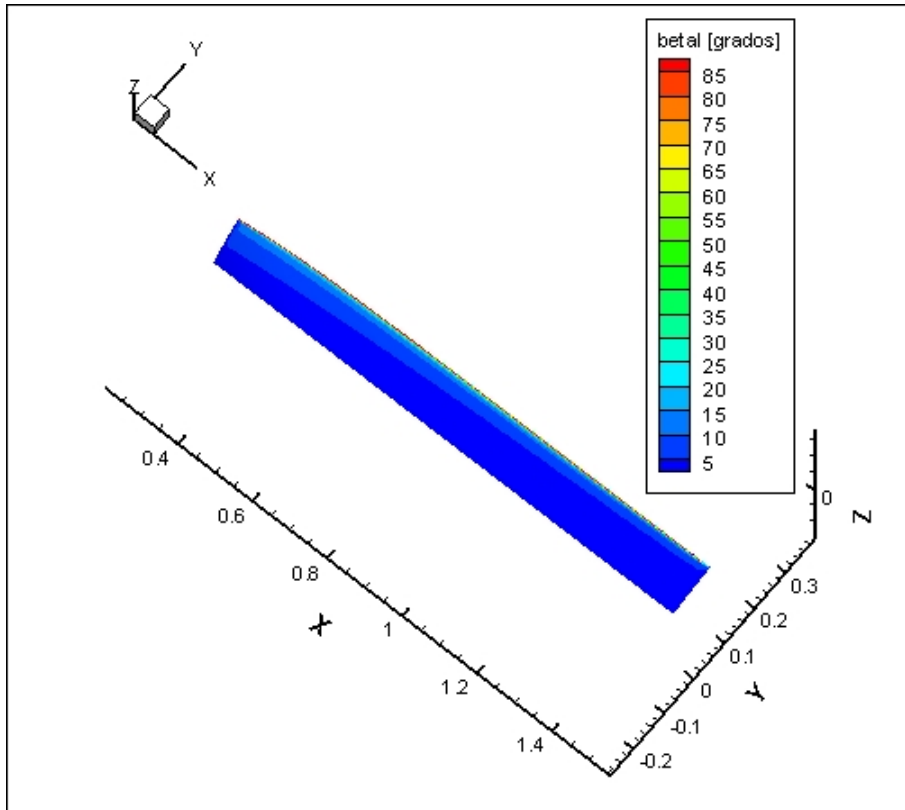


Figura 4.33 Ángulos de la línea de corriente límite sobre el extradós de la pala.

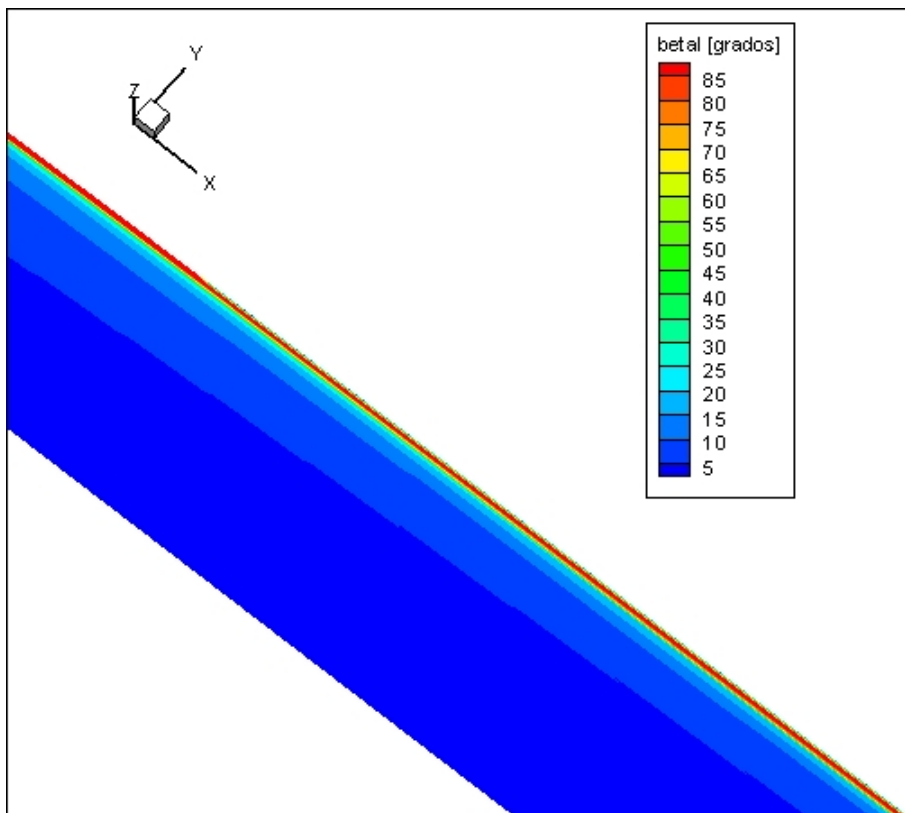


Figura 4.34 Ángulos de la línea de corriente límite sobre el extradós de la pala (detalle)



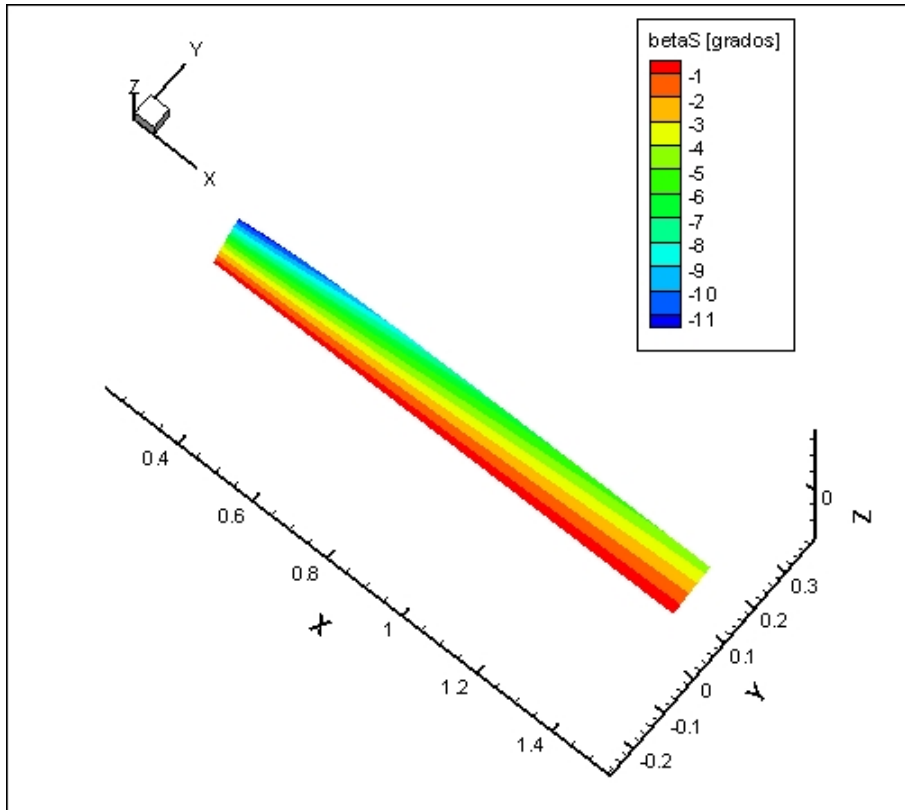


Figura 4.35 Ángulos de la línea de corriente invíscida sobre el extradós de la pala.

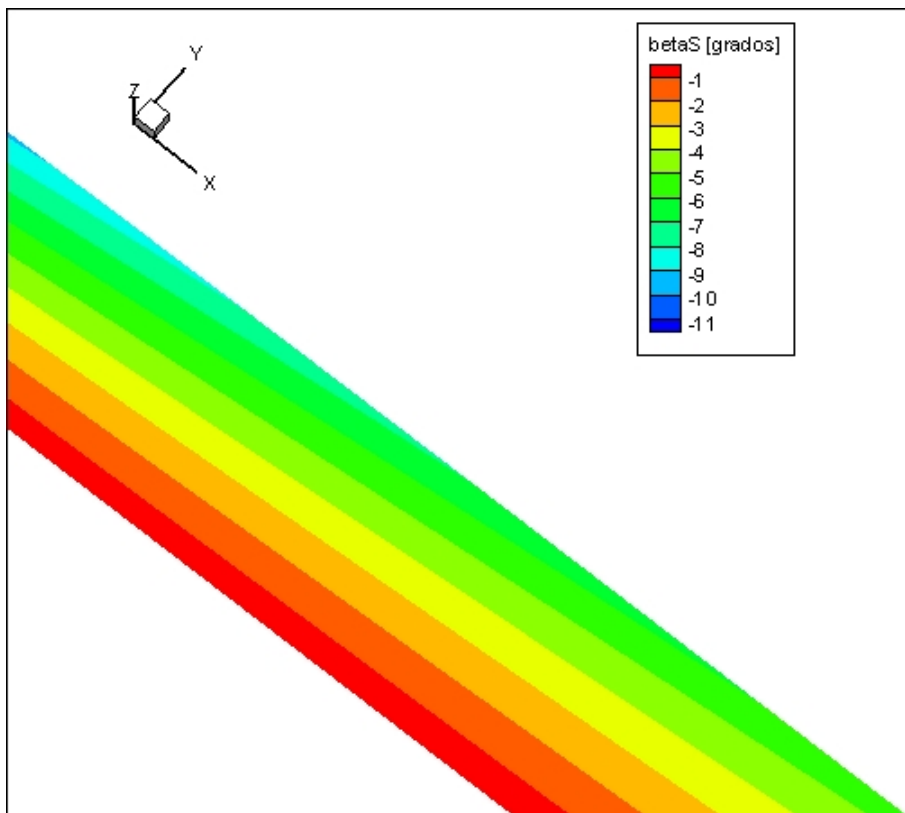


Figura 4.36 Ángulos de la línea de corriente invíscida sobre el extradós de la pala (detalle).

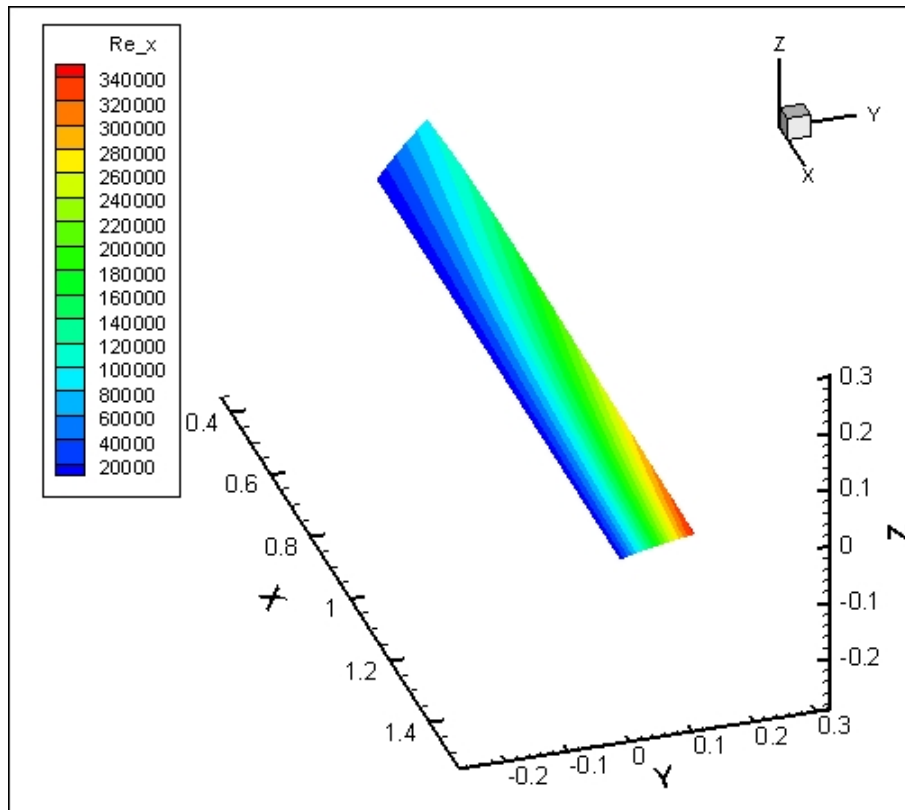


Figura 4.37 Distribución del número de Reynolds local sobre el extradós de la pala.

#### 4.8. CONCLUSIONES

Se ha presentado un modelo numérico de interacción entre el flujo no viscoso y la capa límite laminar con la finalidad de mejorar la representación del flujo actuante sobre una turbina eólica de eje horizontal. Modelos más realistas sirven de base a un diseño integrado desde los puntos de vista aerodinámico y aeroacústico, con el objetivo de lograr secciones de pala silenciosas. Adicionalmente, un mejor entendimiento de los fenómenos aerodinámicos involucrados conlleva a un diseño de pala más durable y eficiente, con la consecuente reducción efectiva de costos.

Los resultados presentados se restringen al desarrollo de una capa límite tridimensional que está adherida a la superficie de la pala, dado que una separación extensiva de la capa límite sobre la superficie del cuerpo conduce a un gradiente de presiones cuya distribución diferirá del determinado bajo condiciones no viscosas. Asimismo, el presente análisis considera un desarrollo exclusivamente laminar de la capa límite, considerándose a futuro la inclusión de la transición a régimen turbulento para el flujo en la capa viscosa.

Dado que el desarrollo de la capa viscosa es gobernado por ecuaciones diferenciales aproximadas (las denominadas ecuaciones de la capa límite de Prandtl) que ya no presentan la caracterización elíptica de las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles y estacionarias, el análisis del flujo viscoso se realiza considerando a la pala individualmente. La presencia de más de una pala en la turbina origina un fenómeno de interferencia entre las palas -el cual será más o menos pronunciado en función del número de las mismas-, pero este efecto es evaluado mediante el análisis invíscido y resulta incluido en la condición de contorno a aplicar sobre cada borde exterior de las capas viscosas desarrolladas sobre cada superficie de cada pala.

De particular interés resulta comparar los resultados obtenidos para el campo de velocidades relativo a la pala rotante con un modelo cuyo comportamiento fluidodinámico está conceptualmente relacionado con el presente estudio. Se trata del problema de la placa rotante descrito por Pai (1956). En el mismo, el fluido en proximidades de una superficie rotante es forzado a dirigirse en dirección radial hacia el exterior, dando lugar a un denominado flujo secundario, originado por el hecho de que no existe un gradiente radial de presiones que pueda balancear las fuerzas centrífugas. Este efecto también es observado en las figuras para la componente de velocidad según envergadura,  $w$ , donde se presenta una reversión del flujo en proximidad de la pared, correspondiendo a valores positivos de esta componente la dirección del flujo hacia la punta de pala.

Debe recalarse que la reversión mostrada en las distribuciones de velocidad  $w$  no representan una separación del flujo. Si en lugar del sistema coordenado local utilizado, el cual resultara definido por la geometría de la pala, se hubiera utilizado un sistema curvilíneo que siguiera a las líneas de corriente del flujo no viscoso, entonces los valores del campo de velocidad secundario (que correspondería a un flujo cruzado) deben ser nulos tanto sobre la pared como sobre el límite externo de la capa viscosa. En consecuencia, para este último sistema coordenado, el flujo secundario mostraría un comportamiento similar al flujo semejante descrito por Fogarty (1951) para la capa límite (lógicamente, corresponde a un modelo aproximado dado la no semejanza del problema más general) sobre una placa plana rotante, o aun el flujo en proximidad de un disco infinito en rotación (conocido como bomba de von Kármán y descrito por White (1991) y Panton (1984)), donde la componente cruzada del flujo no presenta reversión alguna.



# APÉNDICE 1

## CAPA LÍMITE TRIDIMENSIONAL

### A1.1. ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO RELATIVO A EJES MÓVILES

La segunda ley de Newton establece la proporcionalidad, en una referencia inercial, entre la fuerza aplicada y la resultante aceleración de un sistema. Cuando el sistema es representado por una partícula fluida, esta ley se expresa mediante la ecuación

$$\rho \vec{a} \equiv \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = \vec{f} \quad (\text{A1.1})$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $\vec{V}$  representa la velocidad de la partícula y  $\vec{f}$  es la fuerza aplicada por unidad de volumen sobre la partícula de fluido. La derivada sustancial del vector velocidad representa la derivación siguiendo el movimiento de la partícula, con sus términos local y convectivo.

Dado que la segunda ley de Newton es solamente válida si  $\vec{a}$  es la aceleración medida con respecto a un sistema coordenado inercial (es decir,  $\vec{a}$  representa una aceleración absoluta) la utilización de un sistema de referencia no inercial obliga la modificación de la formulación de la mencionada ley.

Por ejemplo, en problemas que involucran flujos sobre superficies sólidas móviles, generalmente resulta conveniente seleccionar un sistema de referencia respecto del cual dicha superficie sólida se mantiene en reposo. En esos casos, la aceleración de una partícula de fluido respecto de un sistema de referencia móvil (que, en general, presenta un movimiento combinado de traslación y rotación) diferirá de aquella medida con respecto a una terna inercial.

Considerando que el sistema de referencia móvil se caracteriza, desde un determinado sistema de referencia inercial, por una rotación con velocidad angular  $\vec{\Omega}(t)$  alrededor de un eje a través del punto origen de la terna móvil, el cual se mueve también con una aceleración lineal  $\vec{a}_0(t)$ , la aceleración absoluta de una partícula –medida desde el sistema inercial– resulta entonces dada por

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \frac{D\vec{V}}{Dt} + 2(\vec{\Omega} \times \vec{V}) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \quad (\text{A1.2})$$

donde  $\vec{r}$  representa el vector posición relativa de la partícula que se mueve respecto del origen de la terna móvil y  $\vec{V}$  es el vector velocidad relativa de la partícula con respecto a la terna móvil (White, 1991). Ahora, la derivada sustancial  $D\vec{V}/Dt$  representa un término de aceleración del elemento fluido con relación a la referencia móvil.

Consecuentemente, la ecuación de la cantidad de movimiento, en un sistema de referencia que posee un movimiento genérico resulta

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = \vec{f} - \vec{f}_0 - 2\rho(\vec{\Omega} \times \vec{V}) - \rho \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) - \rho \left( \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r} \right). \quad (\text{A1.3})$$

La ecuación del movimiento de un fluido en una terna móvil resulta entonces idéntica a aquélla en un sistema de referencia absoluto, previa incorporación de términos adicionales, los cuales reciben la denominación de fuerzas ficticias o aparentes (Batchelor, 1967).

El término  $-2\rho(\vec{\Omega} \times \vec{V})$  corresponde a la denominada fuerza deflectora, o fuerza de Coriolis, por unidad de volumen de la partícula, la cual resulta perpendicular tanto a  $\vec{V}$  como a  $\vec{\Omega}$ . Por su parte,  $-\rho \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$  representa la fuerza centrífuga por unidad de volumen de la partícula.  $-\vec{f}_0 = -\rho \vec{a}_0$  es la fuerza aparente por unidad de volumen, que compensa la aceleración traslatoria de la referencia móvil. En general, no se define con ningún nombre en particular al término remanente,  $-\rho \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r}$ .

En el caso en que el sistema de referencia móvil se caracterice solamente por una rotación estacionaria, la ecuación (A1.3) se reduce a

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = \vec{f} - 2\rho(\vec{\Omega} \times \vec{V}) - \rho \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}). \quad (\text{A1.4})$$

Expresando la fuerza por unidad de volumen  $\vec{f}$  mediante las fuerzas superficiales y másicas por unidad de volumen, ignorando los efectos magnetohidrodinámicos y reordenando la ecuación para expresarla en términos de aceleración, resulta

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + 2(\vec{\Omega} \times \vec{V}) + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \frac{\vec{\nabla}[\tau]}{\rho} + \vec{g} \quad (\text{A1.5})$$

donde  $[\tau]$  representa el tensor de tensiones viscosas,  $p$  denota el campo de presiones estáticas y  $\vec{g}$  es el vector aceleración de la gravedad.

Bajo la condición de régimen laminar, y considerando asimismo que tanto la densidad como la viscosidad son constantes, resulta

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + 2(\vec{\Omega} \times \vec{V}) + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{V} + \vec{g} \quad (\text{A1.6})$$

donde  $\nu = \mu/\rho$  representa la viscosidad cinemática del fluido.

## A1.2. ECUACIONES DE GOBIERNO DEL FLUJO TRIDIMENSIONAL

### A1.2.1. Rotación uniforme alrededor de un eje coordenado

Sea una superficie de gran radio de curvatura, que rota en su plano medio con velocidad angular constante. Bajo la condición de régimen estacionario y laminar, considerando asimismo que tanto la densidad como la viscosidad son asumidas constantes y despreciando los efectos gravitatorios resultan, en un sistema coordenado cartesiano adherido a la superficie rotante, las ecuaciones de gobierno

$$\vec{V} \cdot \vec{V} = 0 \quad (\text{A1.7})$$

y

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + 2(\vec{\Omega} \times \vec{V}) + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{V}. \quad (\text{A1.8})$$

Suponiendo que la superficie yace sobre su plano medio, y adoptando un sistema coordenado ortogonal adherido a la superficie rotante de manera que los ejes coordenados  $x$  y  $z$  yacen sobre dicho plano y el eje  $y$  representa la dirección del vector velocidad angular de rotación, coincidente con la del versor normal a la superficie, entonces

$$\vec{\Omega} = \Omega \hat{j}. \quad (\text{A1.9})$$

Introduciendo las componentes de la velocidad  $(u,v,w)$  según las coordenadas  $(x,y,z)$  -tal como se representa en la Figura A1.1- resultan, para los términos de aceleración de Coriolis y centrípeta, respectivamente,

$$2(\vec{\Omega} \times \vec{V}) = 2\Omega(w\hat{i} - u\hat{k}) \quad (\text{A1.10})$$

y

$$\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = -\Omega^2(x\hat{i} + z\hat{k}). \quad (\text{A1.11})$$

Por otra parte, la ecuación de continuidad bajo condiciones de incompresibilidad (A1.7) resulta

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{A1.12})$$

y las tres componentes escalares de la ecuación de cantidad de movimiento (A1.8), son

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + 2\Omega w - x\Omega^2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (\text{A1.13})$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (\text{A1.14})$$

y

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} - 2\Omega u - z\Omega^2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + v \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \quad (\text{A1.15})$$

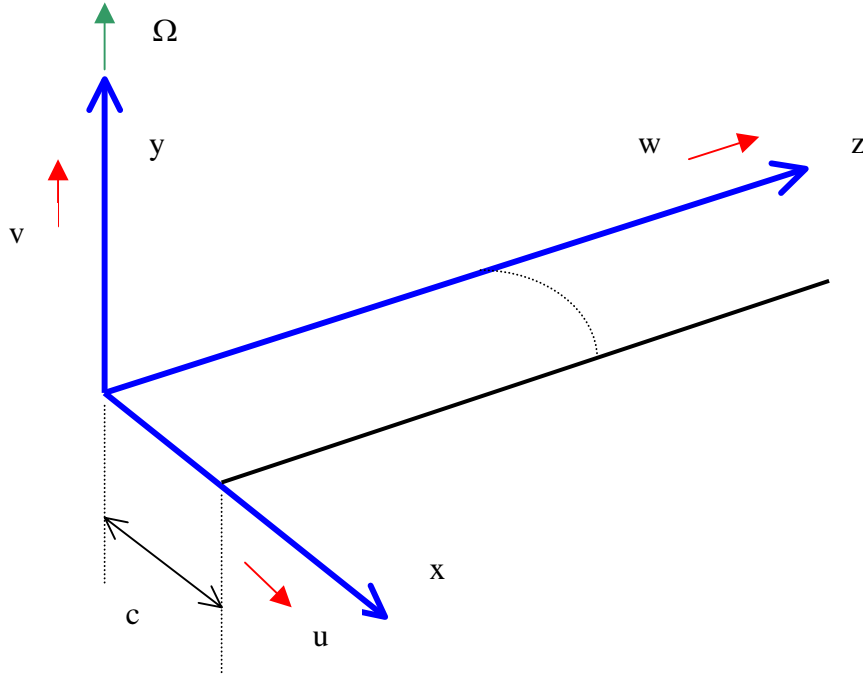


Figura A1.1 Componentes de velocidad asociadas a la terna adherida a la superficie rotante.



### A1.2.2. Adimensionalización de las ecuaciones de gobierno

Por conveniencia, las ecuaciones (A1.12-15) se adimensionalizan, considerando a la velocidad incidente,  $U$ , para la adimensionalización de las componentes del campo de velocidades

$$\tilde{u} = \frac{u}{U} \quad \tilde{v} = \frac{v}{U} \quad \tilde{w} = \frac{w}{U} \quad (\text{A1.16})$$

y la cuerda,  $c$ , como el parámetro con el que se adimensionalizan de las coordenadas cartesianas, siendo

$$\tilde{x} = \frac{x}{c} \quad \tilde{y} = \frac{y}{c} \quad \tilde{z} = \frac{z}{c}. \quad (\text{A1.17})$$

Introduciendo las siguientes definiciones, siendo  $B$  el radio de la pala en la punta,

$$\text{razón de velocidades en punta de pala,} \quad \sigma_{\infty} = \frac{\Omega B}{V_{\infty}} \quad (\text{A1.18})$$

basada en la velocidad del viento no perturbado,  $V_{\infty}$ ,

$$\text{razón de velocidades en punta de pala} \quad \sigma_0 = \frac{\Omega B}{V_0} \quad (\text{A1.19})$$

basada en la velocidad media del viento sobre el disco,  $V_0 = V_{\infty}(1-a)$ ,

$$\text{alargamiento de la pala} \quad \lambda = \frac{B}{c}, \quad (\text{A1.20})$$

$$\text{espesor adimensional de capa límite:} \quad \Delta = \frac{\delta}{c}, \quad (\text{A1.21})$$

$$\text{presión adimensional:} \quad \tilde{p} = \frac{p}{\rho U^2}, \quad (\text{A1.22})$$

$$\text{número de Reynolds:} \quad \text{Re} = \frac{Uc}{\nu} \quad (\text{A1.23})$$

y operando, resultan las ecuaciones de gobierno adimensionales, para la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} = 0 \quad (\text{A1.24})$$

cantidad de movimiento según cuerda,

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} + 2 \frac{\sigma_\infty}{\lambda} \tilde{w} - \tilde{x} \left( \frac{\sigma}{\lambda} \right)^2 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} \right) \quad (\text{A1.25})$$

cantidad de movimiento en dirección perpendicular a la pared,

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{z}} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{z}^2} \right) \quad (\text{A1.26})$$

y cantidad de movimiento según envergadura,

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} - 2 \frac{\sigma}{\lambda} \tilde{u} - \tilde{z} \left( \frac{\sigma}{\lambda} \right)^2 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{z}^2} \right). \quad (\text{A1.27})$$

### A1.3. ECUACIONES DE LA CAPA LÍMITE TRIDIMENSIONAL

#### A1.3.1. Análisis de órdenes de magnitud

Se encuentra bien establecido el hecho de que aun en el caso del flujo de un fluido de baja viscosidad, existen regiones del campo fluidodinámico donde los términos inerciales resultan del mismo orden de magnitud que los términos viscosos. Estos casos comprenden los flujos en zonas próximas a superficies, como así también a los flujos en regiones donde los contornos sólidos están ausentes, como en el caso de chorros de fluidos o las estelas que se forman detrás de obstáculos. En todos estos problemas, se observa que la transición de los valores de la velocidad hasta alcanzar la magnitud que corresponde a la de la corriente externa tiene lugar en una delgada franja y de manera pronunciada, por lo cual los gradientes de las tensiones viscosas resultan muy elevados.

El razonamiento de utilizar las simplificaciones inherentes a la consideración de una delgada capa donde los efectos inerciales y viscosos son del mismo orden de magnitud llevó a Prandtl hacia 1904 a proponer la famosa teoría de la capa límite.

Se observa que la longitud característica escogida hace que el término adimensional  $\partial \tilde{u} / \partial \tilde{x}$  no sobrepase el orden de magnitud 1 dentro del dominio considerado [Schlichting]. Entonces, adoptando el valor de la velocidad incidente como el orden de la velocidad según cuerda, resulta entonces como longitud característica el valor de la longitud de la cuerda del cuerpo (en un problema 2D) o de la cuerda media (en un problema 3D).

Fundamentándose en algunas soluciones exactas de las ecuaciones de Navier-Stokes, el espesor de la capa límite es proporcional a la raíz cuadrada de la viscosidad cinemática del fluido. En general, se puede decir que la capa viscosa es tanto más delgada cuanto mayor es el número de Reynolds. Es más, se admite, dadas las simplificaciones a introducir en las ecuaciones de Navier-Stokes, que el espesor de la capa límite es muy pequeño en comparación con la dimensión característica del cuerpo. Así, los órdenes de magnitud de las variables independientes que representan las coordenadas son

$$x = O(c) \quad y = O(\delta) \quad z = O(R) \quad (A1.28)$$

por lo que las variables adimensionales presentan los siguientes órdenes de magnitud

$$\tilde{x} = O(1) \quad \tilde{y} = O(\Delta) \lll O(1) \quad \tilde{z} = O(\lambda) \approx O(1) \quad (A1.29)$$

resultando además,

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = O(1) \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} = O(\Delta^{-1}) \ggg O(1) \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} = O(\lambda^{-1}) \approx O(1) \quad (A1.30)$$

y, cosecuentemente, en el análisis de los términos difusivos se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^2} \lll \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^2} \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{z}^2} \lll \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^2} \quad (A1.31)$$

indicando que se desprecia la difusión viscosa que no tenga lugar en la dirección a la normal a la pared.

Además, dado que se conoce la distribución del flujo no viscoso a una distancia  $\delta$  desde la superficie

$$\tilde{u}_\delta = O(1 + \sigma) \quad \tilde{w}_\delta = O(\sigma / \lambda) \quad (A1.32)$$

resulta, considerando que el término  $\partial \tilde{v} / \partial \tilde{y}$  es del mismo orden que el término  $\partial \tilde{u} / \partial \tilde{x}$  en la ecuación de continuidad, se tiene que

$$\tilde{v} = O[\Delta(1 + \sigma)] \quad (A1.33)$$

por lo cual resulta despreciable cuando se la compara con las componentes según cuerda y según envergadura, cuyos máximos órdenes de magnitud están dados por (A1.32)

Asimismo, dado que bajo las hipótesis de la capa límite los términos difusivos presentes en la ecuación de cantidad de movimiento son del mismo orden que los términos convectivos, resulta

$$\text{Re} = O(\Delta^{-2}) \quad (\text{A1.34})$$

y adimensionales

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} = 0, \quad (\text{A1.35})$$

$$\begin{array}{ccc} (1+\sigma)/1 & \Delta(1+\sigma)/\Delta & (\sigma/\lambda)/\lambda \\ (1+\sigma) & (1+\sigma) & \sigma/\lambda^2 \end{array}$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} + 2 \frac{\sigma}{\lambda} \tilde{w} - \tilde{x} \left( \frac{\sigma}{\lambda} \right)^2 = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} \right) \quad (\text{A1.36})$$

$$(1+\sigma)^2 \quad (1+\sigma)^2 \quad \frac{(1+\sigma)\sigma}{\lambda^2} \quad \frac{\sigma^2}{\lambda^2} \quad \frac{\sigma^2}{\lambda^2} \quad (\dots) \quad (1+\sigma)\Delta^2 [1 \quad \Delta^{-2} \quad \lambda^{-2}]$$

y

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{z}} = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{z}^2} \right), \quad (\text{A1.37})$$

$$\Delta(1+\sigma)^2 \quad \Delta(1+\sigma)^2 \quad \frac{\Delta(1+\sigma)\sigma}{\lambda^2} \quad (\dots) \quad \Delta(1+\sigma)\Delta^2 [1 \quad \Delta^{-2} \quad \lambda^{-2}]$$

entonces

$$O(\text{ecuación (A1.37)}) = \Delta \cdot O(\text{ecuación (A1.36)}) \quad (\text{A1.38})$$

y

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} - 2 \frac{\sigma}{\lambda} \tilde{u} - \tilde{z} \left( \frac{\sigma}{\lambda} \right)^2 = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{z}^2} \right). \quad (\text{A1.39})$$

$$\frac{(1+\sigma)\sigma}{\lambda} \quad \frac{(1+\sigma)\sigma}{\lambda} \quad \frac{\sigma^2}{\lambda^3} \quad (1+\sigma) \frac{\sigma}{\lambda} \quad \frac{\sigma^2}{\lambda} \quad (\dots) \quad \frac{\sigma}{\lambda} \Delta^2 [1 \quad \Delta^{-2} \quad \lambda^{-2}]$$

Aplicando entonces el análisis de órdenes de magnitud a los términos de las ecuaciones de gobierno, resultan las ecuaciones aproximadas de la capa límite,

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} = 0, \quad (\text{A1.40})$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} + 2 \frac{\sigma}{\lambda} \tilde{w} - \tilde{x} \left( \frac{\sigma}{\lambda} \right)^2 = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right) \quad (\text{A1.41})$$

y

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} - 2 \frac{\sigma}{\lambda} \tilde{u} - \tilde{z} \left( \frac{\sigma}{\lambda} \right)^2 = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2} \right), \quad (\text{A1.42})$$

donde la ecuación de cantidad de movimiento según la normal a la pared se reduce a

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} \approx 0 \quad (\text{A1.43})$$

indicando que son despreciables las variaciones de presión en el ancho de la delgada capa viscosa.

Dado que la solución del flujo invíscido a imponer sobre el borde de la capa viscosa,  $y \cong \delta(\tilde{x}, \tilde{z})$ , resulta representada por las componentes de velocidad

$$\tilde{U} = \tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{z}) \quad \tilde{W} = \tilde{W}(\tilde{x}, \tilde{z}), \quad (\text{A1.44})$$

las componentes del gradiente del campo de presiones resultan

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} = -\tilde{U} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} - \tilde{W} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{z}} - 2 \frac{\sigma}{\lambda} \tilde{W} + \tilde{x} \left( \frac{\sigma}{\lambda} \right)^2 \quad (\text{A1.45})$$

y

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} = -\tilde{U} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{x}} - \tilde{W} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{z}} + 2 \frac{\sigma}{\lambda} \tilde{U} + \tilde{z} \left( \frac{\sigma}{\lambda} \right)^2, \quad (\text{A1.46})$$

las cuales se obtienen luego de simplificar las ecuaciones (A1.41-42) ya que, por encima de la capa viscosa, se verifica que

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \rightarrow 0 \quad \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \rightarrow 0 \quad \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}} \rightarrow 0 \quad \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2} \rightarrow 0. \quad (\text{A1.47})$$

Como conclusión puede establecerse que, debido a la estrechez de la capa viscosa, en el interior de la misma las variaciones de velocidad resultan mucho mayores en dirección normal a la pared que con respecto a la dirección tangente a esa superficie, por lo cual la difusión viscosa resulta significativa solo en dirección perpendicular a la pared. Asimismo, la

propia componente normal de la velocidad dentro de la capa límite resulta despreciable cuando se la compara con la componente tangente a la superficie. Del análisis de órdenes de magnitud, también resulta despreciable la variación de la presión en la dirección normal a la superficie, por lo cual la presión puede considerarse como constante a lo largo de la perpendicular a la pared e igual a su valor en correspondencia con el borde superior de la capa viscosa, magnitud impuesta entonces por la corriente principal, flujo en donde el efecto de la viscosidad resulta despreciable.

### A1.3.2. Reducción a capa límite bidimensional

Si no se considera la rotación,  $\sigma = 0$ , y el flujo puede representarse bidimensionalmente ( $w = 0$ ), las ecuaciones (A1.40-42) se reducen a las ecuaciones de Prandtl 2D, las cuales -en variables adimensionales- se expresan como,

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad (\text{A1.48})$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \quad (\text{A1.49})$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} \approx 0, \quad (\text{A1.50})$$

para el flujo bidimensional, incompresible y estacionario de un fluido newtoniano dentro de la capa viscosa próxima a una pared.

Adicionalmente,

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} = -\tilde{U} \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{x}} \quad (\text{A1.51})$$

dado que, en este caso, la solución invíscida está representada por

$$\tilde{U} = \tilde{U}(\tilde{x}) \quad (\text{Re} \rightarrow \infty). \quad (\text{A1.52})$$

## A1.4. CAPA LÍMITE TRIDIMENSIONAL EN UNA TERNA ROTANTE

Introduciendo las hipótesis de Prandtl al sistema compuesto por la ecuación de continuidad bajo condición de incompresibilidad,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$ , y la ecuación para la cantidad de

movimiento (A1.6), definiendo mediante  $x$  y  $z$  a las coordenadas ortogonales tangentes a la superficie del cuerpo, siendo  $y$  la coordenada normal a dicha superficie. Sean  $(u,v,w)$  las componentes del campo de velocidad según  $(x,y,z)$  respectivamente, relativas a la superficie, entonces el desarrollo de la capa límite laminar correspondiente al flujo tridimensional estacionario de un fluido newtoniano incompresible sobre una superficie de gran radio de curvatura resulta gobernado por el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (\text{A1.53})$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + 2\Omega(w - W) = U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{A1.54})$$

y

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} - 2\Omega(u - U) = U \frac{\partial W}{\partial x} + W \frac{\partial W}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (\text{A1.55})$$

donde  $U$  y  $W$  denotan las componentes de la velocidad en el borde exterior de la capa límite, relativas a la superficie,  $\Omega$  representa la velocidad angular alrededor del eje  $y$ , y  $\nu$  es la viscosidad cinemática del fluido.

Las condiciones de contorno correspondientes a este sistema de ecuaciones son

$$u(x,0,z) = v(x,0,z) = w(x,0,z) = 0 \quad (\text{A1.56})$$

por condición de no deslizamiento, y

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u(x,y,z) = U(x,z) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} w(x,y,z) = W(x,z) \quad (\text{A1.57})$$

para ajustarse a la solución no viscosa suficientemente lejos de la superficie.

Adicionalmente, el sistema de ecuaciones (A1.54-55) para la cantidad de movimiento según las direcciones tangentes a la superficie sólida ha sido resuelto para los términos significativos del gradiente de presión

$$\bar{\nabla} p(x,z) \approx \left( \frac{\partial p}{\partial x}, 0, \frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (\text{A1.58})$$

a partir de las ecuaciones de Euler, y bajo las condiciones adicionales por las cuales

$$\frac{\partial U}{\partial y} \approx 0 \tag{A1.59}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} \approx 0.$$

#### A1.4.1. Singularidades

Como lo ha señalado Williams (1985), y debido a las simplificaciones establecidas en el marco de las hipótesis de la capa límite, cabe remarcar que la aparición de singularidades en la solución de las ecuaciones no se corresponde con el flujo de un fluido real, sino que se originan ante los intentos de tratar de describir la física del flujo mediante modelos aproximados. La naturaleza no permite la presencia de tales singularidades. Estas singularidades aparecen como resultado de la utilización de un sistema de ecuaciones incompleto, como el representado por las ecuaciones de la capa límite. Es de esperar que, de resolver el sistema completo que describe el campo fluidodinámico mediante las ecuaciones de Navier-Stokes, las soluciones no presenten dichas singularidades.

Otro aspecto importante de las simplificaciones inherentes a los conceptos de capa límite es el denominado *principio de influencia de Raetz*, propuesto en 1957, el cual define los dominios de influencia y de dependencia para los cálculos concernientes a capas límites tridimensionales. Este principio se basa en el hecho de que una perturbación en un punto de la capa límite es instantáneamente transmitida sobre la normal a la superficie del cuerpo que pasa por el punto en cuestión. Por otra parte, esa perturbación convecciona corriente abajo a lo largo de todas las líneas de corriente que pasan por dicha línea. Así, las zonas de dependencia e influencia están acotadas por las líneas de corriente que, pasando por la normal a la superficie a través del punto en cuestión, presenten máximos y mínimos ángulos.



De acuerdo con lo establecido por Wang (1971), la definición de las zonas de dependencia e influencia es de fundamental importancia para el cálculo computacional de las capas límites tridimensionales. En el caso de las ecuaciones de la capa límite, y por tratarse de un sistema parabólico, estas zonas están determinadas por las características y las subcaracterísticas. Toda superficie normal a la pared es una superficie característica. Esto además señala que la velocidad de la perturbación es infinita en dirección normal a la superficie de la pared.

Las subcaracterísticas del sistema se obtienen despreciando los términos viscosos. Entonces, las subcaracterísticas así obtenidas corresponden a las características correspondientes a las ecuaciones invíscidas. Como subcaracterísticas, las líneas de corriente transportan a una perturbación con el flujo, dado que la perturbación convecciona con una velocidad finita a lo largo de dichas líneas de corriente. En el caso de las ecuaciones de la capa límite, las subcaracterísticas juegan un papel determinante en la estructura del campo fluidodinámico. En este caso, la difusión prevalece solamente en la dirección normal a la superficie del cuerpo.

La aplicación práctica de los conceptos de zonas de dependencia e influencia es esencial en la obtención de soluciones numéricas a las ecuaciones de la capa límite tridimensional. Ignorar la zona de dependencia durante los cálculos puede conducir a serios problemas de convergencia y/o estabilidad. Por otra parte, a diferencia del problema del flujo supersónico linealizado, donde las zonas de dependencia e influencia pueden determinarse a priori, para el flujo en una capa límite, estas zonas varían punto a punto y no son conocidas hasta que la solución sea obtenida.

#### **A1.4.2. Solución de las ecuaciones de la capa límite tridimensional**

La dirección permisible para la marcha de la solución es dictada por el principio de dependencia (Anderson et al., 1984). Este principio establece que la influencia de la solución en un punto genérico,  $P$ , ubicado en el interior de una capa límite tridimensional, es transferida instantáneamente por difusión a lo largo de la línea que es normal a la pared y que pasa por el punto mencionado, y transferida mediante convección corriente debajo de la posición del punto  $P$  a través de todas las líneas de corriente que pasan por la línea normal a la superficie por  $P$ .

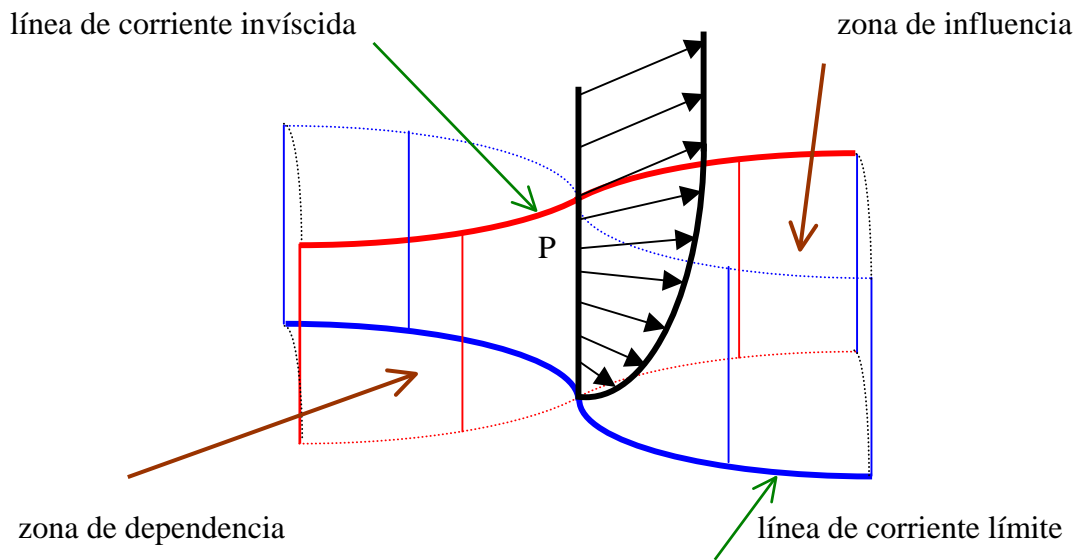


Figura A1.2 Zonas de influencia y dependencia.

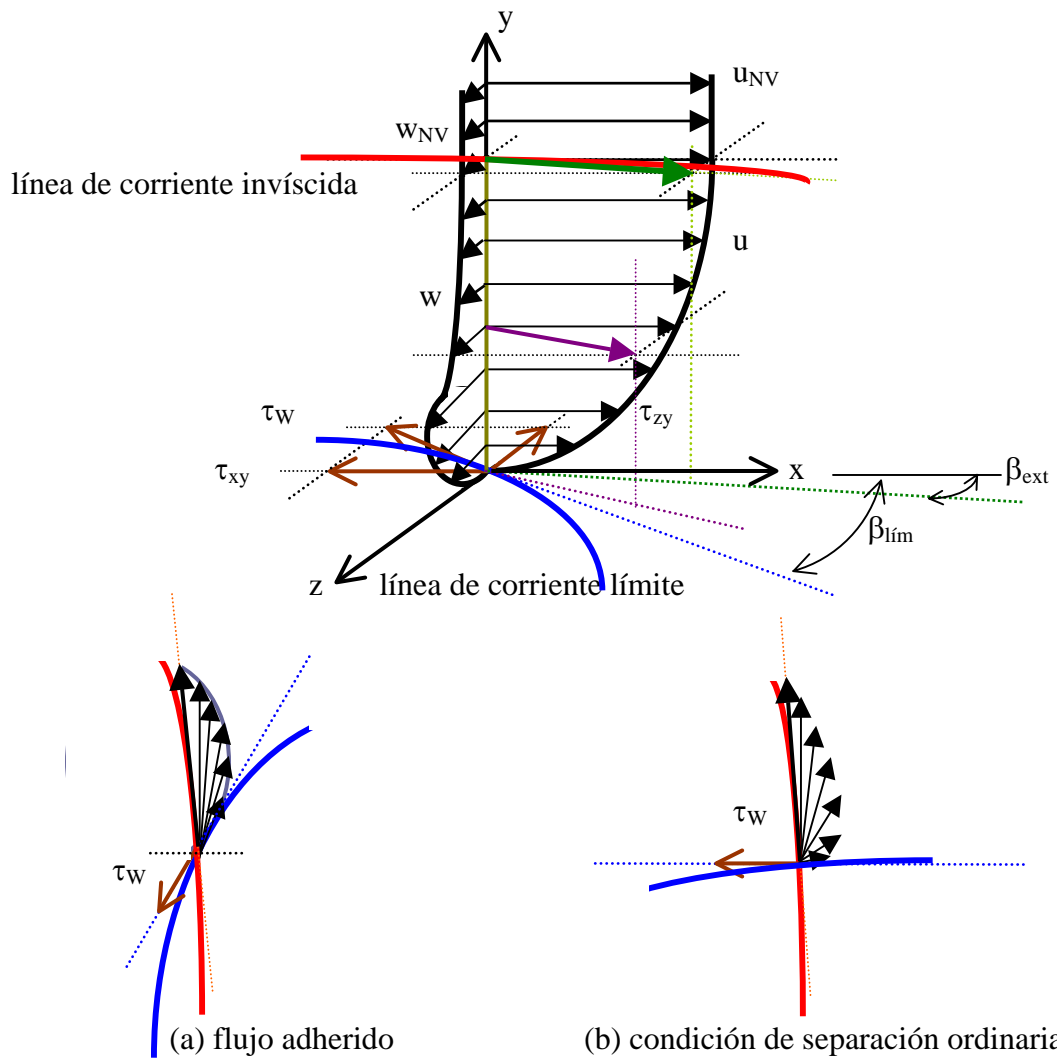


Figura A1.3 Representación del campo de velocidades en la capa límite, de las líneas de corriente invíscida y límite y de las tensiones en la pared.

Las posiciones de las dos líneas de corrientes más externas que se extienden desde la línea normal a la pared del cuerpo que pasa por  $P$  definen la extensión lateral de la zona en forma de cuña que se denomina como región de influencia. Una definición equivalente, involucrando ahora a las líneas de corriente más externas que, proviniendo de regiones corriente abajo, pasen a través de la línea normal a la superficie por  $P$ , determina la zona de dependencia. Solo los eventos que tienen lugar dentro de esa región pueden influir sobre  $P$  y los restantes puntos de la normal a la pared del cuerpo que pase por dicho punto. Estas zonas están representadas, esquemáticamente, en la Figura A1.2.

Generalmente, una de las dos líneas de corriente más extremas corresponde a la línea de corriente límite definida sobre la superficie, mientras que la otra está representada por la línea de corriente del flujo invíscido en correspondencia con el borde externo de la capa límite, tal como se esquematizan en la Figura A1.3.

La pendiente de la línea de corriente externa (o invíscida) está dada por

$$\operatorname{tg} \beta_{\text{ext}} = \frac{W(x, z)}{U(x, z)}, \quad (\text{A1.60})$$

mientras que la pendiente de la línea de corriente límite (en correspondencia con la pared) está dada por

$$\operatorname{tg} \beta_{\text{lím}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{u(x, y, z)}{w(x, y, z)} = \frac{\tau_{zy}(x, 0, z)}{\tau_{xy}(x, 0, z)}. \quad (\text{A1.61})$$

### A1.4.3. Separación

Otro fenómeno a considerar es la separación de una capa límite tridimensional, laminar e incompresible, la cual puede acontecer en dos formas (Williams, 1985):

1. En el primer caso, las dos componentes (la del flujo principal y la del flujo cruzado o la componente según cuerda y la componente según envergadura, según el sistema considerado) de la tensión de corte sobre la pared se aproximan a cero simultáneamente, de manera que la tensión de corte total sobre la pared se anula a lo largo de la línea de separación. Este tipo de separación se denomina *singular*, resultando

$$\begin{cases} \tau_{zy}(x,0,z) \rightarrow 0 \\ \tau_{xy}(x,0,z) \rightarrow 0 \end{cases} \quad (x,z) \rightarrow (x_{\text{sep}}, z_{\text{sep}}) \quad y = 0. \quad (\text{A1.62})$$

2. En el segundo caso, las líneas de corriente sobre la pared (o líneas de corriente límite) cambian de dirección, de modo tal que todas devienen tangentes. Así, la línea de separación es una envolvente de las líneas de corriente límites. En este caso se ha anulado solamente la componente según cuerda (o la componente del flujo principal) de la tensión cortante localizada sobre la pared. Este tipo de separación se denomina *ordinaria*, resultando representado, esquemáticamente, en la Figura A1.3(b), y siendo

$$\begin{cases} \tau_{zy}(x,0,z) \neq 0 \\ \tau_{xy}(x,0,z) \rightarrow 0 \end{cases} \quad (x,z) \rightarrow (x_{\text{sep}}, z_{\text{sep}}) \quad y = 0 \quad (\text{A1.63})$$

$$\beta_{\text{lím}} \rightarrow \pi/2.$$

# APÉNDICE 2

## CAPA LÍMITE TRIDIMENSIONAL EN COORDENADAS CURVILÍNEAS

### A2.1. TRANSFORMACIÓN A COORDENADAS CURVILÍNEAS GENERALIZADAS

En general, se puede definir un sistema coordenado curvilíneo  $x^s$  en función de un sistema rectangular cartesiano  $X^r$ , en un dominio tridimensional de un espacio euclídeo, mediante funciones del tipo

$$x^s = x^s(X^1, X^2, X^3) \quad s = 1,2,3 \quad (\text{A2.1})$$

con inversa

$$X^r = X^r(x^1, x^2, x^3) \quad r = 1,2,3. \quad (\text{A2.2})$$

Estas funciones presentan derivadas primeras parciales continuas con respecto a  $(x^1, x^2, x^3)$  y donde el determinante de la matriz Jacobiana es no nulo (con la única excepción de ciertos puntos o curvas singulares).

Al igual que en coordenadas cartesianas rectangulares, un vector se expresa mediante sus componentes según las bases ortonormales (o versores)  $\hat{i}_r \equiv \hat{i}^r$ . El mismo vector puede definirse en un sistema curvilíneo generalizado, el cual es un sistema coordenado cuya base no es ortonormal ni homogénea. Mediante los vectores base de dicho sistema (sean, indistintamente, los vectores bases covariantes  $\vec{g}_s$  o los vectores base contravariantes  $\vec{g}^t$ ), a través de sus componentes contravariantes,  $f^r$ , o de sus componentes covariantes,  $f_t$ , resultando entonces

$$\vec{F} = F^r \hat{i}_r = f^s \vec{g}_s = f_t \vec{g}^t, \quad (\text{A2.3})$$

donde la convención de suma se establece sobre el índice repetido diagonalmente. Se debe recordar que los vectores base del sistema coordenado curvilíneo no resultan necesariamente ortonormales.

Las Figuras A2.1 y A2.2 esquematizan tanto a los sistemas coordenados utilizados, como las diferentes representaciones posibles de una magnitud vectorial.

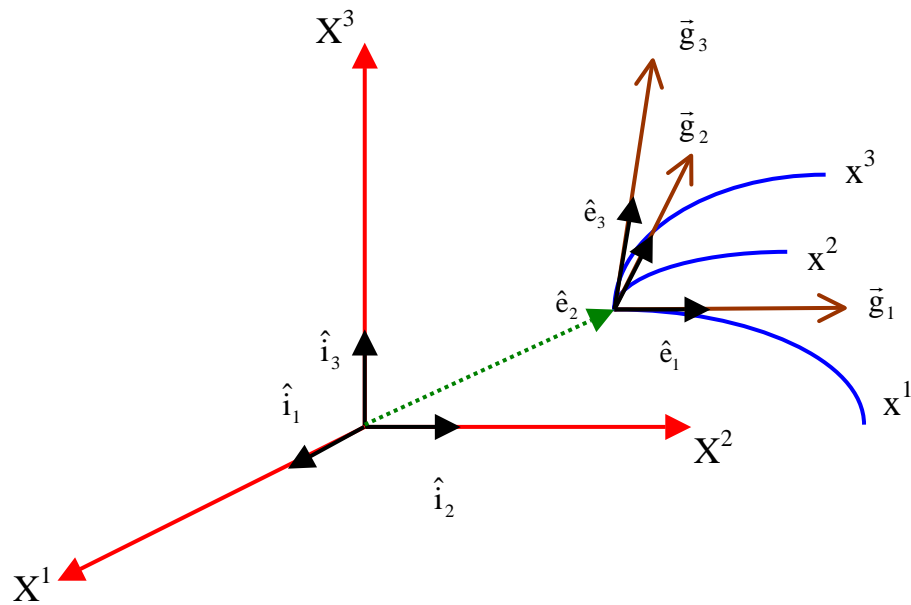


Figura A2.1 Sistema rectangular cartesiano y curvilíneo no ortogonal ni homogéneo definido por sus bases covariantes  $\vec{g}_i$ .

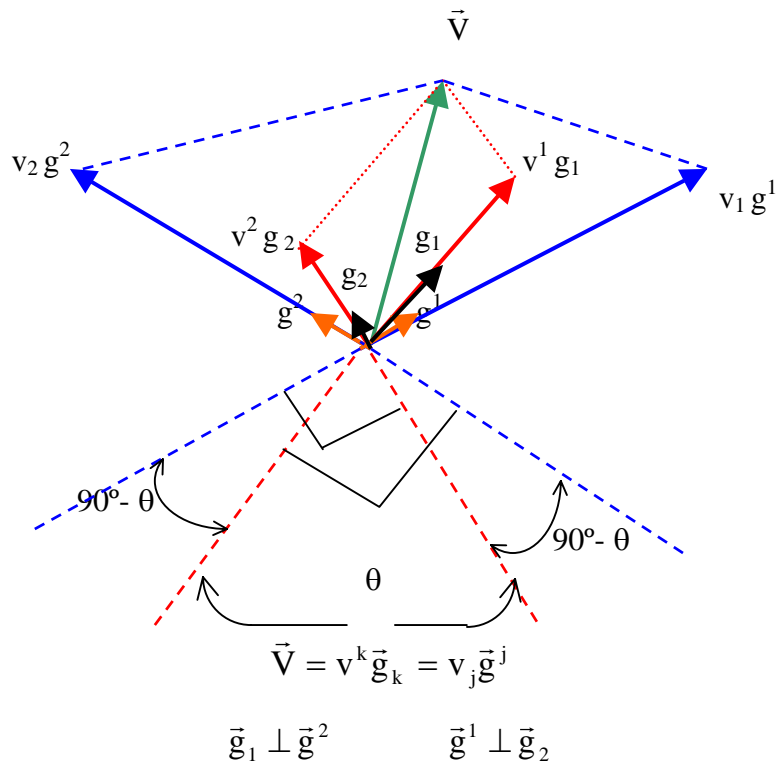


Figura A2.2 Vector 2D en las bases duales (covariante y contravariante).

En función de los versores cartesianos rectangulares,  $\hat{\mathbf{i}}_r$ , los vectores base covariantes de un sistema curvilíneo se determinan mediante

$$\bar{\mathbf{g}}_s = \frac{\partial \mathbf{X}^r}{\partial x^s} \hat{\mathbf{i}}_r \quad r = 1,2,3 \quad s = 1,2,3 \quad (\text{A2.4})$$

si se disponen de expresiones explícitas como las representadas genéricamente por (A2.2).

Es decir, (A2.4) puede expresarse en un caso general tridimensional como

$$\begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{g}}_1 \\ \bar{\mathbf{g}}_2 \\ \bar{\mathbf{g}}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{X}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \mathbf{X}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \mathbf{X}^3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial \mathbf{X}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \mathbf{X}^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \mathbf{X}^3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \mathbf{X}^1}{\partial x^3} & \frac{\partial \mathbf{X}^2}{\partial x^3} & \frac{\partial \mathbf{X}^3}{\partial x^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{i}}_1 \\ \hat{\mathbf{i}}_2 \\ \hat{\mathbf{i}}_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A2.5})$$

o, considerando los elementos de la transformación como los elementos de una matriz [B]

$$\bar{\mathbf{g}}_s = \beta_s^r \hat{\mathbf{i}}_r = [\mathbf{B}] \hat{\mathbf{i}}_r = [b_{ij}] \hat{\mathbf{i}}_r \quad (\text{A2.6})$$

donde los índices ij indican solamente la disposición según filas y columnas de los elementos b en la matriz [B], es decir

$$\begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{g}}_1 \\ \bar{\mathbf{g}}_2 \\ \bar{\mathbf{g}}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{i}}_1 \\ \hat{\mathbf{i}}_2 \\ \hat{\mathbf{i}}_3 \end{Bmatrix}. \quad (\text{A2.7})$$

Inversamente, la relación entre las bases rectangular cartesiana y curvilínea puede establecerse a través de

$$\hat{\mathbf{i}}_r = [\mathbf{B}]^{-1} \bar{\mathbf{g}}_s = [\mathbf{A}] \bar{\mathbf{g}}_s \quad (\text{A2.8})$$

es decir,

$$\hat{\mathbf{i}}_r = \alpha_r^s \bar{\mathbf{g}}_s = [a_{ij}] \bar{\mathbf{g}}_s \quad (\text{A2.9})$$

donde

$$\alpha_r^s = [\mathbf{A}] = [a_{ij}] = \frac{\partial x^s}{\partial X^r} = [b_{ij}]^{-1}. \quad (\text{A2.10})$$

Estos coeficientes pueden determinarse si se conoce la relación entre las coordenadas en la forma explícita representada por (A2.1) Entonces,

$$\begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{i}}_1 \\ \hat{\mathbf{i}}_2 \\ \hat{\mathbf{i}}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{g}}_1 \\ \bar{\mathbf{g}}_2 \\ \bar{\mathbf{g}}_3 \end{Bmatrix}. \quad (\text{A2.11})$$

Por otra parte, se definen como componentes covariantes del tensor fundamental (también denominado tensor métrico),  $\mathbf{g}_{ij}$ , a las cantidades definidas por

$$\mathbf{g}_{ij} = \bar{\mathbf{g}}_i \cdot \bar{\mathbf{g}}_j = \frac{\partial \mathbf{X}^n}{\partial x^i} \frac{\partial \mathbf{X}^m}{\partial x^j} (\hat{\mathbf{i}}_n \cdot \hat{\mathbf{i}}_m) \quad (\text{A2.12})$$

$$i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3 \quad n = 1,2,3 \quad m = 1,2,3$$

como

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{i}}_n \cdot \hat{\mathbf{i}}_m &= 0 & \text{si} & \quad n \neq m \\ \hat{\mathbf{i}}_n \cdot \hat{\mathbf{i}}_m &= 1 & \text{si} & \quad n = m \end{aligned} \quad (\text{A2.13})$$

entonces,

$$\mathbf{g}_{ij} = \bar{\mathbf{g}}_i \cdot \bar{\mathbf{g}}_j = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial \mathbf{X}^n}{\partial x^i} \frac{\partial \mathbf{X}^n}{\partial x^j} \quad (\text{A2.14})$$

$$i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3$$

observándose asimismo la simetría por la cual  $\mathbf{g}_{ij} = \mathbf{g}_{ji}$ .

Mediante los elementos del tensor fundamental, se pueden expresar las componentes y bases covariantes en función de las componentes y bases contravariantes, resultando

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{g}}_i &= \mathbf{g}_{ij} \bar{\mathbf{g}}^j \\ \mathbf{a}_i &= \mathbf{g}_{ij} \mathbf{a}^j. \end{aligned} \quad (\text{A2.15})$$

Como la inversa de la matriz  $[\mathbf{g}_{ij}]$  resulta ser la matriz  $[\mathbf{g}^{ij}]$ , se tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^{ij} &= \bar{\mathbf{g}}^i \cdot \bar{\mathbf{g}}^j \\ \bar{\mathbf{g}}^i &= \mathbf{g}^{ij} \bar{\mathbf{g}}_j \\ \mathbf{a}^i &= \mathbf{g}^{ij} \mathbf{a}_j \end{aligned} \quad (\text{A2.16})$$

$$\mathbf{g}_0 = \det[\mathbf{g}_{ij}] = \frac{1}{\mathbf{g}^0} = \frac{1}{\det[\mathbf{g}^{ij}]}.$$



Así, las componentes covariantes del tensor métrico resultan

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_{11} &= \vec{\mathbf{g}}_1 \cdot \vec{\mathbf{g}}_1 = \frac{\partial \mathbf{X}^n}{\partial x^1} \frac{\partial \mathbf{X}^n}{\partial x^1} = \left( \frac{\partial \mathbf{X}^1}{\partial x^1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathbf{X}^2}{\partial x^1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathbf{X}^3}{\partial x^1} \right)^2 = \mathbf{b}_{11}^2 + \mathbf{b}_{12}^2 + \mathbf{b}_{13}^2 \\
\mathbf{g}_{22} &= \vec{\mathbf{g}}_2 \cdot \vec{\mathbf{g}}_2 = \frac{\partial \mathbf{X}^n}{\partial x^2} \frac{\partial \mathbf{X}^n}{\partial x^2} = \left( \frac{\partial \mathbf{X}^1}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathbf{X}^2}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathbf{X}^3}{\partial x^2} \right)^2 = \mathbf{b}_{21}^2 + \mathbf{b}_{22}^2 + \mathbf{b}_{23}^2 \\
\mathbf{g}_{33} &= \vec{\mathbf{g}}_3 \cdot \vec{\mathbf{g}}_3 = \frac{\partial \mathbf{X}^n}{\partial x^3} \frac{\partial \mathbf{X}^n}{\partial x^3} = \left( \frac{\partial \mathbf{X}^1}{\partial x^3} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathbf{X}^2}{\partial x^3} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathbf{X}^3}{\partial x^3} \right)^2 = \mathbf{b}_{31}^2 + \mathbf{b}_{32}^2 + \mathbf{b}_{33}^2 \\
\mathbf{g}_{12} &= \vec{\mathbf{g}}_1 \cdot \vec{\mathbf{g}}_2 = \frac{\partial \mathbf{X}^n}{\partial x^1} \frac{\partial \mathbf{X}^n}{\partial x^2} = \left( \frac{\partial \mathbf{X}^1}{\partial x^1} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{X}^1}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{X}^2}{\partial x^1} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{X}^2}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{X}^3}{\partial x^1} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{X}^3}{\partial x^2} \right) = \\
&= \mathbf{b}_{11} \mathbf{b}_{21} + \mathbf{b}_{12} \mathbf{b}_{22} + \mathbf{b}_{13} \mathbf{b}_{23} = \mathbf{g}_{21} = \vec{\mathbf{g}}_2 \cdot \vec{\mathbf{g}}_1 \\
\mathbf{g}_{13} &= \vec{\mathbf{g}}_1 \cdot \vec{\mathbf{g}}_3 = \frac{\partial \mathbf{X}^n}{\partial x^1} \frac{\partial \mathbf{X}^n}{\partial x^3} = \left( \frac{\partial \mathbf{X}^1}{\partial x^1} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{X}^1}{\partial x^3} \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{X}^2}{\partial x^1} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{X}^2}{\partial x^3} \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{X}^3}{\partial x^1} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{X}^3}{\partial x^3} \right) = \\
&= \mathbf{b}_{11} \mathbf{b}_{31} + \mathbf{b}_{12} \mathbf{b}_{32} + \mathbf{b}_{13} \mathbf{b}_{33} = \mathbf{g}_{31} = \vec{\mathbf{g}}_3 \cdot \vec{\mathbf{g}}_1 \\
\mathbf{g}_{32} &= \vec{\mathbf{g}}_3 \cdot \vec{\mathbf{g}}_2 = \frac{\partial \mathbf{X}^n}{\partial x^3} \frac{\partial \mathbf{X}^n}{\partial x^2} = \left( \frac{\partial \mathbf{X}^1}{\partial x^3} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{X}^1}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{X}^2}{\partial x^3} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{X}^2}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{X}^3}{\partial x^3} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{X}^3}{\partial x^2} \right) = \\
&= \mathbf{b}_{31} \mathbf{b}_{21} + \mathbf{b}_{32} \mathbf{b}_{22} + \mathbf{b}_{33} \mathbf{b}_{23} = \mathbf{g}_{23} = \vec{\mathbf{g}}_2 \cdot \vec{\mathbf{g}}_3 .
\end{aligned} \tag{A2.17}$$

En particular, se denominan métricos a los módulos de los vectores base, siendo

$$h_i = |\vec{\mathbf{g}}_i| = \sqrt{\mathbf{g}_{ii}} \quad (\text{no sumar}) \tag{A2.18}$$

consecuentemente, las componentes físicas contravariantes  $\tilde{f}^i$  de un vector genérico y los versores  $\hat{\mathbf{e}}_i$  del sistema curvilíneo resultan

$$\tilde{f}^i = f^i \sqrt{\mathbf{g}_{ii}} = f^i h_i \quad (\text{no sumar}) \tag{A2.19}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{\vec{\mathbf{g}}_i}{\sqrt{\mathbf{g}_{ii}}} = \frac{\vec{\mathbf{g}}_i}{h_i} \quad (\text{no sumar}), \tag{A2.20}$$

con lo cual

$$\vec{\mathbf{F}} = F^r \hat{\mathbf{i}}_r = \tilde{f}^i \hat{\mathbf{e}}_i . \tag{A2.21}$$

Así, en un sistema coordenado curvilíneo general las componentes físicas contravariantes de un vector son las componentes del vector que resultan paralelas a los vectores base covariantes (Malvern, 1969), dado que  $\hat{e}_i // \bar{g}_i$ . Además, como los  $\hat{e}_i$  son vectores unitarios adimensionales, las componentes físicas tienen las mismas dimensiones que el propio vector.

## A2.2. ECUACIONES DE GOBIERNO EN COORDENADAS CURVILÍNEAS

Las ecuaciones que gobiernan el flujo laminar, estacionario e isotérmico de un fluido newtoniano con propiedades físicas constantes son la ecuación de continuidad (A2.22) y la ecuación de conservación de cantidad de movimiento (A2.23), donde se han despreciado los efectos gravitatorios. La ecuación (A2.23) ha sido escrita para una terna adherida a la pala y considerando el efecto de la rotación de la turbina. Dado que la pala gira a velocidad angular constante,  $\bar{\Omega}$ , solamente se incluyen los términos que representan a la aceleración de Coriolis,  $-2\bar{\Omega} \times \bar{V}$ , y a la aceleración centrípeta,  $\bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{r})$ . Además,  $\bar{V}$  representa la velocidad del aire relativa a dicha pala y  $\rho$  y  $\nu$  denotan, respectivamente, la densidad y la viscosidad cinemática del aire.

$$\bar{\nabla} \cdot (\bar{V}) = 0 \quad (\text{A2.22})$$

$$(\bar{\nabla} \cdot \bar{V})\bar{V} + \frac{1}{\rho}\bar{\nabla}p - \nu\nabla^2\bar{V} + 2\bar{\Omega} \times \bar{V} + \bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{r}) = 0 \quad (\text{A2.23})$$

Los ejes de la terna adherida a la pala  $(X, Y, Z) = (X^1, X^2, X^3)$  se disponen de la siguiente forma: el eje Z(+) coincide con el eje de rotación siendo su sentido el del viento incidente, el eje X(+) yace a lo largo del borde de ataque de la pala, desde el eje de rotación hacia la punta de la pala, mientras que el eje Y(+) resulta de la definición de una terna ortogonal derecha. En este sistema coordenado, los versores se denominan  $\{\hat{i}_1; \hat{i}_2; \hat{i}_3\}$ , resultando entonces las siguientes definiciones del vector velocidad relativa,

$$\bar{V} = V^1\hat{i}_1 + V^2\hat{i}_2 + V^3\hat{i}_3, \quad (\text{A2.24})$$

del vector posición respecto del origen de la terna rotante,

$$\bar{r} = X^1\hat{i}_1 + X^2\hat{i}_2 + X^3\hat{i}_3 \quad (\text{A2.25})$$

y del vector velocidad angular de la terna rotante,

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{\text{eje rotante}} \quad (\text{A2.26})$$

que se expresa, genéricamente, en sus componentes cartesianas como

$$\vec{\Omega} = \Omega^1 \hat{i}_1 + \Omega^2 \hat{i}_2 + \Omega^3 \hat{i}_3. \quad (\text{A2.27})$$

Por su parte, en un sistema curvilíneo generalizado, el vector velocidad relativa se expresa, mediante sus componentes contravariantes, como

$$\vec{V} = v^1 \vec{g}_1 + v^2 \vec{g}_2 + v^3 \vec{g}_3 \quad (\text{A2.28})$$

o, equivalentemente, en función de las componentes físicas

$$\vec{V} = u^1 \hat{e}_1 + u^2 \hat{e}_2 + u^3 \hat{e}_3 \quad (\text{A2.29})$$

Asimismo, el vector velocidad de rotación, se escribe en el sistema curvilíneo, mediante sus componentes contravariantes

$$\vec{\Omega} = \varpi^1 \vec{g}_1 + \varpi^2 \vec{g}_2 + \varpi^3 \vec{g}_3 \quad (\text{A2.30})$$

y, en sus respectivas componentes físicas,

$$\vec{\Omega} = \omega^1 \hat{e}_1 + \omega^2 \hat{e}_2 + \omega^3 \hat{e}_3. \quad (\text{A2.31})$$

En el presente caso, la terna rota alrededor del eje Z, resulta

$$\vec{\Omega} = \Omega^3 \hat{i}_3. \quad (\text{A2.32})$$

Dado que el versor en la dirección de la rotación se relaciona con los vectores base covariantes del sistema curvilíneo mediante la relación

$$\hat{i}_3 = a_{31} \vec{g}_1 + a_{32} \vec{g}_2 + a_{33} \vec{g}_3 \quad (\text{A2.33})$$

resultan

$$\vec{\Omega} = \Omega^3 (a_{31} \vec{g}_1 + a_{32} \vec{g}_2 + a_{33} \vec{g}_3) \quad (\text{A2.34})$$

$$\vec{\Omega} = \varpi^1 \vec{g}_1 + \varpi^2 \vec{g}_2 + \varpi^3 \vec{g}_3 \quad \begin{cases} \varpi^1 = a_{31} \Omega^3 \\ \varpi^2 = a_{32} \Omega^3 \\ \varpi^3 = a_{33} \Omega^3 \end{cases}$$

obteniéndose, a partir de la introducción de los métricos

$$h_i \hat{e}_i = \vec{g}_i \quad h_i = \sqrt{g_{ii}} \quad (\text{no sumar}) \quad (\text{A2.35})$$

las componentes físicas del vector velocidad de rotación de la terna,

$$\begin{cases} \omega^1 = h_1 a_{31} \Omega^3 \\ \omega^2 = h_2 a_{32} \Omega^3 \\ \omega^3 = h_3 a_{33} \Omega^3 \end{cases} \quad (\text{A2.36})$$

### A2.2.1. Aceleración centrípeta $\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$

Considerando que, en el sistema coordenado cartesiano rectangular la única componente presente del vector velocidad angular de la terna es la dirigida según el eje Z(+),

$$\vec{\Omega} = \Omega^3 \hat{i}_3 \quad (\text{A2.37})$$

y en dicho sistema, el vector posición se escribe como

$$\vec{r} = X^1 \hat{i}_1 + X^2 \hat{i}_2 + X^3 \hat{i}_3 \quad (\text{A2.38})$$

entonces, el producto vectorial resulta

$$\vec{\Omega} \times \vec{r} = -\Omega^3 X^2 \hat{i}_1 + \Omega^3 X^1 \hat{i}_2 + 0 \hat{i}_3 \quad (\text{A2.39})$$

y

$$\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = -(\Omega^3 \Omega^3) X^1 \hat{i}_1 - (\Omega^3 \Omega^3) X^2 \hat{i}_2 + 0 \hat{i}_3. \quad (\text{A2.40})$$

Reemplazando la expresiones de los versores del sistema ortogonal por sus definiciones en el sistema curvilíneo local

$$\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = -(\Omega^3 \Omega^3) [X^1 (a_{11} \vec{g}_1 + a_{12} \vec{g}_2 + a_{13} \vec{g}_3) + X^2 (a_{21} \vec{g}_1 + a_{22} \vec{g}_2 + a_{23} \vec{g}_3)], \quad (\text{A2.41})$$

reordenando e introduciendo asimismo los versores del sistema curvilíneo local

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) &= \\ &= -(\Omega^3 \Omega^3) [h_1 (a_{11} X^1 + a_{21} X^2) \hat{e}_1 + h_2 (a_{12} X^1 + a_{22} X^2) \hat{e}_2 + h_3 (a_{13} X^1 + a_{23} X^2) \hat{e}_3], \end{aligned} \quad (\text{A2.42})$$

con lo cual el vector aceleración centrípeta ha quedado representado mediante sus componentes físicas contravariantes, siendo

$$\Omega^3 = \frac{\omega^3}{h_3 a_{33}}. \quad (\text{A2.43})$$

### A2.2.2. Aceleración de Coriolis $2(\vec{\Omega} \times \vec{V})$

El producto vectorial entre dos vectores definidos en el sistema curvilíneo general,

$$\vec{a} = a^r \vec{g}_r \quad \vec{b} = b^s \vec{g}_s \quad (\text{A2.44})$$

se determina mediante las expresiones siguientes, en las bases contravariantes y covariantes, respectivamente,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sigma \sqrt{g_0} \varepsilon_{rst} a^r b^s \vec{g}^t \quad (\text{A2.45})$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sigma \sqrt{g_0} \varepsilon_{rst} a^r b^s (g^{ti} \vec{g}_i)$$

donde  $\varepsilon_{rst}$  representa el símbolo de permutación, siendo

$$\varepsilon_{rst} = 1 \quad (\text{A2.46})$$

con permutaciones pares de los índices rst,

$$\varepsilon_{rst} = 0 \quad (\text{A2.47})$$

cuando los índices se repiten, y

$$\varepsilon_{rst} = -1 \quad (\text{A2.48})$$

con permutaciones impares de los índices rst. Así,

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$$

$$\varepsilon_{111} = \varepsilon_{121} = \varepsilon_{112} = \dots = 0 \quad (\text{A2.49})$$

$$\varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1$$

Por su parte,

$$\sigma = +1 \quad (\text{A2.50})$$

$$\sigma = -1$$

para ternas derechas o izquierdas, respectivamente.

Entonces, la ecuación (A2.45) resulta representada por la expresión

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sqrt{g_0} \varepsilon_{rst} a^r b^s \vec{g}^t \equiv \sigma \sqrt{g_0} \begin{vmatrix} \vec{g}^1 & \vec{g}^2 & \vec{g}^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} \quad (\text{A2.51})$$

Para la representación de la aceleración de Coriolis, se tienen los vectores

$$\vec{V} = v^1 \vec{g}_1 + v^2 \vec{g}_2 + v^3 \vec{g}_3 \quad (\text{A2.28})$$

y

$$\vec{\Omega} = \omega^1 \vec{g}_1 + \omega^2 \vec{g}_2 + \omega^3 \vec{g}_3 \quad (\text{A2.30})$$

entonces,

$$\vec{\Omega} \times \vec{V} = \sqrt{g_0} \varepsilon_{rst} \omega^r v^s \vec{g}^t \equiv \sigma \sqrt{g_0} \begin{vmatrix} \vec{g}^1 & \vec{g}^2 & \vec{g}^3 \\ \omega^1 & \omega^2 & \omega^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix} \quad (\text{A2.52})$$

resultando,

$$(\vec{\Omega} \times \vec{V}) = \sqrt{g_0} \left[ (\omega^2 v^3 - \omega^3 v^2) \vec{g}^1 + (\omega^3 v^1 - \omega^1 v^3) \vec{g}^2 + (\omega^1 v^2 - \omega^2 v^1) \vec{g}^3 \right]. \quad (\text{A2.53})$$

Dado que

$$\vec{g}^t = g^{ti} \vec{g}_i \quad (\text{A2.54})$$

entonces

$$\begin{aligned} \vec{g}^1 &= g^{11} \vec{g}_1 + g^{12} \vec{g}_2 + g^{13} \vec{g}_3 \\ \vec{g}^2 &= g^{21} \vec{g}_1 + g^{22} \vec{g}_2 + g^{23} \vec{g}_3 \\ \vec{g}^3 &= g^{31} \vec{g}_1 + g^{32} \vec{g}_2 + g^{33} \vec{g}_3 \end{aligned} \quad (\text{A2.55})$$

y sabiendo que

$$\vec{g}_i = \sqrt{g_{ii}} \hat{e}_i = h_i \hat{e}_i \quad (\text{no sumar}), \quad (\text{A2.56})$$

resulta

$$\begin{aligned} \vec{g}^1 &= h_1 g^{11} \hat{e}_1 + h_2 g^{12} \hat{e}_2 + h_3 g^{13} \hat{e}_3 \\ \vec{g}^2 &= h_1 g^{21} \hat{e}_1 + h_2 g^{22} \hat{e}_2 + h_3 g^{23} \hat{e}_3 \\ \vec{g}^3 &= h_1 g^{31} \hat{e}_1 + h_2 g^{32} \hat{e}_2 + h_3 g^{33} \hat{e}_3 \end{aligned} \quad (\text{A2.57})$$

El tensor fundamental, ya simplificado con el supuesto de que  $g_3$  es perpendicular a  $g_1$  y a  $g_2$ , resulta, expresado mediante sus componentes covariantes

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{12} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}, \quad (\text{A2.58})$$

mientras que sus componentes contravariantes se obtienen mediante la inversión de (A2.36),

$$[g^{ij}] = [g_{ij}]^{-1} \quad (\text{A2.59})$$

resultando

$$\begin{aligned} g^{11} &= \frac{g_{22}g_{33}}{g_0} & g^{12} &= -\frac{g_{12}g_{33}}{g_0} & g^{13} &= 0 \\ g^{21} &= -\frac{g_{21}g_{33}}{g_0} & g^{22} &= \frac{g_{11}g_{33}}{g_0} & g^{23} &= 0 \\ g^{31} &= 0 & g^{32} &= 0 & g^{33} &= \frac{\{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2\}}{g_0} = \frac{1}{g_{33}} \end{aligned} \quad (\text{A2.60})$$

donde  $g_0$  representa el determinante de la matriz conformada por las componentes covariantes del tensor métrico,

$$g_0 = \det[g_{ij}] = g_{33} \{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2\}. \quad (\text{A2.61})$$

Incorporando los términos anteriores a la ecuación (A2.53) resulta,

$$\begin{aligned} (\vec{\Omega} \times \vec{V}) &= \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_0}} g_{33} \left[ (\varpi^2 v^3 - \varpi^3 v^2) g_{22} + (\varpi^3 v^1 - \varpi^1 v^3) (-g_{12}) \right] \hat{e}_1 + \\ &+ \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_0}} g_{33} \left[ (\varpi^2 v^3 - \varpi^3 v^2) (-g_{12}) + (\varpi^3 v^1 - \varpi^1 v^3) (g_{11}) \right] \hat{e}_2 + (\dots) \hat{e}_3 \end{aligned} \quad (\text{A2.62})$$

Bajo las condiciones de capa límite, asumiendo que la dirección representada por el índice 3 corresponde a una dirección normal a la superficie, resulta entonces que

$$O(v^3) \lll O(\sqrt{v^1 v^1 + v^2 v^2}) \quad (\text{A2.63})$$

y sabiendo que

$$g_{ii} = (h_i)^2 \quad (\text{no sumar}), \quad (\text{A2.64})$$

(A2.62) se reduce a

$$(\vec{\Omega} \times \vec{V}) \cong -\frac{(h_3)^2}{\sqrt{g_0}} \left\{ h_1 \left[ (\varpi^3 v^2) (h_2)^2 + (\varpi^3 v^1) g_{12} \right] \hat{e}_1 - h_2 \left[ (\varpi^3 v^2) g_{12} + (\varpi^3 v^1) (h_1)^2 \right] \hat{e}_2 \right\}, \quad (\text{A2.65})$$

donde también se ha considerado despreciable el término según  $\hat{e}_3$  con respecto a los correspondientes según  $\hat{e}_1$  y  $\hat{e}_2$ . Finalmente,

$$(\vec{\Omega} \times \vec{V}) \cong -\frac{(h_3)^2}{\sqrt{g_0}} \omega^3 \left\{ h_1 [v^2 (h_2)^2 + v^1 g_{12}] \hat{e}_1 - h_2 [v^2 g_{12} + v^1 (h_1)^2] \hat{e}_2 \right\}. \quad (A2.66)$$

Introduciendo las definiciones de las componentes físicas de la velocidad relativa y de la velocidad angular,

$$v^i \equiv v^i \frac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{g_{ii}}} \equiv \frac{u^i}{h_i} \quad \omega^i \equiv \omega^i \frac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{g_{ii}}} \equiv \frac{\omega^i}{h_i} \quad i = 1,2,3 \text{ (no sumar)} \quad (A2.67)$$

resulta la siguiente expresión aproximada de la aceleración de Coriolis

$$2(\vec{\Omega} \times \vec{V}) \cong -2 \frac{h_3}{\sqrt{g_0}} \omega^3 \left\{ (h_1 h_2 u^2 + g_{12} u^1) \hat{e}_1 - (h_1 h_2 u^1 + g_{12} u^2) \hat{e}_2 \right\}. \quad (A2.68)$$

### A2.2.3. Divergencia del campo de velocidades relativas, $\text{div } \vec{V}$

El vector base covariante se define mediante la expresión

$$\vec{g}_n = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^n} \quad \vec{r} = X^m \hat{i}_m \quad (A2.69)$$

y su derivada se define por

$$\frac{\partial \vec{g}_j}{\partial x^k} = \left\{ \begin{matrix} i \\ j \ k \end{matrix} \right\} \vec{g}_i, \quad (A2.70)$$

siendo

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ j \ k \end{matrix} \right\} = \Gamma_{jk}^i = \frac{g^{ip}}{2} \left( \frac{\partial g_{kp}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{pj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^p} \right) \quad (A2.71)$$

$$i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3 \quad k = 1,2,3 \quad p = 1,2,3$$

los denominados símbolos de Christoffel de segunda clase, operador que es simétrico en los índices  $jk$ , es decir  $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$ , dado que  $g_{jk}$  es simétrico.

Por su parte, se denomina derivada covariante de un vector genérico,  $\vec{A} = A^j \vec{g}_j$ , a la siguiente expresión (Malvern, 1969, p.618):

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^k} = \left[ \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \left\{ \begin{matrix} i \\ j \ k \end{matrix} \right\} A^j \right] \vec{g}_i = \left[ A^i \Big|_k \right] \vec{g}_i \quad i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3 \quad k = 1,2,3. \quad (A2.72)$$



Así, los términos representados mediante

$$A^i|_k = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \left\{ \begin{matrix} i \\ j \ k \end{matrix} \right\} A^j \quad (\text{A2.73})$$

definen a las componentes escalares de la derivada covariante del vector  $\vec{A}$ , el cual se encuentra representado en este caso por sus componentes contravariantes  $A^j$ .

Dado que la divergencia del vector  $\vec{A}$  está representada por el producto escalar entre el operador diferencial  $\vec{\nabla}$  y el vector  $\vec{A}$ , resulta que

$$\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \nabla_i A^i (\vec{g}^i \cdot \vec{g}_i) = \nabla_i A^i = A^i|_i \quad (\text{A2.74})$$

por lo cual,

$$\text{div } \vec{A} = A^i|_i = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \left\{ \begin{matrix} i \\ j \ i \end{matrix} \right\} A^j \quad i=1,2,3 \quad j=1,2,3. \quad (\text{A2.75})$$

En este caso, el símbolo de Christoffel resulta

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ j \ i \end{matrix} \right\} = \Gamma_{ji}^i = \frac{g^{ip}}{2} \left( \frac{\partial g_{ip}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{pj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^p} \right) \quad i=1,2,3 \quad j=1,2,3 \quad p=1,2,3, \quad (\text{A2.76})$$

por lo cual la divergencia del campo de velocidades relativas se plantea en un sistema coordenado curvilíneo general como

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{V} = v^i|_i &= \left( \frac{\partial v^1}{\partial x^1} + \frac{\partial v^2}{\partial x^2} + \frac{\partial v^3}{\partial x^3} \right) + \frac{1}{2} \left\{ g^{ip} \left( \frac{\partial g_{pj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{pi}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^p} \right) v^j \right\} = \\ &= \left( \frac{\partial v^1}{\partial x^1} + \frac{\partial v^2}{\partial x^2} + \frac{\partial v^3}{\partial x^3} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ g^{ip} \left( \frac{\partial g_{p1}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{pi}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{li}}{\partial x^p} \right) v^1 + g^{ip} \left( \frac{\partial g_{p2}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{pi}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{2i}}{\partial x^p} \right) v^2 + O(v^3) \right\} \\ &i=1,2,3 \quad p=1,2,3. \end{aligned} \quad (\text{A2.77})$$

Recordando que, dada la definición particularizada del eje curvilíneo definido por  $x^3$  que se establece como perpendicular tanto a  $x^1$  como a  $x^2$ ,

$$g^{13} = g^{31} = g^{23} = g^{32} = 0 \quad (\text{A2.78})$$

y despreciando los términos de orden  $v^3$ , bajo el supuesto de capa límite, resulta

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{V} = v^i|_i &\cong \left( \frac{\partial v^1}{\partial x^1} + \frac{\partial v^2}{\partial x^2} + \frac{\partial v^3}{\partial x^3} \right) + \\
&+ \frac{1}{2} \left\{ g^{11} \left[ \left( \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right) v^1 + \left( \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right) v^2 \right] + g^{12} \left[ \left( 2 \frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right) v^1 + \left( \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) v^2 \right] + \right. \\
&+ g^{21} \left[ \left( \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right) v^1 + \left( 2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) v^2 \right] + g^{22} \left[ \left( \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) v^1 + \left( \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} \right) v^2 \right] + \\
&\left. + g^{33} \left[ \left( \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right) v^1 + \left( \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \right) v^2 \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{A2.79}$$

Por (A2.60),

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{V} = v^i|_i &\cong \left( \frac{\partial v^1}{\partial x^1} + \frac{\partial v^2}{\partial x^2} + \frac{\partial v^3}{\partial x^3} \right) + \\
&+ \frac{g_{33}}{2g_0} \left\{ g_{11} \left[ \left( \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) v^1 + \left( \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} \right) v^2 \right] - 2g_{12} \left[ \left( \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} \right) v^1 + \left( \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} \right) v^2 \right] + g_{22} \left[ \left( \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right) v^1 + \left( \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right) v^2 \right] + \right. \\
&\left. + \frac{1}{g_{33}} \left( \frac{g_0}{g_{33}} \right) \left[ \left( \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right) v^1 + \left( \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \right) v^2 \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{A2.80}$$

Introduciendo las definiciones de componentes físicas contravariantes de la velocidad relativa,

$$v^i \equiv v^i \frac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{g_{ii}}} \equiv \frac{u^i}{h_i} \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{no sumar}) \tag{A2.67}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{V} = v^i \Big|_i &\cong \left( \frac{\partial(\mathbf{u}^1 / \mathbf{h}_1)}{\partial x^1} + \frac{\partial(\mathbf{u}^2 / \mathbf{h}_2)}{\partial x^2} + \frac{\partial(\mathbf{u}^3 / \mathbf{h}_3)}{\partial x^3} \right) + \\
&+ \frac{\mathbf{g}_{33}}{2\mathbf{g}_0} \left\{ \frac{\mathbf{u}^1}{\mathbf{h}_1} \left[ \mathbf{g}_{11} \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{22}}{\partial x^1} \right) - 2\mathbf{g}_{12} \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{12}}{\partial x^1} \right) + \mathbf{g}_{22} \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{11}}{\partial x^1} \right) + \frac{\mathbf{g}_0}{(\mathbf{g}_{33})^2} \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{33}}{\partial x^1} \right) \right] \right\} \\
&+ \frac{\mathbf{u}^2}{\mathbf{h}_2} \left[ \mathbf{g}_{11} \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{22}}{\partial x^2} \right) - 2\mathbf{g}_{12} \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{12}}{\partial x^2} \right) + \mathbf{g}_{22} \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{11}}{\partial x^2} \right) + \frac{\mathbf{g}_0}{(\mathbf{g}_{33})^2} \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{33}}{\partial x^2} \right) \right] \Big\}
\end{aligned} \tag{A2.81}$$

y, por (A2.64)

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{V} = v^i \Big|_i &\cong \left( \frac{1}{\mathbf{h}_1} \frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial x^1} + \frac{1}{\mathbf{h}_2} \frac{\partial \mathbf{u}^2}{\partial x^2} + \frac{1}{\mathbf{h}_3} \frac{\partial \mathbf{u}^3}{\partial x^3} + \mathbf{u}^1 \frac{\partial(1/\mathbf{h}_1)}{\partial x^1} + \mathbf{u}^2 \frac{\partial(1/\mathbf{h}_2)}{\partial x^2} \right) + \\
&+ \frac{\mathbf{g}_{33}}{2\mathbf{g}_0} \left\{ \frac{\mathbf{u}^1}{\mathbf{h}_1} \left[ (\mathbf{h}_1)^2 \left( \frac{\partial (\mathbf{h}_2)^2}{\partial x^1} \right) - 2\mathbf{g}_{12} \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{12}}{\partial x^1} \right) + (\mathbf{h}_2)^2 \left( \frac{\partial (\mathbf{h}_1)^2}{\partial x^1} \right) + \frac{\mathbf{g}_0}{(\mathbf{h}_3)^4} \left( \frac{\partial (\mathbf{h}_3)^2}{\partial x^1} \right) \right] \right\} + \\
&+ \frac{\mathbf{g}_{33}}{2\mathbf{g}_0} \left\{ \frac{\mathbf{u}^2}{\mathbf{h}_2} \left[ (\mathbf{h}_1)^2 \left( \frac{\partial (\mathbf{h}_2)^2}{\partial x^2} \right) - 2\mathbf{g}_{12} \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{12}}{\partial x^2} \right) + (\mathbf{h}_2)^2 \left( \frac{\partial (\mathbf{h}_1)^2}{\partial x^2} \right) + \frac{\mathbf{g}_0}{(\mathbf{h}_3)^4} \left( \frac{\partial (\mathbf{h}_3)^2}{\partial x^2} \right) \right] \right\},
\end{aligned} \tag{A2.82}$$

resultando

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{V} = v^i \Big|_i &\cong \left( \frac{1}{\mathbf{h}_1} \frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial x^1} + \frac{1}{\mathbf{h}_2} \frac{\partial \mathbf{u}^2}{\partial x^2} + \frac{1}{\mathbf{h}_3} \frac{\partial \mathbf{u}^3}{\partial x^3} - \frac{\mathbf{u}^1}{(\mathbf{h}_1)^2} \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial x^1} - \frac{\mathbf{u}^2}{(\mathbf{h}_2)^2} \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial x^2} \right) + \\
&+ \frac{\mathbf{g}_{33}}{\mathbf{g}_0} \left\{ \frac{\mathbf{u}^1}{\mathbf{h}_1} \left[ (\mathbf{h}_1)^2 \mathbf{h}_2 \left( \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial x^1} \right) - \mathbf{g}_{12} \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{12}}{\partial x^1} \right) + (\mathbf{h}_2)^2 \mathbf{h}_1 \left( \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial x^1} \right) + \frac{\mathbf{g}_0}{(\mathbf{h}_3)^3} \left( \frac{\partial \mathbf{h}_3}{\partial x^1} \right) \right] \right\} + \\
&+ \frac{\mathbf{g}_{33}}{\mathbf{g}_0} \left\{ \frac{\mathbf{u}^2}{\mathbf{h}_2} \left[ (\mathbf{h}_1)^2 \mathbf{h}_2 \left( \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial x^2} \right) - \mathbf{g}_{12} \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{12}}{\partial x^2} \right) + (\mathbf{h}_2)^2 \mathbf{h}_1 \left( \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial x^2} \right) + \frac{\mathbf{g}_0}{(\mathbf{h}_3)^3} \left( \frac{\partial \mathbf{h}_3}{\partial x^2} \right) \right] \right\},
\end{aligned} \tag{A2.83}$$

expresión que es reordenada como

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{V} = v^i \Big|_i &\cong \left( \frac{1}{\mathbf{h}_1} \frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial x^1} + \frac{1}{\mathbf{h}_2} \frac{\partial \mathbf{u}^2}{\partial x^2} + \frac{1}{\mathbf{h}_3} \frac{\partial \mathbf{u}^3}{\partial x^3} \right) + \\
&+ \mathbf{u}^1 \left\{ \frac{\mathbf{g}_{33}}{\mathbf{g}_0 \mathbf{h}_1} \left[ (\mathbf{h}_1)^2 \mathbf{h}_2 \left( \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial x^1} \right) - \mathbf{g}_{12} \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{12}}{\partial x^1} \right) + \left( (\mathbf{h}_2)^2 \mathbf{h}_1 - \frac{\mathbf{g}_0}{\mathbf{g}_{33} \mathbf{h}_1} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial x^1} \right) + \frac{\mathbf{g}_0}{\mathbf{g}_{33} \mathbf{h}_3} \left( \frac{\partial \mathbf{h}_3}{\partial x^1} \right) \right] \right\} + \\
&+ \mathbf{u}^2 \left\{ \frac{\mathbf{g}_{33}}{\mathbf{g}_0 \mathbf{h}_2} \left[ \left( (\mathbf{h}_1)^2 \mathbf{h}_2 - \frac{\mathbf{g}_0}{\mathbf{g}_{33} \mathbf{h}_2} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial x^2} \right) - \mathbf{g}_{12} \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{12}}{\partial x^2} \right) + (\mathbf{h}_2)^2 \mathbf{h}_1 \left( \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial x^2} \right) + \frac{\mathbf{g}_0}{\mathbf{g}_{33} \mathbf{h}_3} \left( \frac{\partial \mathbf{h}_3}{\partial x^2} \right) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{A2.84}$$

Finalmente, escribiendo (A2.62) de una manera más compacta, resulta

$$\operatorname{div} \vec{V} = v^i \Big|_i \cong \frac{1}{h_1} \frac{\partial u^1}{\partial x^1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial u^3}{\partial x^3} + K_{10} u^1 + K_{20} u^2, \quad (\text{A2.85})$$

siendo

$$K_{10} = \frac{g_{33}}{g_0} \left[ h_1 h_2 \left( \frac{\partial h_2}{\partial x^1} \right) - \frac{g_{12}}{h_1} \left( \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} \right) + \left( (h_2)^2 - \frac{g_0}{g_{33}} \frac{1}{(h_1)^2} \right) \left( \frac{\partial h_1}{\partial x^1} \right) + \frac{g_0}{g_{33}} \frac{1}{h_1 h_3} \left( \frac{\partial h_3}{\partial x^1} \right) \right] \quad (\text{A2.86})$$

$$K_{20} = \frac{g_{33}}{g_0} \left[ \left( (h_1)^2 - \frac{g}{g_{33}} \frac{1}{(h_2)^2} \right) \left( \frac{\partial h_2}{\partial x^2} \right) - \frac{g_{12}}{h_2} \left( \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} \right) + h_2 h_1 \left( \frac{\partial h_1}{\partial x^2} \right) + \frac{g_0}{g_{33}} \frac{1}{h_2 h_3} \left( \frac{\partial h_3}{\partial x^2} \right) \right]. \quad (\text{A2.87})$$

#### A2.2.4. Aceleración convectiva $(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}$

Por definición de producto escalar,

$$\vec{V} \cdot \vec{\nabla} = (v^m \vec{g}_m) \cdot \left[ \vec{g}^n \left( \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \right] = \left[ v^m \left( \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \right] (\vec{g}_m \cdot \vec{g}^n) = \left[ v^m \left( \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \right] \delta_m^n = v^n \left( \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \quad (\text{A2.88})$$

y aplicando el operador diferencial resultante al vector velocidad relativa, resulta entonces de la definición de derivada covariante

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = v^n \left( \frac{\partial}{\partial x^n} \right) (v^m \vec{g}_m) = v^n \left( \frac{\partial v^m}{\partial x^n} \vec{g}_m + v^m \frac{\partial \vec{g}_m}{\partial x^n} \right) = v^n \frac{\partial v^m}{\partial x^n} \vec{g}_m + v^n v^m \left\{ \begin{matrix} s \\ m n \end{matrix} \right\} \vec{g}_s \quad (\text{A2.89})$$

con el símbolo de Christoffel de segunda clase

$$\left\{ \begin{matrix} s \\ m n \end{matrix} \right\} = \Gamma_{mn}^s = \frac{g^{sr}}{2} \left( \frac{\partial g_{nr}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{rm}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^r} \right). \quad (\text{A2.90})$$

$$s = 1,2,3 \quad m = 1,2,3 \quad n = 1,2,3 \quad r = 1,2,3$$

Desarrollando los términos involucrados, se tiene como resultado parcial,

$$\begin{aligned} (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} &= \left\{ v^1 \frac{\partial v^1}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial v^1}{\partial x^2} + v^3 \frac{\partial v^1}{\partial x^3} \right\} \vec{g}_1 + \left\{ v^1 \frac{\partial v^2}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial v^2}{\partial x^2} + v^3 \frac{\partial v^2}{\partial x^3} \right\} \vec{g}_2 + \\ &+ \{O(\delta)\} \vec{g}_3 + v^n v^m \frac{g^{sr}}{2} \left( \frac{\partial g_{nr}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{rm}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^r} \right) \vec{g}_s \end{aligned} \quad (\text{A2.91})$$

$$s = 1,2,3 \quad m = 1,2,3 \quad n = 1,2,3 \quad r = 1,2,3$$

con el siguiente desarrollo particular de los términos (mostrado solamente para  $\bar{g}_1$ )

$$\begin{aligned}
& v^n v^m \frac{g^{sr}}{2} \left( \frac{\partial g_{nr}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{rm}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^r} \right) \bar{g}_s = \\
& = \frac{v^1 v^1}{2} \left( g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + 2g^{12} \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} - g^{12} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right) \bar{g}_1 + \\
& \quad + \frac{v^1 v^2}{2} \left( 2g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} + 2g^{12} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) \bar{g}_1 + \\
& \quad + \frac{v^2 v^2}{2} \left( 2g^{11} \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} + g^{12} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} - g^{11} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) \bar{g}_1 + (\dots) \bar{g}_2 + (O(\delta)) \bar{g}_3.
\end{aligned} \tag{A2.92}$$

Teniendo en consideración las hipótesis de capa límite, es decir, despreciando los términos que involucren productos con la componente  $v^3$ , e ignorando los términos correspondientes a la componente  $g^3$  del vector base en coordenadas curvilíneas, y llevando los componentes contravariantes del tensor fundamental a su formulación en términos de las componentes covariantes de dicho tensor,

$$[g^{ij}] = [g_{ij}]^{-1} = \frac{1}{g_0} \begin{bmatrix} g_{22}g_{33} & -g_{12}g_{33} & 0 \\ -g_{21}g_{33} & g_{11}g_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2\} \end{bmatrix} \tag{A2.93}$$

la ecuación (A2.92) presenta el siguiente desarrollo aproximado,

$$\begin{aligned}
& v^n v^m \frac{g^{sr}}{2} \left( \frac{\partial g_{nr}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{rm}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^r} \right) \bar{g}_s \cong \\
& \cong v^1 v^1 \frac{g_{33}}{g_0} \left[ h_1 g_{22} \frac{\partial h_1}{\partial x^1} + g_{12} \left( h_1 \frac{\partial h_1}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} \right) \right] \bar{g}_1 + \\
& \quad + v^1 v^2 \frac{g_{33}}{g_0} 2 \left( h_1 g_{22} \frac{\partial h_1}{\partial x^2} - h_2 g_{12} \frac{\partial h_2}{\partial x^1} \right) \bar{g}_1 + \\
& \quad + v^2 v^2 \frac{g_{33}}{g_0} \left[ g_{22} \left( \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} - h_2 \frac{\partial h_2}{\partial x^1} \right) - h_2 g_{12} \frac{\partial h_2}{\partial x^2} \right] \bar{g}_1 + (\dots) \bar{g}_2.
\end{aligned} \tag{A2.94}$$

Introduciendo nuevamente las definiciones de componentes físicas contravariantes de la velocidad relativa y de los versores del sistema coordenado curvilíneo general con bases  $\bar{g}_i$ ,

$$v^i = \frac{u^i}{\sqrt{g_{ii}}} = \frac{u^i}{h_i} \quad \hat{e}_i = \frac{\bar{g}_i}{\sqrt{g_{ii}}} = \frac{\bar{g}_i}{h_i} \quad (\text{no sumar}) \quad (\text{A2.95})$$

resultan

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}}) \bar{\mathbf{v}} \cong & h_1 \left\{ \frac{u^1}{h_1} \frac{\partial(u^1/h_1)}{\partial x^1} + \frac{u^2}{h_2} \frac{\partial(u^1/h_1)}{\partial x^2} + \frac{u^3}{h_3} \frac{\partial(u^1/h_1)}{\partial x^3} \right\} \hat{e}_1 \\ & + h_2 \left\{ \frac{u^1}{h_1} \frac{\partial(u^2/h_2)}{\partial x^1} + \frac{u^2}{h_2} \frac{\partial(u^2/h_2)}{\partial x^2} + \frac{u^3}{h_3} \frac{\partial(u^2/h_2)}{\partial x^3} \right\} \hat{e}_2. \end{aligned} \quad (\text{A2.96})$$

Efectuando las respectivas derivaciones,

$$\begin{aligned} & (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}}) \bar{\mathbf{v}} \cong \\ \cong & h_1 \left\{ \frac{u^1}{h_1} \left[ \frac{1}{h_1} \frac{\partial u^1}{\partial x^1} - \frac{u^1}{(h_1)^2} \frac{\partial h_1}{\partial x^1} \right] + \frac{u^2}{h_2} \left[ \frac{1}{h_1} \frac{\partial u^1}{\partial x^2} - \frac{u^1}{(h_1)^2} \frac{\partial h_1}{\partial x^2} \right] + \frac{u^3}{h_3} \left[ \frac{1}{h_1} \frac{\partial u^1}{\partial x^3} \right] \right\} \hat{e}_1 + \\ & + h_2 \left\{ \frac{u^1}{h_1} \left[ \frac{1}{h_2} \frac{\partial u^2}{\partial x^1} - \frac{u^2}{(h_2)^2} \frac{\partial h_2}{\partial x^1} \right] + \frac{u^2}{h_2} \left[ \frac{1}{h_2} \frac{\partial u^2}{\partial x^2} - \frac{u^2}{(h_2)^2} \frac{\partial h_2}{\partial x^2} \right] + \frac{u^3}{h_3} \left[ \frac{1}{h_2} \frac{\partial u^2}{\partial x^3} \right] \right\} \hat{e}_2 \end{aligned} \quad (\text{A2.97})$$

y reordenando, resulta

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}}) \bar{\mathbf{v}} \cong & \left\{ \frac{u^1}{h_1} \frac{\partial u^1}{\partial x^1} + \frac{u^2}{h_2} \frac{\partial u^1}{\partial x^2} + \frac{u^3}{h_3} \frac{\partial u^1}{\partial x^3} - \frac{u^1 u^1}{(h_1)^2} \frac{\partial h_1}{\partial x^1} - \frac{u^1 u^2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x^2} \right\} \hat{e}_1 + \\ & + u^1 u^1 \frac{g_{33}}{g_0} \left[ (h_2)^2 \frac{\partial h_1}{\partial x^1} + g_{12} \left( \frac{\partial h_1}{\partial x^2} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} \right) \right] \hat{e}_1 + \\ & + u^1 u^2 \frac{g_{33}}{g_0} 2 \left( h_1 h_2 \frac{\partial h_1}{\partial x^2} - g_{12} \frac{\partial h_2}{\partial x^1} \right) \hat{e}_1 + \\ & + u^2 u^2 \frac{g_{33}}{g_0} h_1 \left[ \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} - h_2 \frac{\partial h_2}{\partial x^2} + \frac{g_{12}}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x^2} \right] \hat{e}_1 + \\ & + \left\{ \frac{u^1}{h_1} \frac{\partial u^2}{\partial x^1} + \frac{u^2}{h_2} \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{u^3}{h_3} \frac{\partial u^2}{\partial x^3} - \frac{u^2 u^2}{(h_2)^2} \frac{\partial h_2}{\partial x^2} - \frac{u^1 u^2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x^1} \right\} \hat{e}_2 + \\ & + u^1 u^1 \frac{g_{33}}{g_0} h_2 \left[ \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} - h_1 \frac{\partial h_1}{\partial x^2} - \frac{g_{12}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x^1} \right] \hat{e}_2 + \end{aligned} \quad (\text{A2.98})$$

$$+ u^1 u^2 \frac{g_{33}}{g_0} 2 \left( h_1 h_2 \frac{\partial h_2}{\partial x^1} - g_{12} \frac{\partial h_1}{\partial x^2} \right) \hat{e}_2 + \quad (\text{A2.98})$$

$$+ u^2 u^2 \frac{g_{33}}{g_0} \left[ (h_1)^2 \frac{\partial h_2}{\partial x^2} - \frac{g_{12}}{h_2} \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} + g_{12} \frac{\partial h_2}{\partial x^1} \right] \hat{e}_2. \quad (\text{cont.})$$

Reagrupando nuevamente términos

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} &\cong \left\{ \frac{u^1}{h_1} \frac{\partial u^1}{\partial x^1} + \frac{u^2}{h_2} \frac{\partial u^1}{\partial x^2} + \frac{u^3}{h_3} \frac{\partial u^1}{\partial x^3} \right\} \hat{e}_1 + \\ &+ u^1 u^1 \frac{g_{33}}{g_0} \left[ \left( (h_2)^2 - \frac{1}{(h_1)^2} \frac{g_0}{g_{33}} \right) \frac{\partial h_1}{\partial x^1} + g_{12} \left( \frac{\partial h_1}{\partial x^2} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} \right) \right] \hat{e}_1 + \\ &+ u^1 u^2 \frac{g_{33}}{g_0} 2 \left[ \left( h_1 h_2 - \frac{1}{2 h_1 h_2} \frac{g_0}{g_{33}} \right) \frac{\partial h_1}{\partial x^2} - g_{12} \frac{\partial h_2}{\partial x^1} \right] \hat{e}_1 + \\ &+ u^2 u^2 \frac{g_{33}}{g_0} h_1 \left[ \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} - h_2 \frac{\partial h_2}{\partial x^2} - \frac{g_{12}}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x^2} \right] \hat{e}_1 + \\ &+ \left\{ \frac{u^1}{h_1} \frac{\partial u^2}{\partial x^1} + \frac{u^2}{h_2} \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{u^3}{h_3} \frac{\partial u^2}{\partial x^3} \right\} \hat{e}_2 + \quad (\text{A2.99}) \\ &+ u^1 u^1 \frac{g_{33}}{g_0} h_2 \left[ \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} - h_1 \frac{\partial h_1}{\partial x^2} - \frac{g_{12}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x^1} \right] \hat{e}_2 + \\ &+ u^1 u^2 \frac{g_{33}}{g_0} 2 \left[ \left( h_1 h_2 - \frac{1}{2 h_1 h_2} \frac{g_0}{g_{33}} \right) \frac{\partial h_2}{\partial x^1} - g_{12} \frac{\partial h_1}{\partial x^2} \right] \hat{e}_2 + \\ &+ u^2 u^2 \frac{g_{33}}{g_0} \left[ \left( (h_1)^2 - \frac{1}{(h_2)^2} \frac{g_0}{g_{33}} \right) \frac{\partial h_2}{\partial x^2} + g_{12} \left( \frac{\partial h_2}{\partial x^1} - \frac{1}{h_2} \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} \right) \right] \hat{e}_2, \end{aligned}$$

expresión que puede compactarse mediante la introducción de coeficientes  $K_{ijk}$ , que incluyen los términos provenientes de los símbolos de Christoffel,

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} &\cong \left\{ \frac{u^1}{h_1} \frac{\partial u^1}{\partial x^1} + \frac{u^2}{h_2} \frac{\partial u^1}{\partial x^2} + \frac{u^3}{h_3} \frac{\partial u^1}{\partial x^3} + K_{111} u^1 u^1 + K_{121} u^1 u^2 + K_{221} u^2 u^2 \right\} \hat{e}_1 + \\ &+ \left\{ \frac{u^1}{h_1} \frac{\partial u^2}{\partial x^1} + \frac{u^2}{h_2} \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{u^3}{h_3} \frac{\partial u^2}{\partial x^3} + K_{112} u^1 u^1 + K_{122} u^1 u^2 + K_{222} u^2 u^2 \right\} \hat{e}_2 \quad (\text{A2.100}) \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{111} &= \frac{\mathbf{g}_{33}}{\mathbf{g}_0} \left[ \left( (\mathbf{h}_2)^2 - \frac{1}{(\mathbf{h}_1)^2} \frac{\mathbf{g}_0}{\mathbf{g}_{33}} \right) \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{x}^1} + \mathbf{g}_{12} \left( \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{x}^2} - \frac{1}{\mathbf{h}_1} \frac{\partial \mathbf{g}_{12}}{\partial \mathbf{x}^1} \right) \right] \\
\mathbf{K}_{121} &= \frac{\mathbf{g}_{33}}{\mathbf{g}_0} 2 \left[ \left( \mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2 - 2 \frac{1}{\mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2} \frac{\mathbf{g}_0}{\mathbf{g}_{33}} \right) \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{x}^2} - \mathbf{g}_{12} \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{x}^1} \right] \\
\mathbf{K}_{221} &= \frac{\mathbf{g}_{33}}{\mathbf{g}_0} \mathbf{h}_1 \left[ \frac{\partial \mathbf{g}_{12}}{\partial \mathbf{x}^2} - \mathbf{h}_2 \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{x}^1} - \frac{\mathbf{g}_{12}}{\mathbf{h}_2} \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{x}^2} \right] \\
\mathbf{K}_{112} &= \frac{\mathbf{g}_{33}}{\mathbf{g}_0} \mathbf{h}_2 \left[ \frac{\partial \mathbf{g}_{12}}{\partial \mathbf{x}^1} - \mathbf{h}_1 \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{x}^2} - \frac{\mathbf{g}_{12}}{\mathbf{h}_1} \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{x}^1} \right] \\
\mathbf{K}_{122} &= \frac{\mathbf{g}_{33}}{\mathbf{g}_0} 2 \left[ \left( \mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2 - \frac{1}{2\mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2} \frac{\mathbf{g}_0}{\mathbf{g}_{33}} \right) \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{x}^1} - \mathbf{g}_{12} \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{x}^2} \right] \\
\mathbf{K}_{222} &= \frac{\mathbf{g}_{33}}{\mathbf{g}_0} \left[ \left( (\mathbf{h}_1)^2 - \frac{1}{(\mathbf{h}_2)^2} \frac{\mathbf{g}_0}{\mathbf{g}_{33}} \right) \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{x}^2} + \mathbf{g}_{12} \left( \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{x}^1} - \frac{1}{\mathbf{h}_2} \frac{\partial \mathbf{g}_{12}}{\partial \mathbf{x}^2} \right) \right].
\end{aligned} \tag{A2.101}$$

### A2.2.5. Gradiente de presión $\vec{\nabla} p$

Definiendo al operador diferencial

$$\vec{\nabla} = \vec{g}^i \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^i} \right) \tag{A2.102}$$

y reescribiendo las bases contravariantes en función de los versores curvilíneos covariantes,

$$\vec{g}^i = \mathbf{g}^{ij} \vec{g}_j = [\mathbf{g}_{ij}]^{-1} \vec{g}_j = [\mathbf{g}_{ij}]^{-1} \frac{\sqrt{\mathbf{g}_{jj}}}{\sqrt{\mathbf{g}_{jj}}} \vec{g}_j = \sqrt{\mathbf{g}_{jj}} [\mathbf{g}_{ij}]^{-1} \hat{\mathbf{e}}_j = \mathbf{h}_j [\mathbf{g}_{ij}]^{-1} \hat{\mathbf{e}}_j \tag{A2.103}$$

siendo  $\mathbf{h}_j = \sqrt{\mathbf{g}_{jj}}$  (no sumar),

resulta la siguiente expresión del gradiente de las presiones

$$\vec{\nabla} p = \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}^i} \vec{g}^i = \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}^i} \mathbf{h}_j [\mathbf{g}_{ij}]^{-1} \hat{\mathbf{e}}_j \tag{A2.104}$$

donde



$$[\mathbf{g}^{ij}] = [\mathbf{g}_{ij}]^{-1} = \frac{1}{g_0} \begin{bmatrix} g_{22}g_{33} & -g_{12}g_{33} & 0 \\ -g_{21}g_{33} & g_{11}g_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2\} \end{bmatrix}. \quad (\text{A2.93})$$

Entonces, en coordenadas curvilíneas, se tiene

$$\vec{\nabla} \mathbf{p} \cong \left\{ \frac{h_1}{g_0} \left[ g_{22}g_{33} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^1} - g_{12}g_{33} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^2} \right] \right\} \hat{e}_1 + \left\{ \frac{h_2}{g_0} \left[ -g_{12}g_{33} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^1} + g_{11}g_{33} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^2} \right] \right\} \hat{e}_2, \quad (\text{A2.105})$$

expresión en la cual no se ha desarrollado el término según  $\hat{e}_3$  por considerarlo despreciable bajo las hipótesis de la capa límite.

### A2.2.6. Laplaciano del campo de velocidades relativas a la pala $\nabla^2 \vec{\mathbf{V}}$

Por definición de operador laplaciano,

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{V}} = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial x^j} \left[ J g^{ij} \frac{\partial \vec{\mathbf{V}}}{\partial x^i} \right] \quad (\text{A2.106})$$

siendo  $J^2 = g_0$ .

Incorporando la definición de derivada covariante,

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{V}} = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial x^j} \left[ J g^{ij} \left( \frac{\partial v^m}{\partial x^i} + \left\{ \begin{matrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{s} \ \mathbf{i} \end{matrix} \right\} v^s \right) \vec{\mathbf{g}}_m \right] \quad (\text{A2.107})$$

con el símbolo de Christoffel de segunda clase

$$\left\{ \begin{matrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{s} \ \mathbf{i} \end{matrix} \right\} = \Gamma_{\mathbf{s} \ \mathbf{i}}^{\mathbf{m}} = \frac{g^{\mathbf{m} \mathbf{p}}}{2} \left( \frac{\partial g_{\mathbf{i} \mathbf{p}}}{\partial x^{\mathbf{s}}} + \frac{\partial g_{\mathbf{p} \mathbf{s}}}{\partial x^{\mathbf{i}}} - \frac{\partial g_{\mathbf{s} \mathbf{i}}}{\partial x^{\mathbf{p}}} \right), \quad (\text{A2.108})$$

$$i = 1, 2, 3 \quad s = 1, 2, 3 \quad m = 1, 2, 3 \quad p = 1, 2, 3$$

realizando nuevamente la operación de derivación de un producto de funciones,

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{\mathbf{V}} = & \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial x^j} g^{ij} \left( \frac{\partial v^m}{\partial x^i} + \left\{ \begin{matrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{s} \ \mathbf{i} \end{matrix} \right\} v^s \right) \vec{\mathbf{g}}_m + \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^j} \left( \frac{\partial v^m}{\partial x^i} + \left\{ \begin{matrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{s} \ \mathbf{i} \end{matrix} \right\} v^s \right) \vec{\mathbf{g}}_m + \\ & + g^{ij} \left( \frac{\partial^2 v^m}{\partial x^j \partial x^i} + v^s \frac{\partial}{\partial x^j} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{s} \ \mathbf{i} \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{s} \ \mathbf{i} \end{matrix} \right\} \frac{\partial v^s}{\partial x^j} \right) \vec{\mathbf{g}}_m + g^{ij} \left( \frac{\partial v^m}{\partial x^i} + \left\{ \begin{matrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{s} \ \mathbf{i} \end{matrix} \right\} v^s \right) (\Gamma_{\mathbf{m} \mathbf{j}}^{\mathbf{s}} \vec{\mathbf{g}}_s) \end{aligned} \quad (\text{A2.109})$$

y sabiendo que la derivada del vector base covariante resulta

$$\frac{\partial \bar{g}_m}{\partial x^j} = \left\{ \begin{matrix} s \\ m \ j \end{matrix} \right\} \bar{g}_s = \Gamma_{mj}^s \bar{g}_s \quad (\text{A2.110})$$

siendo

$$\left\{ \begin{matrix} s \\ m \ j \end{matrix} \right\} = \Gamma_{mj}^s = \frac{g^{sr}}{2} \left( \frac{\partial g_{jr}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{rm}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^r} \right), \quad (\text{A2.111})$$

$$j=1,2,3 \quad s=1,2,3 \quad m=1,2,3 \quad r=1,2,3$$

resulta entonces

$$\nabla^2 \bar{V} = \left\{ g^{ij} \left( \frac{\partial v^m}{\partial x^i} + \Gamma_{si}^m v^s \right) \Gamma_{mj}^s \right\} \bar{g}_s +$$

$$+ \left\{ g^{ij} \left[ \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial x^j} \left( \frac{\partial v^m}{\partial x^i} + \Gamma_{si}^m v^s \right) + \frac{\partial^2 v^m}{\partial x^j \partial x^i} + v^s \frac{\partial \Gamma_{si}^m}{\partial x^j} + \Gamma_{si}^m \frac{\partial v^s}{\partial x^j} \right] \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^j} \left( \frac{\partial v^m}{\partial x^i} + \Gamma_{si}^m v^s \right) \right\} \bar{g}_m \quad (\text{A2.112})$$

con la siguiente expresión para la derivada del símbolo de Christoffel de segunda clase

$$\frac{\partial \Gamma_{si}^m}{\partial x^j} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g^{mp}}{\partial x^j} \left( \frac{\partial g_{ps}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{pi}}{\partial x^s} - \frac{\partial g_{si}}{\partial x^p} \right) + g^{mp} \left( \frac{\partial^2 g_{ps}}{\partial x^j \partial x^i} + \frac{\partial^2 g_{pi}}{\partial x^j \partial x^s} - \frac{\partial^2 g_{si}}{\partial x^j \partial x^p} \right) \right]. \quad (\text{A2.113})$$

Bajo las hipótesis de la capa límite, los únicos términos significativos resultan

$$\nabla^2 \bar{V} \cong \left\{ g^{33} \frac{\partial^2 v^1}{\partial (x^3)^2} \right\} \bar{g}_1 + \left\{ g^{33} \frac{\partial^2 v^2}{\partial (x^3)^2} \right\} \bar{g}_2 = g^{33} \left[ \frac{\partial^2 v^1}{\partial (x^3)^2} \bar{g}_1 + \frac{\partial^2 v^2}{\partial (x^3)^2} \bar{g}_2 \right] \quad (\text{A2.114})$$

y dado que

$$g^{33} = \frac{1}{g_0} [g_{11} g_{22} - (g_{12})^2] = \frac{1}{g_0} \left( \frac{g_0}{g_{33}} \right) = \frac{1}{g_{33}} \quad (\text{A2.115})$$

finalmente,

$$\nabla^2 \bar{V} \cong \frac{1}{g_{33}} \left[ \frac{\partial^2 v^1}{\partial (x^3)^2} \bar{g}_1 + \frac{\partial^2 v^2}{\partial (x^3)^2} \bar{g}_2 \right]. \quad (\text{A2.116})$$

Como

$$v^i = \frac{u^i}{\sqrt{g_{ii}}} = \frac{u^i}{h_i} \quad \bar{g}_i = \hat{e}_i \sqrt{g_{ii}} = \hat{e}_i h_i \quad (\text{no sumar}) \quad v^i \bar{g}_i \equiv u^i \hat{e}_i \quad (\text{A2.117})$$

entonces, en función de las componentes físicas del campo de velocidades en el sistema curvilíneo, la expresión del laplaciano del campo de velocidades resulta

$$\nabla^2 \vec{V} \cong \frac{1}{g_{33}} \left[ \frac{\partial^2 u^1}{\partial (x^3)^2} \hat{e}_1 + \frac{\partial^2 u^2}{\partial (x^3)^2} \hat{e}_2 \right]. \quad (\text{A2.118})$$

### A2.3. ECUACIONES DE LA CAPA LÍMITE ESTACIONARIA 3D

Incorporando las expresiones finales de los términos desarrollados anteriormente, las ecuaciones de la capa límite resultan, reconociendo que la dirección perpendicular a la superficie es determinada por  $x^3$ ,

*Continuidad*

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial u^1}{\partial x^1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial u^3}{\partial x^3} + u^1 K_{10} + u^2 K_{20} = 0 \quad (\text{A2.119})$$

*Conservación de cantidad de movimiento según  $\hat{e}_1$ ,*

$$\begin{aligned} \frac{u^1}{h_1} \frac{\partial u^1}{\partial x^1} + \frac{u^2}{h_2} \frac{\partial u^1}{\partial x^2} + \frac{u^3}{h_3} \frac{\partial u^1}{\partial x^3} + K_{111} u^1 u^1 + K_{121} u^1 u^2 + K_{221} u^2 u^2 + \\ + \frac{h_1}{\rho g} g_{33} \left[ (h_2)^2 \frac{\partial p}{\partial x^1} - g_{12} \frac{\partial p}{\partial x^2} \right] - \frac{v}{g_{33}} \left[ \frac{\partial^2 u^1}{\partial (x^3)^2} \right] - \end{aligned} \quad (\text{A2.120})$$

$$- 2 \sqrt{\frac{g_{33}}{g_0}} [g_{12} u^1 + h_1 h_2 u^2] \omega^3 - \frac{h_1}{g_{33} (a_{33})^2} [a_{11} X^1 + a_{21} X^2] (\omega^3)^2 = 0$$

*Conservación de cantidad de movimiento según  $\hat{e}_2$ ,*

$$\begin{aligned} \frac{u^1}{h_1} \frac{\partial u^2}{\partial x^1} + \frac{u^2}{h_2} \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{u^3}{h_3} \frac{\partial u^2}{\partial x^3} + K_{112} u^1 u^1 + K_{122} u^1 u^2 + K_{222} u^2 u^2 + \\ + \frac{h_2}{\rho g} g_{33} \left[ -g_{12} \frac{\partial p}{\partial x^1} + (h_1)^2 \frac{\partial p}{\partial x^2} \right] - \frac{v}{g_{33}} \left[ \frac{\partial^2 u^2}{\partial (x^3)^2} \right] + \end{aligned} \quad (\text{A2.121})$$

$$+ 2 \sqrt{\frac{g_{33}}{g_0}} [h_1 h_2 u^1 + g_{12} u^2] \omega^3 - \frac{h_2}{g_{33} (a_{33})^2} [a_{12} X^1 + a_{22} X^2] (\omega^3)^2 = 0$$

donde

$$\mathbf{K}_{10} = \frac{\mathfrak{g}_{33}}{\mathfrak{g}_0} \left\{ \left[ (\mathbf{h}_2)^2 - \frac{\mathfrak{g}_0}{\mathfrak{g}_{33}} \frac{1}{(\mathbf{h}_1)^2} \right] \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{x}^1} - \frac{\mathfrak{g}_{12}}{\mathbf{h}_1} \frac{\partial \mathfrak{g}_{12}}{\partial \mathbf{x}^1} + \mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2 \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{x}^1} \right\} \quad (\text{A2.122})$$

$$\mathbf{K}_{20} = \frac{\mathfrak{g}_{33}}{\mathfrak{g}_0} \left\{ \left[ (\mathbf{h}_1)^2 - \frac{\mathfrak{g}_0}{\mathfrak{g}_{33}} \frac{1}{(\mathbf{h}_2)^2} \right] \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{x}^2} - \frac{\mathfrak{g}_{12}}{\mathbf{h}_2} \frac{\partial \mathfrak{g}_{12}}{\partial \mathbf{x}^2} + \mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2 \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{x}^2} \right\} \quad (\text{A2.123})$$

$$\mathbf{K}_{111} = \frac{\mathfrak{g}_{33}}{\mathfrak{g}_0} \mathfrak{g}_{12} \left\{ \frac{\mathfrak{g}_{12}}{(\mathbf{h}_1)^2} \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{x}^1} + \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{x}^2} - \frac{1}{\mathbf{h}_1} \frac{\partial \mathfrak{g}_{12}}{\partial \mathbf{x}^1} \right\} \quad (\text{A2.124})$$

$$\mathbf{K}_{121} = \frac{\mathfrak{g}_{33}}{\mathfrak{g}_0} \left\{ \mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2 \left[ 1 + \left( \frac{\mathfrak{g}_{12}}{\mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2} \right)^2 \right] \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{x}^2} - 2 \mathfrak{g}_{12} \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{x}^1} \right\} \quad (\text{A2.125})$$

$$\mathbf{K}_{221} = \frac{\mathfrak{g}_{33}}{\mathfrak{g}_0} \mathbf{h}_1 \left\{ \frac{\partial \mathfrak{g}_{12}}{\partial \mathbf{x}^2} - \mathbf{h}_2 \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{x}^1} - \frac{\mathfrak{g}_{12}}{\mathbf{h}_2} \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{x}^2} \right\} \quad (\text{A2.126})$$

$$\mathbf{K}_{112} = \frac{\mathfrak{g}_{33}}{\mathfrak{g}_0} \mathbf{h}_2 \left\{ \frac{\partial \mathfrak{g}_{12}}{\partial \mathbf{x}^1} - \mathbf{h}_1 \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{x}^2} - \frac{\mathfrak{g}_{12}}{\mathbf{h}_1} \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{x}^1} \right\} \quad (\text{A2.127})$$

$$\mathbf{K}_{122} = \frac{\mathfrak{g}_{33}}{\mathfrak{g}_0} \left\{ \mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2 \left[ 1 + \left( \frac{\mathfrak{g}_{12}}{\mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2} \right)^2 \right] \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{x}^1} - 2 \mathfrak{g}_{12} \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{x}^2} \right\} \quad (\text{A2.128})$$

$$\mathbf{K}_{222} = \frac{\mathfrak{g}_{33}}{\mathfrak{g}_0} \mathfrak{g}_{12} \left\{ \frac{\mathfrak{g}_{12}}{(\mathbf{h}_2)^2} \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{x}^1} - \frac{1}{\mathbf{h}_2} \frac{\partial \mathfrak{g}_{12}}{\partial \mathbf{x}^2} \right\}. \quad (\text{A2.129})$$

Haciendo uso de la nomenclatura habitualmente utilizada,

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_z & \begin{cases} \mathbf{x}^1 = z \\ \mathbf{x}^2 = x \\ \mathbf{x}^3 = y \end{cases} & \begin{cases} \mathbf{u}^1 = w \\ \mathbf{u}^2 = u \\ \mathbf{u}^3 = v \end{cases} \end{cases} \quad (\text{A2.130})$$

el sistema de ecuaciones de gobierno se describe como

*Continuidad*

$$\frac{1}{\mathbf{h}_1} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\mathbf{h}_2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\mathbf{h}_3} \frac{\partial v}{\partial y} + w \mathbf{K}_{10} + u \mathbf{K}_{20} = 0 \quad (\text{A2.131})$$

Conservación de cantidad de movimiento según  $\hat{z}$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{w}{h_1} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{h_2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{v}{h_3} \frac{\partial w}{\partial y} + K_{111} w w + K_{121} w u + K_{221} u u + \\ & + \frac{h_1}{\rho g_0} g_{33} \left[ (h_2)^2 \frac{\partial p}{\partial z} - g_{12} \frac{\partial p}{\partial x} \right] - \frac{v}{g_{33}} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] - \\ & - 2 \sqrt{\frac{g_{33}}{g_0}} [g_{12} w + h_1 h_2 u] \omega^3 - \frac{h_1}{g_{33} (a_{33})^2} [a_{11} X + a_{21} Y] (\omega^3)^2 = 0 \end{aligned} \quad (A2.132)$$

Conservación de cantidad de movimiento según  $\hat{x}$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{w}{h_1} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{u}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{h_3} \frac{\partial u}{\partial y} + K_{112} w w + K_{122} w u + K_{222} u u + \\ & + \frac{h_2}{\rho g_0} g_{33} \left[ -g_{12} \frac{\partial p}{\partial z} + (h_1)^2 \frac{\partial p}{\partial x} \right] - \frac{v}{g_{33}} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \\ & + 2 \sqrt{\frac{g_{33}}{g_0}} [h_1 h_2 w + g_{12} u] \omega^3 - \frac{h_2}{g_{33} (a_{33})^2} [a_{12} X + a_{22} Y] (\omega^3)^2 = 0 \end{aligned} \quad (A2.133)$$

donde

$$K_{10} = \frac{g_{33}}{g_0} \left\{ \left[ (h_2)^2 - \frac{g_0}{g_{33}} \frac{1}{(h_1)^2} \right] \frac{\partial h_1}{\partial z} - \frac{g_{12}}{h_1} \frac{\partial g_{12}}{\partial z} + h_1 h_2 \frac{\partial h_2}{\partial z} \right\} \quad (A2.134)$$

$$K_{20} = \frac{g_{33}}{g_0} \left\{ \left[ (h_1)^2 - \frac{g_0}{g_{33}} \frac{1}{(h_2)^2} \right] \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{g_{12}}{h_2} \frac{\partial g_{12}}{\partial x} + h_1 h_2 \frac{\partial h_1}{\partial x} \right\} \quad (A2.135)$$

$$K_{111} = \frac{g_{33}}{g_0} g_{12} \left\{ \frac{g_{12}}{(h_1)^2} \frac{\partial h_1}{\partial z} + \frac{\partial h_1}{\partial x} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial g_{12}}{\partial z} \right\} \quad (A2.136)$$

$$K_{121} = \frac{g_{33}}{g_0} \left\{ h_1 h_2 \left[ 1 + \left( \frac{g_{12}}{h_1 h_2} \right)^2 \right] \frac{\partial h_1}{\partial x} - 2 g_{12} \frac{\partial h_2}{\partial z} \right\} \quad (A2.137)$$

$$K_{221} = \frac{g_{33}}{g_0} h_1 \left\{ \frac{\partial g_{12}}{\partial x} - h_2 \frac{\partial h_2}{\partial z} - \frac{g_{12}}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x} \right\} \quad (A2.138)$$

$$\mathbf{K}_{112} = \frac{\mathbf{g}_{33}}{\mathbf{g}_0} \mathbf{h}_2 \left\{ \frac{\partial \mathbf{g}_{12}}{\partial z} - \mathbf{h}_1 \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial x} - \frac{\mathbf{g}_{12}}{\mathbf{h}_1} \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial z} \right\} \quad (\text{A2.139})$$

$$\mathbf{K}_{122} = \frac{\mathbf{g}_{33}}{\mathbf{g}_0} \left\{ \mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2 \left[ 1 + \left( \frac{\mathbf{g}_{12}}{\mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2} \right)^2 \right] \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial z} - 2 \mathbf{g}_{12} \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial x} \right\} \quad (\text{A2.140})$$

$$\mathbf{K}_{222} = \frac{\mathbf{g}_{33}}{\mathbf{g}_0} \mathbf{g}_{12} \left\{ \frac{\mathbf{g}_{12}}{(\mathbf{h}_2)^2} \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial z} - \frac{1}{\mathbf{h}_2} \frac{\partial \mathbf{g}_{12}}{\partial x} \right\} \quad (\text{A2.141})$$

y

$$\omega^3 = \mathbf{h}_3 \mathbf{a}_{33} \Omega \quad (\text{A2.142})$$

donde  $\Omega$  denota la velocidad angular de la turbina.

Las componentes del gradiente de presiones, determinado bajo condiciones invíscidas, son reemplazadas con expresiones equivalentes que involucran las velocidades  $u_{NV}$  y  $w_{NV}$ , obtenidas mediante la técnica desarrollada en el capítulo 3. Para llevar a cabo dicho procedimiento, las componentes del gradiente serán despejadas de las propias ecuaciones de la capa límite, esta vez evaluadas en el contorno superior de la capa viscosa  $\delta(x,z)$ . Así, las ecuaciones de la capa límite se rescriben,

*Conservación de cantidad de movimiento según z, siendo  $y = \delta(x,z)$ ,*

$$\begin{aligned} \frac{w_{NV}}{\mathbf{h}_1} \frac{\partial w_{NV}}{\partial z} + \frac{u_{NV}}{\mathbf{h}_2} \frac{\partial w_{NV}}{\partial x} + \mathbf{K}_{111} w_{NV} w_{NV} + \mathbf{K}_{121} w_{NV} u_{NV} + \mathbf{K}_{221} u_{NV} u_{NV} + \\ + \frac{\mathbf{h}_1}{\rho} \frac{\mathbf{g}_{33}}{\mathbf{g}_0} \left[ (\mathbf{h}_2)^2 \frac{\partial p}{\partial z} - \mathbf{g}_{12} \frac{\partial p}{\partial x} \right] - \end{aligned} \quad (\text{A2.143})$$

$$- 2 \sqrt{\frac{\mathbf{g}_{33}}{\mathbf{g}_0}} [\mathbf{g}_{12} w + \mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2 u] \omega^3 - \frac{\mathbf{h}_1}{\mathbf{g}_{33} (\mathbf{a}_{33})^2} [\mathbf{a}_{11} X + \mathbf{a}_{21} Y] (\omega^3)^2 = 0$$

*Conservación de cantidad de movimiento según x, siendo  $y = \delta(x,z)$ ,*

$$\begin{aligned} \frac{w_{NV}}{\mathbf{h}_1} \frac{\partial u_{NV}}{\partial z} + \frac{u_{NV}}{\mathbf{h}_2} \frac{\partial u_{NV}}{\partial x} + \mathbf{K}_{112} w_{NV} w_{NV} + \mathbf{K}_{122} w_{NV} u_{NV} + \mathbf{K}_{222} u_{NV} u_{NV} + \\ + \frac{\mathbf{h}_2}{\rho} \frac{\mathbf{g}_{33}}{\mathbf{g}_0} \left[ - \mathbf{g}_{12} \frac{\partial p}{\partial z} + (\mathbf{h}_1)^2 \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \end{aligned} \quad (\text{A2.144})$$

$$+ 2 \sqrt{\frac{\mathbf{g}_{33}}{\mathbf{g}_0}} [\mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2 w + \mathbf{g}_{12} u] \omega^3 - \frac{\mathbf{h}_2}{\mathbf{g}_{33} (\mathbf{a}_{33})^2} [\mathbf{a}_{12} X + \mathbf{a}_{22} Y] (\omega^3)^2 = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones para las componentes del gradiente de presión, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial z} &= \rho \left( h_1 A + \frac{g_{12}}{h_2} B \right) \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho \left( h_2 B + \frac{g_{12}}{h_1} A \right)\end{aligned}\tag{A2.145}$$

con

$$\begin{aligned}A &= 2 \sqrt{\frac{g_{33}}{g_0}} [g_{12} w_{NV} + h_1 h_2 u_{NV}] \omega^3 + \frac{h_1}{g_{33} (a_{33})^2} [a_{11} X + a_{21} Y] (\omega^3)^2 - \\ &- \frac{w_{NV}}{h_1} \frac{\partial w_{NV}}{\partial z} - \frac{u_{NV}}{h_2} \frac{\partial w_{NV}}{\partial x} - K_{111} w_{NV} w_{NV} - K_{121} w_{NV} u_{NV} - K_{221} u_{NV} u_{NV}\end{aligned}\tag{A2.146}$$

y

$$\begin{aligned}B &= \frac{h_2}{g_{33} (a_{33})^2} [a_{12} X + a_{22} Y] (\omega^3)^2 - 2 \sqrt{\frac{g_{33}}{g_0}} [h_1 h_2 w_{NV} + g_{12} u_{NV}] \omega^3 - \\ &- \frac{w_{NV}}{h_1} \frac{\partial u_{NV}}{\partial z} - \frac{u_{NV}}{h_2} \frac{\partial u_{NV}}{\partial x} - K_{112} w_{NV} w_{NV} - K_{122} w_{NV} u_{NV} - K_{222} u_{NV} u_{NV}\end{aligned}\tag{A2.147}$$

Introduciendo los términos del gradiente de presión, las ecuaciones de gobierno se describen como

*Ecuación de continuidad:*

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial v}{\partial y} + w K_{10} + u K_{20} = 0\tag{A2.148}$$

*Ecuación para la cantidad de movimiento según envergadura (z):*

$$\begin{aligned}&\frac{w}{h_1} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{h_2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{v}{h_3} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{w_{NV}}{h_1} \frac{\partial w_{NV}}{\partial z} - \frac{u_{NV}}{h_2} \frac{\partial w_{NV}}{\partial x} + \\ &+ (ww - w_{NV} w_{NV}) K_{111} + (wu - w_{NV} u_{NV}) K_{121} + (uu - u_{NV} u_{NV}) K_{221} - \\ &- 2 \sqrt{\frac{g_{33}}{g_0}} [g_{12} (w_{NV} - w) + h_1 h_2 (u_{NV} - u)] (h_3 a_{33} \Omega) - \frac{v}{g_{33}} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = 0\end{aligned}\tag{A2.149}$$

Ecuación para la cantidad de movimiento según cuerda ( $x$ ):

$$\begin{aligned} & \frac{w}{h_1} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{u}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{h_3} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{w_{NV}}{h_1} \frac{\partial u_{NV}}{\partial z} - \frac{u_{NV}}{h_2} \frac{\partial u_{NV}}{\partial x} + \\ & + (ww - w_{NV} w_{NV})K_{112} + (wu - w_{NV} u_{NV})K_{122} + (uu - u_{NV} u_{NV})K_{222} - \\ & - 2\sqrt{\frac{g_{33}}{g_0}} [h_1 h_2 (w - w_{NV}) + g_{12} (u - u_{NV})] (h_3 a_{33} \Omega) - \frac{v}{g_{33}} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (A2.150)$$

donde los coeficientes  $K$  continúan definidos por las expresiones (A2.134) a (A2.141).

Las condiciones de contorno del sistema (A2-148-150) corresponden a la imposición de la impermeabilidad y del no deslizamiento del flujo sobre las superficies de la pala,  $y = 0$ ,

$$u(x,0,z) = v(x,0,z) = w(x,0,z) = 0, \quad (A2.151)$$

mientras que para el contorno superior se debe ajustar la solución de la capa viscosa con la previamente obtenida para el flujo invíscido, resultando necesaria la transformación entre los sistemas coordenados para determinar las componentes del campo viscoso, en el sistema coordenado curvilíneo, en función de las componentes del campo invíscido, las cuales fueron determinadas en un sistema cartesiano ortogonal.

Como fuera indicado en el Capítulo 4, las ecuaciones (A2.148-150) presentan una formulación semejante a las dadas por Anderson (1985) en sus ecuaciones (25) a (27) y Karimipannah y Olsson (1993) en sus ecuaciones (1) a (3). En el caso de la primera referencia, la diferencia con las presentes expresiones se debe a que el autor ha definido un sistema curvilíneo tal que  $h_3$  es unitario (razón por la cual no aparece en sus ecuaciones), mientras que el presente desarrollo representa un caso más general donde  $h_3 = \sqrt{g_{33}} = h_3(x,z)$ . Con respecto a la segunda referencia, las diferencias radican en que los autores han seleccionado un sistema coordenado curvilíneo local en donde uno de sus ejes sigue a la línea de corriente invíscida (razón por la cual solamente aparece una única componente de la velocidad para la representación del campo externo invíscido). Adicionalmente, también consideraron de valor unitario al métrico correspondiente a la dirección normal a la superficie, "sin pérdida de generalidad".



### A2.3.1. Condiciones de borde sobre el contorno superior de la capa viscosa

Sea el vector velocidad relativa, definido a través del sistema cartesiano rectangular por

$$\vec{V} = V^1 \hat{i}_1 + V^2 \hat{i}_2 + V^3 \hat{i}_3 \quad (\text{A2.24})$$

o, en un sistema curvilíneo general, mediante

$$\vec{V} = v^1 \vec{g}_1 + v^2 \vec{g}_2 + v^3 \vec{g}_3 \quad (\text{A2.28})$$

o

$$\vec{V} = u^1 \hat{e}_1 + u^2 \hat{e}_2 + u^3 \hat{e}_3 \quad (\text{A2.29})$$

donde  $v^i$  y  $u^i$  representan, respectivamente, las componentes contravariantes y las componentes físicas contravariantes del vector velocidad relativa, siendo

$$v^i = \frac{u^i}{\sqrt{g_{ii}}} = \frac{u^i}{h_i} \quad (\text{no sumar}). \quad (\text{A2.67})$$

Según (A2.11), la expresión (A2.24) puede describirse como

$$\begin{aligned} \vec{V} = & V^1 (a_{11} \vec{g}_1 + a_{12} \vec{g}_2 + a_{13} \vec{g}_3) + \\ & + V^2 (a_{21} \vec{g}_1 + a_{22} \vec{g}_2 + a_{23} \vec{g}_3) + \\ & + V^3 (a_{31} \vec{g}_1 + a_{32} \vec{g}_2 + a_{33} \vec{g}_3) \end{aligned} \quad (\text{A2.152})$$

Reordenando (A2.152) según las bases naturales del sistema curvilíneo, resulta

$$\begin{aligned} \vec{V} = & (a_{11} V^1 + a_{21} V^2 + a_{31} V^3) \vec{g}_1 + \\ & + (a_{12} V^1 + a_{22} V^2 + a_{32} V^3) \vec{g}_2 + \\ & + (a_{13} V^1 + a_{23} V^2 + a_{33} V^3) \vec{g}_3 \end{aligned} \quad (\text{A2.153})$$

por lo cual, según (A2.28), resultará entonces que

$$\begin{aligned} v^1 = & a_{11} V^1 + a_{21} V^2 + a_{31} V^3 \\ v^2 = & a_{12} V^1 + a_{22} V^2 + a_{32} V^3 . \\ v^3 = & a_{13} V^1 + a_{23} V^2 + a_{33} V^3 \end{aligned} \quad (\text{A2.154})$$

Así,

$$\begin{Bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V^1 \\ V^2 \\ V^3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} V^1 \\ V^2 \\ V^3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A2.155})$$

y entonces

$$v^i = [A]^T V^j, \quad (\text{A2.156})$$

estando  $[A]$  dada por la ecuación (A2.10). En componentes físicas contravariantes, (A2.155) resulta

$$\begin{Bmatrix} \overline{u^1} \\ \overline{h_1} \\ \overline{u^2} \\ \overline{h_2} \\ \overline{u^3} \\ \overline{h_3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} V^1 \\ V^2 \\ V^3 \end{Bmatrix}. \quad (\text{A2.157})$$

Introduciendo la nomenclatura ya utilizada para las componentes del campo de velocidades

$$\begin{cases} \hat{i}_1 = \hat{e}_x \\ \hat{i}_2 = \hat{e}_y \\ \hat{i}_3 = \hat{e}_z \end{cases} \quad \begin{cases} V^1 = V_x = U \\ V^2 = V_y = V \\ V^3 = V_z = W \end{cases} \quad (\text{A2.158})$$

$$\begin{cases} \hat{e}_1 = \hat{e}_z \\ \hat{e}_2 = \hat{e}_x \\ \hat{e}_3 = \hat{e}_y \end{cases} \quad \begin{cases} u^1 = w \\ u^2 = u \\ u^3 = v \end{cases} \quad (\text{A2.159})$$

se obtienen las componentes físicas contravariantes en el sistema coordenado curvilíneo asociado a la pala en función de las componentes de la velocidad en el sistema global rotante

$$\begin{Bmatrix} w/h_1 \\ u/h_2 \\ v/h_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix}. \quad (\text{A2.160})$$

En particular, interesa determinar las dos componentes, según envergadura  $w_{NV}$  y según cuerda  $u_{NV}$ , del campo no viscoso como combinaciones de las soluciones invíscidas obtenidas por la aplicación del método de los paneles ( $U_e, V_e, W_e$ ) sobre el contorno exterior de la capa límite. Así,

$$\begin{Bmatrix} \frac{w_{NV}}{h_1} \\ \frac{u_{NV}}{h_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_e \\ V_e \\ W_e \end{Bmatrix} \quad (\text{A2.161})$$

donde

$$\begin{aligned} w_{NV} &= w(x, \delta(x, z), z) \\ u_{NV} &= u(x, \delta(x, z), z) \end{aligned} \quad (\text{A2.161})$$



# APÉNDICE 3

## EVALUACIÓN DE LOS EFECTOS VISCOSOS

### A3.1. TENSOR DE TENSIONES VISCOSAS

Un vector genérico puede describirse tanto en el sistema global como en el local. Así, el vector velocidad relativa a la pala resulta

$$\vec{V} = v^s \vec{g}_s = v^1 \vec{g}_1 + v^2 \vec{g}_2 + v^3 \vec{g}_3 = V^r \hat{i}_r = V^1 \hat{i}_1 + V^2 \hat{i}_2 + V^3 \hat{i}_3, \quad (\text{A3.1})$$

donde  $v^s$  representa las componentes contravariantes del vector velocidad relativa. Por otra parte, los vectores bases se relacionan a través de

$$\vec{g}_s = \varepsilon_s^r \hat{i}_r = \frac{\partial X^r}{\partial X^s} \hat{i}_r, \quad (\text{A3.2})$$

donde  $\varepsilon_s^r$  representa los coeficientes de la transformación de la base ortonormal  $\hat{i}_r$  del sistema global a la base  $\vec{g}_s$  del sistema curvilíneo local. Así, las componentes covariantes del tensor métrico resultan,

$$g_{ij} = \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j = \sum_{r=1}^3 \frac{\partial X^r}{\partial X^i} \frac{\partial X^r}{\partial X^j}. \quad (\text{A3.3})$$

Por otra parte, un tensor representado por sus componentes contravariantes  $T^{rs}$ , o por sus componentes covariantes  $T_{rs}$  resulta expresado en el sistema coordenado curvilíneo mediante

$$[T] = T^{rs} \vec{g}_r \vec{g}_s = T_{mn} g^{mr} g^{ns} \vec{g}_r \vec{g}_s, \quad (\text{A3.4})$$

donde las componentes contravariantes del tensor métrico  $g^{ij}$ , resultan de la inversión de la matriz definida por las componentes covariantes  $g_{ij}$ ,

$$[g^{ij}] = [g_{ij}]^{-1}. \quad (\text{A3.5})$$

Si  $[T]$  representa el tensor de tensiones viscosas  $[\tau]$ , entonces

$$T_{mn} = 2\mu D_{mn}, \quad (\text{A3.6})$$

donde  $\mu$  denota la viscosidad absoluta del fluido y  $D_{mn}$  representa los elementos covariantes del tensor velocidades de deformación, el cual, para el flujo laminar y estacionario de un fluido newtoniano incompresible, bajo la condición de Stokes, resulta

$$D_{mn} = \frac{1}{2}(v_m|_n + v_n|_m), \quad (\text{A3.7})$$

en donde los gradientes de las componentes de la velocidad relativa son representados por la derivada covariante de las componentes covariantes,  $v_m$ , resultando

$$v_m|_n = v_{m,n} - \left\{ \begin{matrix} k \\ m \ n \end{matrix} \right\} v_k = \frac{\partial v_m}{\partial x^n} - \left\{ \begin{matrix} k \\ m \ n \end{matrix} \right\} v_k \quad (\text{A3.8})$$

y donde

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ m \ n \end{matrix} \right\} = \Gamma_{mn}^k = \frac{g^{kl}}{2} \left( \frac{\partial g_{nl}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^l} \right) \quad (\text{A3.9})$$

representa los símbolos de Christoffel de segunda clase, los cuales, debido a la simetría de  $g_{ij}$  verifican que

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ m \ n \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} k \\ n \ m \end{matrix} \right\}. \quad (\text{A3.10})$$

A su vez, las componentes covariantes y contravariantes de la velocidad relativa a la pala se relacionan mediante

$$v_m = g_{mj} v^j \quad v_n = g_{ni} v^i. \quad (\text{A3.11})$$

Por la definición de los vectores unitarios adimensionales  $\hat{e}_i$ , que son paralelos a  $\bar{g}_i$ , se definen las componentes físicas de la velocidad relativas a partir de

$$\vec{V} = v^i \bar{g}_i = u^i \hat{e}_i, \quad (\text{A3.12})$$

resultando

$$v^i = \frac{u^i}{\sqrt{g_{ii}}} \quad \bar{g}_i = \sqrt{g_{ii}} \hat{e}_i \quad (\text{no sumar sobre } i). \quad (\text{A3.13})$$

Finalmente, se tiene que

$$\mathbf{T}^{rs} = \mu \left[ \mathbf{g}_{mj} \frac{\partial v^j}{\partial x^n} + v^j \frac{\partial \mathbf{g}_{mj}}{\partial x^n} + \mathbf{g}_{ni} \frac{\partial v^i}{\partial x^m} + v^i \frac{\partial \mathbf{g}_{ni}}{\partial x^m} - 2 \begin{Bmatrix} \mathbf{k} \\ \mathbf{m} \ \mathbf{n} \end{Bmatrix} \mathbf{g}_{kp} v^p \right] \mathbf{g}^{mr} \mathbf{g}^{ns} \quad (\text{A3.14})$$

$$r, s, i, j, k, m, n, p = 1, 2, 3.$$

Bajo las condiciones de Prandtl para el flujo en la capa límite, verificándose que  $\text{Re} \gg 1$ ,

$$\frac{\partial}{\partial x^3} \gg \frac{\partial}{\partial x^1} \quad \frac{\partial}{\partial x^3} \gg \frac{\partial}{\partial x^2} \quad v^3 \ll \sqrt{(v^1)^2 + (v^2)^2} \quad (\text{A3.15})$$

y debido a la particular definición del sistema curvilíneo local,  $\vec{\mathbf{g}}_3 = \vec{\mathbf{g}}_1 \times \vec{\mathbf{g}}_2$ , y de la geometría de la pala,

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{13} = \mathbf{g}_{31} = \mathbf{g}_{23} = \mathbf{g}_{32} &= 0 \\ \mathbf{g}_{22} &= 1 & \mathbf{g}_{12} &= \mathbf{g}_{12}(x^1, x^2). \\ \mathbf{g}_{11} &= \mathbf{g}_{11}(x^1, x^2) & \mathbf{g}_{33} &= \mathbf{g}_{33}(x^1, x^2) \end{aligned} \quad (\text{A3.16})$$

Entonces, la expresión (A3.14) se reduce a

$$\mathbf{T}^{rs} = \mu \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial v^1}{\partial x^3} \left[ \mathbf{g}_{11} (\mathbf{g}^{1r} \mathbf{g}^{3s} + \mathbf{g}^{3r} \mathbf{g}^{1s}) + \mathbf{g}_{21} (\mathbf{g}^{2r} \mathbf{g}^{3s} + \mathbf{g}^{3r} \mathbf{g}^{2s}) \right] + \\ &\frac{\partial v^2}{\partial x^3} \left[ \mathbf{g}_{12} (\mathbf{g}^{1r} \mathbf{g}^{3s} + \mathbf{g}^{3r} \mathbf{g}^{1s}) + \mathbf{g}_{22} (\mathbf{g}^{2r} \mathbf{g}^{3s} + \mathbf{g}^{3r} \mathbf{g}^{2s}) \right] \end{aligned} \right\}, \quad (\text{A3.17})$$

de donde

$$\mathbf{T}^{13} = \mathbf{T}^{31} = \mu \mathbf{g}^{33} \left\{ \frac{\partial v^1}{\partial x^3} (\mathbf{g}_{11} \mathbf{g}^{11} + \mathbf{g}_{21} \mathbf{g}^{21}) + \frac{\partial v^2}{\partial x^3} (\mathbf{g}_{12} \mathbf{g}^{11} + \mathbf{g}_{22} \mathbf{g}^{21}) \right\} \quad (\text{A3.18})$$

y

$$\mathbf{T}^{23} = \mathbf{T}^{32} = \mu \mathbf{g}^{33} \left\{ \frac{\partial v^1}{\partial x^3} (\mathbf{g}_{11} \mathbf{g}^{12} + \mathbf{g}_{21} \mathbf{g}^{22}) + \frac{\partial v^2}{\partial x^3} (\mathbf{g}_{12} \mathbf{g}^{12} + \mathbf{g}_{22} \mathbf{g}^{22}) \right\}. \quad (\text{A3.19})$$

Por la transformación (A3.5) entre las bases duales,

$$\begin{aligned}
g^{11} &= \frac{g_{22} g_{33}}{g} \\
g^{22} &= \frac{g_{11} g_{33}}{g} \\
g^{33} &= \frac{1}{g_{33}} \\
g^{12} &= g^{21} = -\frac{g_{12} g_{33}}{g} \\
g_0 &= \det[g_{ij}] = g_{33} [g_{11} g_{22} - (g_{12})^2]
\end{aligned} \tag{A3.20}$$

y expresado también al tensor de tensiones viscosas mediante sus componentes físicas contravariantes  $T^{<rs>}$ ,

$$[\tau] = T^{rs} \vec{g}_r \vec{g}_s = T^{rs} \sqrt{g_{rr}} \sqrt{g_{ss}} \hat{e}_r \hat{e}_s = T^{<rs>} \hat{e}_r \hat{e}_s \quad (\text{no sumar}) \tag{A3.21}$$

por lo cual

$$T^{<31>} = T^{31} \sqrt{g_{33} g_{11}} \quad T^{<32>} = T^{32} \sqrt{g_{33} g_{22}} \tag{A3.22}$$

y, de (A3.13)

$$u^1 = v^1 \sqrt{g_{11}} \quad u^2 = v^2 \sqrt{g_{22}}, \tag{A3.23}$$

entonces

$$\frac{\partial v^1}{\partial x^3} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial u^1}{\partial x^3} \quad \frac{\partial v^2}{\partial x^3} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial u^2}{\partial x^3} \tag{A3.24}$$

con lo cual -considerando asimismo la simetría del tensor- resultan

$$T^{<31>} = T^{<13>} = \frac{\mu}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial u^1}{\partial x^3} \quad T^{<32>} = T^{<23>} = \frac{\mu}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial u^2}{\partial x^3}. \tag{A3.25}$$

Redefiniendo las coordenadas y componentes físicas de la velocidad en el sistema local, y utilizando la nomenclatura habitual para los versores de la terna cartesiana global

$$\begin{cases} u^1 = w \\ u^2 = u \\ u^3 = v \end{cases} \quad \begin{cases} x^1 = z \\ x^2 = x \\ x^3 = y \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{i}_1 = \hat{i} \\ \hat{i}_2 = \hat{j} \\ \hat{i}_3 = \hat{k} \end{cases} \tag{A3.26}$$

resultan



$$\mathbf{T}^{\langle yz \rangle} = \mathbf{T}^{\langle zy \rangle} = \frac{\mu}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial w}{\partial y} \quad \mathbf{T}^{\langle yx \rangle} = \mathbf{T}^{\langle xy \rangle} = \frac{\mu}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (\text{A3.27})$$

Dado que el espesor de la capa límite va creciendo a medida que la capa viscosa se va desarrollando desde el borde de ataque y desde la punta de pala, es conveniente realizar un cambio de variable para la coordenada normal a la superficie,  $y$ , introduciendo la longitud adimensional  $\eta$ , que es definida por

$$\eta = \eta(x, y, z) = \frac{y}{f(x, z)} \quad (\text{A3.28})$$

donde  $f(x, z)$  representa una función que describe el contorno superior de la capa límite, y para la cual se adopta la siguiente relación:

$$f(x, z) = C_1 + C_2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{1 + (\Omega z / U_0)^2}} \quad (\text{A3.29})$$

siendo  $C_1$  y  $C_2$ , constantes dimensionales adecuadamente seleccionadas. Entonces, las componentes físicas no nulas del tensor de tensiones viscosas resultan,

$$\mathbf{T}^{\langle yz \rangle} = \mathbf{T}^{\langle zy \rangle} = \frac{\mu}{\delta \sqrt{g_{33}}} \frac{\partial w}{\partial \eta} \quad \mathbf{T}^{\langle yx \rangle} = \mathbf{T}^{\langle xy \rangle} = \frac{\mu}{\delta \sqrt{g_{33}}} \frac{\partial u}{\partial \eta}. \quad (\text{A3.30})$$

Las expresiones (A3.30) se discretizan utilizando una representación en diferencias finitas, con un esquema no centrado y de segundo orden<sup>8</sup>, para aproximar las derivadas de las velocidades, las cuales son evaluadas sobre la superficie de la pala,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \eta}(x, 0, z) &\approx \frac{1}{2\Delta\eta} [-3w(x, 0, z) + 4w(x, \Delta\eta, z) - w(x, 2\Delta\eta, z)] & \varepsilon &= O[(\Delta\eta)^2] \\ \frac{\partial u}{\partial \eta}(x, 0, z) &\approx \frac{1}{2\Delta\eta} [-3u(x, 0, z) + 4u(x, \Delta\eta, z) - u(x, 2\Delta\eta, z)] & \varepsilon &= O[(\Delta\eta)^2] \end{aligned} \quad (\text{A3.31})$$

Las representaciones numéricas (A3.31) se simplifican por aplicación de la condición de no deslizamiento del flujo sobre la superficie ( $y = \eta = 0$ ), dado que

$$u(x, 0, z) = w(x, 0, z) = 0. \quad (\text{A3.32})$$

### A3.2. FUERZAS Y MOMENTOS VISCOSOS

De acuerdo a Kaplan (1974), los diferenciales de área de la superficie de la pala en coordenadas curvilíneas, se determinan, por tratarse de superficies en el espacio, mediante la definición del producto vectorial entre los vectores tangentes a las líneas  $x = \text{constante}$  y  $z = \text{constante}$ ,  $\vec{t}_1$  y  $\vec{t}_2$ , respectivamente. Así,

$$dA_p = |\vec{t}_1 \times \vec{t}_2| dx dz = \sqrt{|\vec{t}_1|^2 |\vec{t}_2|^2 - (\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_2)^2} dx dz \quad (\text{A3.33})$$

con

$$\begin{aligned} \vec{t}_2 &= \frac{\partial X_s}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial Y_s}{\partial x} \hat{j} + \frac{\partial Z_s}{\partial x} \hat{k} \equiv \vec{g}_2 \\ \vec{t}_1 &= \frac{\partial X_s}{\partial z} \hat{i} + \frac{\partial Y_s}{\partial z} \hat{j} + \frac{\partial Z_s}{\partial z} \hat{k} \equiv \vec{g}_1 \end{aligned} \quad (\text{A3.34})$$

y

$$\begin{aligned} |\vec{t}_2|^2 &= \left( \frac{\partial X_s}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y_s}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z_s}{\partial x} \right)^2 \equiv g_{22} \\ |\vec{t}_1|^2 &= \left( \frac{\partial X_s}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y_s}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z_s}{\partial z} \right)^2 \equiv g_{11} \end{aligned} \quad (\text{A3.35})$$

$$\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_2 = \vec{t}_2 \cdot \vec{t}_1 = \frac{\partial X_s}{\partial x} \frac{\partial X_s}{\partial z} + \frac{\partial Y_s}{\partial x} \frac{\partial Y_s}{\partial z} + \frac{\partial Z_s}{\partial x} \frac{\partial Z_s}{\partial z} \equiv g_{12} = g_{21}. \quad (\text{A3.36})$$

La fuerza de fricción resultante sobre la superficie de la pala,  $\eta = 0$ , es

$$\vec{F}_{\text{visc}} = F^1 \vec{g}_1 + F^2 \vec{g}_2 + F^3 \vec{g}_3 = f^1 \hat{e}_1 + f^2 \hat{e}_2 + f^3 \hat{e}_3 = F_{\mu x} \hat{i} + F_{\mu y} \hat{j} + F_{\mu z} \hat{k} \quad (\text{A3.37})$$

siendo

$$f^1 = \sum_{p=1}^{N_p} \left( T_{\text{wall}}^{\langle yz \rangle} A \right)_p \quad f^2 = \sum_{p=1}^{N_p} \left( T_{\text{wall}}^{\langle yx \rangle} A \right)_p \quad f^3 = 0 \quad (\text{A3.38})$$

las componentes de la fuerza debido a la fricción viscosa, provenientes de la suma de los términos correspondientes a cada elemento de superficie con sus respectivas tensiones de corte evaluadas sobre la pared, y extendiendo dichas sumatorias a la totalidad de los  $N_p$  paneles en que se ha dividido la superficie de la pala.

Como, según (A3.2), la relación entre las bases local y global está representada por la siguiente transformación:

$$\begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{g}}_1 \\ \hat{\mathbf{g}}_2 \\ \hat{\mathbf{g}}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{11} & \mathbf{b}_{12} & \mathbf{b}_{13} \\ \mathbf{b}_{21} & \mathbf{b}_{22} & \mathbf{b}_{23} \\ \mathbf{b}_{31} & \mathbf{b}_{32} & \mathbf{b}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{j}} \\ \hat{\mathbf{k}} \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}] \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{j}} \\ \hat{\mathbf{k}} \end{Bmatrix}, \quad (\text{A3.39})$$

resultan las siguientes componentes de la fuerza viscosa en el sistema coordenado global

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{\mu X} \\ \mathbf{F}_{\mu Y} \\ \mathbf{F}_{\mu Z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{11} & \mathbf{b}_{12} & \mathbf{b}_{13} \\ \mathbf{b}_{21} & \mathbf{b}_{22} & \mathbf{b}_{23} \\ \mathbf{b}_{31} & \mathbf{b}_{32} & \mathbf{b}_{33} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^1 \\ \mathbf{F}^2 \\ \mathbf{F}^3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{11} & \mathbf{b}_{21} & \mathbf{b}_{31} \\ \mathbf{b}_{12} & \mathbf{b}_{22} & \mathbf{b}_{32} \\ \mathbf{b}_{13} & \mathbf{b}_{23} & \mathbf{b}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^1 / \sqrt{\mathbf{g}_{11}} \\ \mathbf{f}^2 / \sqrt{\mathbf{g}_{22}} \\ \mathbf{f}^3 / \sqrt{\mathbf{g}_{33}} \end{Bmatrix}, \quad (\text{A3.40})$$

donde el supraíndice T indica la transposición de la matriz [B].

Por otra parte, las componentes del momento generado por la fuerza viscosa alrededor de los ejes cartesianos del sistema global resultan

$$\vec{\mathbf{M}}_{\text{visc}}^0 = \vec{\mathbf{r}}_S \times \vec{\mathbf{F}}_{\text{visc}} = M_{\mu X} \hat{\mathbf{i}} + M_{\mu Y} \hat{\mathbf{j}} + M_{\mu Z} \hat{\mathbf{k}} = (X_S, Y_S, Z_S) \times (F_{\mu X}, F_{\mu Y}, F_{\mu Z}) \quad (\text{A3.41})$$

con las siguientes componentes de los momentos de origen viscoso,

$$M_{\mu X} = F_{\mu Z} \cdot Y_S - F_{\mu Y} \cdot Z_S \quad M_{\mu Y} = F_{\mu X} \cdot Z_S - F_{\mu Z} \cdot X_S \quad M_{\mu Z} = F_{\mu Y} \cdot X_S - F_{\mu X} \cdot Y_S. \quad (\text{A3.42})$$

En particular,  $M_{\mu X}$  representa un momento torsor sobre la pala, la cual tendería bajo su acción a modificar su ángulo de ataque,  $M_{\mu Y}$  representa un momento flector, mientras que  $M_{\mu Z}$  corresponde al par que debe ser vencido para que el rotor gire a velocidad constante  $\Omega$ , consumiéndose una potencia dada por

$$\text{Pot}_{\mu} = M_{\mu Z} \Omega. \quad (\text{A3.43})$$



# APÉNDICE 4

## PERFILES

### A4.1. CONSIDERACIONES GENERALES

Un punto genérico del espacio tridimensional queda representado, en el sistema cartesiano rectangular definido por las coordenadas  $(X^1, X^2, X^3)$  y los versores  $(\hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3)$  mediante

$$\vec{r} = X^1 \hat{i}_1 + X^2 \hat{i}_2 + X^3 \hat{i}_3 \quad (\text{A4.1})$$

o, equivalentemente, utilizando la nomenclatura cartesiana rectangular usual,

$$\vec{r} = X \hat{e}_x + Y \hat{e}_y + Z \hat{e}_z . \quad (\text{A4.2})$$

En particular, un punto de la superficie de una pala, indicada mediante el subíndice S, puede ser representado tanto con las tres coordenadas cartesianas rectangulares como por solo un par de coordenadas curvilíneas. En este último caso, el par de coordenadas yace sobre dicha superficie alabeada, tomando la tercera coordenada curvilínea un valor nulo, por ejemplo  $x^3 = 0$ , por lo cual

$$\vec{r}_s = X_s^1 \hat{i}_1 + X_s^2 \hat{i}_2 + X_s^3 \hat{i}_3 = X_s \hat{e}_x + Y_s \hat{e}_y + Z_s \hat{e}_z = x^1 \vec{g}_1 + x^2 \vec{g}_2 + 0 \vec{g}_3 \quad (\text{A4.3})$$

donde

$$\begin{cases} X_s = X_s^1 = X_s^1(x^1, x^2) \\ Y_s = X_s^2 = X_s^2(x^1, x^2) \\ Z_s = X_s^3 = X_s^3(x^1, x^2) \end{cases} \quad x^3 = 0 \quad (\text{A4.4})$$

y  $\vec{g}_1$ ,  $\vec{g}_2$  y  $\vec{g}_3$  representan los vectores base covariantes del sistema coordenado curvilíneo.

Entonces, los vectores base covariantes  $\vec{g}_1$  y  $\vec{g}_2$  se definen sobre la superficie, a partir de las definiciones dadas en (A4.5), proponiéndose que la tercera dirección quede determinada a través del producto vectorial de las dos primeras, de manera que resulte normal a las mismas,

$$\begin{aligned}
\vec{g}_1 &= \frac{\partial \vec{r}_S}{\partial X^1} \\
\vec{g}_2 &= \frac{\partial \vec{r}_S}{\partial X^2} & \vec{r}_S &= (X_S^1, X_S^2, X_S^3) \\
\vec{g}_3 &\propto (\vec{g}_1 \times \vec{g}_2)
\end{aligned}
\tag{A4.5}$$

tal como se lo representa esquemáticamente en la Figura A4.1.

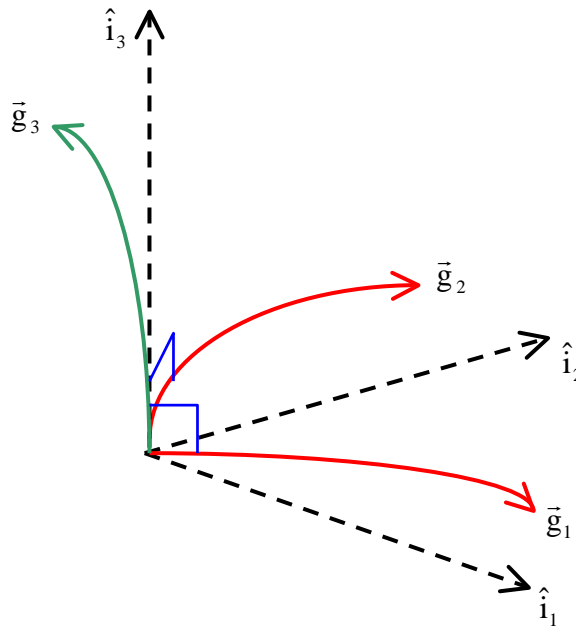


Figura A4.1 Sistemas coordenados curvilíneo de bases  $\vec{g}_i$  y rectangular cartesiano.

En general, se define como producto vectorial entre bases covariantes a

$$\vec{g}_r \times \vec{g}_s = \sigma \sqrt{g_0} \varepsilon_{rst} \vec{g}^t,
\tag{A4.6}$$

donde  $g$  representa al determinante de la matriz  $[g_{ij}]$ , la cual está definida por las componentes covariantes del tensor fundamental (o tensor métrico) del espacio,

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}
\tag{A4.7}$$

cuyos elementos se determinan mediante

$$\mathbf{g}_{ij} = \bar{\mathbf{g}}_i \cdot \bar{\mathbf{g}}_j = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial \mathbf{X}^n}{\partial x^i} \frac{\partial \mathbf{X}^n}{\partial x^j}. \quad (\text{A4.8})$$

$$i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3$$

Entonces, considerando la definición de una terna derecha,  $\sigma = +1$ ,

$$\bar{\mathbf{g}}_1 \times \bar{\mathbf{g}}_2 = \sqrt{\mathbf{g}_0} \varepsilon_{12i} \bar{\mathbf{g}}^i = \sqrt{\mathbf{g}_0} (\varepsilon_{121} \bar{\mathbf{g}}^1 + \varepsilon_{122} \bar{\mathbf{g}}^2 + \varepsilon_{123} \bar{\mathbf{g}}^3) \quad (\text{A4.9})$$

y sabiendo que

$$\varepsilon_{121} = \varepsilon_{122} = 0 \quad \varepsilon_{123} = +1 \quad (\text{A4.10})$$

se tiene

$$\bar{\mathbf{g}}_1 \times \bar{\mathbf{g}}_2 = \sqrt{\mathbf{g}_0} \bar{\mathbf{g}}^3. \quad (\text{A4.11})$$

Por otra parte, la relación entre las bases duales es

$$\bar{\mathbf{g}}^t = \mathbf{g}^{th} \bar{\mathbf{g}}_h \quad (\text{A4.12})$$

resultando, en particular

$$\bar{\mathbf{g}}^3 = \mathbf{g}^{3h} \bar{\mathbf{g}}_h = \mathbf{g}^{31} \bar{\mathbf{g}}_1 + \mathbf{g}^{32} \bar{\mathbf{g}}_2 + \mathbf{g}^{33} \bar{\mathbf{g}}_3. \quad (\text{A4.13})$$

Como sobre la superficie se requiere que

$$\bar{\mathbf{g}}_1 \cdot \bar{\mathbf{g}}_3 = \mathbf{g}_{13} = \mathbf{g}_{31} = 0 \quad (\text{A4.14})$$

$$\bar{\mathbf{g}}_2 \cdot \bar{\mathbf{g}}_3 = \mathbf{g}_{23} = \mathbf{g}_{32} = 0 \quad (\text{A4.15})$$

la matriz que representa al tensor fundamental se reduce a

$$[\mathbf{g}_{ij}] = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{11} & \mathbf{g}_{12} & 0 \\ \mathbf{g}_{12} & \mathbf{g}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{g}_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A4.16})$$

con lo cual su determinante resulta

$$\mathbf{g}_0 = \det[\mathbf{g}_{ij}] = \mathbf{g}_{33} [\mathbf{g}_{11} \mathbf{g}_{22} - (\mathbf{g}_{12})^2]. \quad (\text{A4.17})$$

Dado que

$$[\mathbf{g}^{ij}] = [\mathbf{g}_{ij}]^{-1} \quad (\text{A4.18})$$

resultan

$$\mathbf{g}^{31} = \mathbf{g}^{32} = 0 \quad (\text{A4.19})$$

y

$$\mathbf{g}^{33} = \frac{\mathbf{g}_{11}\mathbf{g}_{22} - (\mathbf{g}_{12})^2}{\mathbf{g}_0} = \frac{1}{\mathbf{g}_{33}} \quad (\text{A4.20})$$

con lo que, finalmente, se tiene que la dirección que no yace sobre la superficie resulta

$$\vec{\mathbf{g}}_3 = \frac{\mathbf{g}_{33}}{\sqrt{\mathbf{g}_0}} (\vec{\mathbf{g}}_1 \times \vec{\mathbf{g}}_2). \quad (\text{A4.21})$$

Finalmente, la relación entre los vectores base del sistema coordenado curvilíneo y los versores cartesianos está dada por

$$\begin{Bmatrix} \vec{\mathbf{e}}_1 \\ \vec{\mathbf{e}}_2 \\ \vec{\mathbf{e}}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{X}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \mathbf{X}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \mathbf{X}^3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial \mathbf{X}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \mathbf{X}^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \mathbf{X}^3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \mathbf{X}^1}{\partial x^3} & \frac{\partial \mathbf{X}^2}{\partial x^3} & \frac{\partial \mathbf{X}^3}{\partial x^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{i}}_1 \\ \hat{\mathbf{i}}_2 \\ \hat{\mathbf{i}}_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A4.22})$$

resultando, adicionalmente, por la definición de los métricos,

$$\mathbf{h}_i = \left| \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial x^i} \right| = |\vec{\mathbf{g}}_i| = \sqrt{\vec{\mathbf{g}}_i \cdot \vec{\mathbf{g}}_i} = \sqrt{\mathbf{g}_{ii}} \quad (\text{no sumar sobre } i) \quad (\text{A4.23})$$

los versores en el sistema curvilíneo

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{\vec{\mathbf{g}}_i}{\sqrt{\mathbf{g}_{ii}}} = \frac{\vec{\mathbf{g}}_i}{\mathbf{h}_i} \quad (\text{no sumar sobre } i). \quad (\text{A4.24})$$



## A4.2. SUPERFICIE ALABEADA CON SECCIONES SIN CURVATURA

La superficie de una pala alabeada, conformada por perfiles delgados que no presentan curvatura se define, en el sistema cartesiano rectangular, como función de las coordenadas curvilíneas que yacen sobre dicha superficie

$$\begin{cases} X_s = X_s^1 = x^1 \\ Y_s = X_s^2 = x^2 \cos \varphi \\ Z_s = X_s^3 = x^2 \sin \varphi \end{cases} \quad (\text{A4.25})$$

donde

$$H \leq x^1 \leq B \quad 0 \leq x^2 \leq c \quad x^3 = 0 \quad (\text{A4.26})$$

siendo H y B, respectivamente, el radio de raíz y el radio de punta de la pala, y c la cuerda local (ver Figura A4.2). Por su parte, el ángulo de torsión de la pala queda definido por

$$\varphi(x^1) = \arctg\left(\frac{V_0}{\Omega \cdot X^1}\right) - \alpha_c(X^1) = \arctg\left(\frac{V_0}{\Omega \cdot x^1}\right) - \alpha_c(x^1) \quad (\text{A4.27})$$

donde  $V_0$  representa la velocidad del viento sobre el disco barrido por la turbina,  $\Omega$  denota la velocidad angular de la turbina eólica y  $\alpha_c$  es el ángulo de ataque de la corriente incidente (asumida solamente representada por sus componentes  $V_0$  y  $\Omega x^1$ ) con respecto a la cuerda local del perfil.

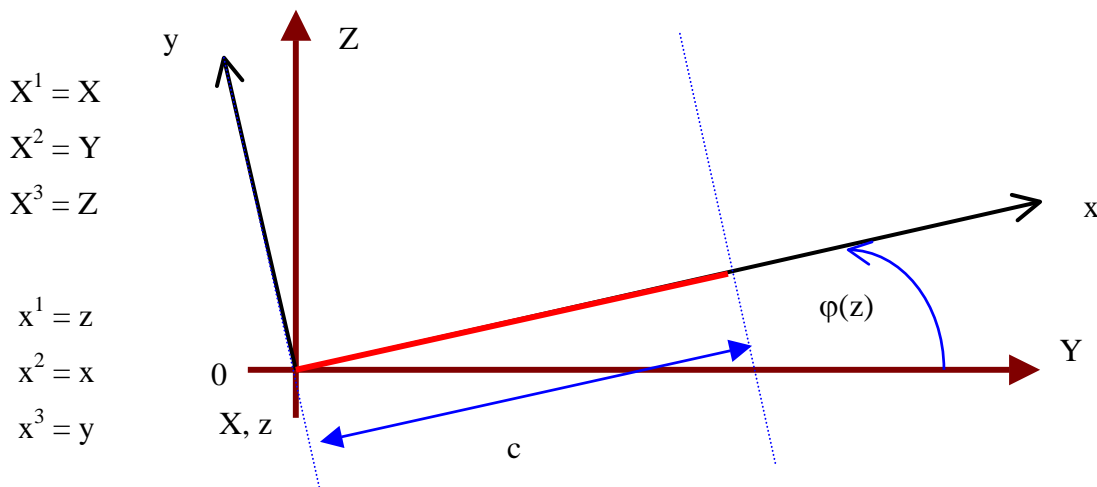


Figura A4.2 Sección genérica de una pala conformada por perfiles sin curvatura.

Dado que la superficie de la pala ( $x^3 = 0$ ) queda representada por

$$\vec{r}_s = (x^1, x^2 \cos \varphi, x^2 \sin \varphi) \quad (\text{A4.28})$$

entonces, sobre la superficie

$$\begin{aligned} \vec{g}_1 &= \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial x^1} = (1, -x^2 \varphi' \sin \varphi, x^2 \varphi' \cos \varphi) \\ \vec{g}_2 &= \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial x^2} = (0, \cos \varphi, \sin \varphi) \\ \vec{g}_3 &= \vec{g}_1 \times \vec{g}_2 = (-x^2 \varphi', -\sin \varphi, \cos \varphi) \end{aligned} \quad (\text{A4.29})$$

donde

$$\varphi'(x^1) = \frac{d\varphi}{dx^1} = -\frac{(\Omega/V_0)}{1 + (\Omega x^1/V_0)^2} - \alpha'_c(x^1). \quad (\text{A4.30})$$

En el presente caso, los elementos del tensor fundamental,  $[g_{ij}]$ , resultan

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{11} = \vec{g}_1 \cdot \vec{g}_1 = 1 + (x^2 \varphi')^2 \\ g_{22} = \vec{g}_2 \cdot \vec{g}_2 = 1 \\ g_{33} = \vec{g}_3 \cdot \vec{g}_3 = 1 + (x^2 \varphi')^2 \\ g_{12} = g_{21} = \vec{g}_1 \cdot \vec{g}_2 = 0 \\ g_{13} = g_{31} = g_{23} = g_{32} = \vec{g}_1 \cdot \vec{g}_3 = \vec{g}_2 \cdot \vec{g}_3 = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A4.31})$$

donde  $g_{12}$  es nulo, indicando la ortogonalidad entre  $\vec{g}_1$  y  $\vec{g}_2$ , y siendo

$$g_0 = \det([g_{ij}]) = g_{33} [g_{11}g_{22} - (g_{12})^2] = [1 + (x^2 \varphi')^2]^2 \equiv (g_{33})^2 \quad (\text{A4.32})$$

y en consecuencia,

$$J = \sqrt{g_0} = 1 + (x^2 \varphi')^2 \equiv g_{33}. \quad (\text{A4.33})$$

Asimismo, resultan los siguientes factores de escala

$$\begin{aligned} h_1 &= |\vec{g}_1| = \sqrt{g_{11}} = \sqrt{1 + (x^2 \varphi')^2} \equiv h_3 \\ h_2 &= |\vec{g}_2| = \sqrt{g_{22}} = 1 \\ h_3 &= |\vec{g}_3| = \sqrt{g_{33}} = \sqrt{1 + (x^2 \varphi')^2} \equiv h_1 \end{aligned} \quad (\text{A4.34})$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_1}{\partial x^1} &= \frac{(x^2)^2}{h_1} \varphi' \varphi'' \\
\frac{\partial h_1}{\partial x^2} &= \frac{(\varphi')^2}{h_1} x^2 \\
\frac{\partial h_3}{\partial x^1} &= \frac{(x^2)^2}{h_3} \varphi' \varphi'' \\
\frac{\partial h_3}{\partial x^2} &= \frac{(\varphi')^2}{h_3} x^2 \\
\frac{\partial h_2}{\partial x^1} &= \frac{\partial h_2}{\partial x^2} = 0 \\
\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} &= 0 \\
\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} &= 0
\end{aligned} \tag{A4.35}$$

siendo

$$\varphi''(x^1) = \frac{d^2 \varphi}{d(x^1)^2} = \frac{2(\Omega/V_0)^3 x^1}{[1 + (\Omega x^1/V_0)^2]^2} - \alpha''(x^1). \tag{A4.36}$$

En el espacio 3D alrededor de la pala, siendo  $x^3 \neq 0$ , se tiene que

$$\begin{cases}
X = X^1 = x^1 - x^2 x^3 \varphi' \\
Y = X^2 = x^2 \cos \varphi - x^3 \sin \varphi \\
Z = X^3 = x^2 \sin \varphi + x^3 \cos \varphi
\end{cases} \tag{A4.37}$$

con

$$\begin{Bmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{i}_2 \\ \hat{i}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial x^1} & \frac{\partial X^2}{\partial x^1} & \frac{\partial X^3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial X^1}{\partial x^2} & \frac{\partial X^2}{\partial x^2} & \frac{\partial X^3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial X^1}{\partial x^3} & \frac{\partial X^2}{\partial x^3} & \frac{\partial X^3}{\partial x^3} \end{bmatrix}_s \begin{Bmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{i}_2 \\ \hat{i}_3 \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}] \begin{Bmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{i}_2 \\ \hat{i}_3 \end{Bmatrix} \tag{A4.38}$$

resultando, sobre la superficie donde  $x^3 = 0$ ,

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_{11} &= 1 \\
\mathbf{b}_{12} &= -x^2 \varphi' \operatorname{sen} \varphi \\
\mathbf{b}_{13} &= x^2 \varphi' \cos \varphi \\
\mathbf{b}_{21} &= 0 \\
\mathbf{b}_{22} &= \cos \varphi \\
\mathbf{b}_{23} &= \operatorname{sen} \varphi \\
\mathbf{b}_{31} &= -x^2 \varphi' \\
\mathbf{b}_{32} &= -\operatorname{sen} \varphi \\
\mathbf{b}_{33} &= \cos \varphi .
\end{aligned} \tag{A4.39}$$

Entonces, su inversa

$$\begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{i}}_1 \\ \hat{\mathbf{i}}_2 \\ \hat{\mathbf{i}}_3 \end{Bmatrix} = [\mathbf{A}] \begin{Bmatrix} \vec{\mathbf{g}}_1 \\ \vec{\mathbf{g}}_2 \\ \vec{\mathbf{g}}_3 \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}]^{-1} \begin{Bmatrix} \vec{\mathbf{g}}_1 \\ \vec{\mathbf{g}}_2 \\ \vec{\mathbf{g}}_3 \end{Bmatrix} \tag{A4.40}$$

tiene los elementos

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{11} &= 1/\lambda_{\mathbf{B}} \\
\mathbf{a}_{12} &= 0 \\
\mathbf{a}_{13} &= -x^2 \varphi' / \lambda_{\mathbf{B}} \\
\mathbf{a}_{21} &= -x^2 \varphi' \operatorname{sen} \varphi / \lambda_{\mathbf{B}} \\
\mathbf{a}_{22} &= \cos \varphi \\
\mathbf{a}_{23} &= -\operatorname{sen} \varphi / \lambda_{\mathbf{B}} \\
\mathbf{a}_{31} &= x^2 \varphi' \cos \varphi / \lambda_{\mathbf{B}} \\
\mathbf{a}_{32} &= \operatorname{sen} \varphi \\
\mathbf{a}_{33} &= \cos \varphi / \lambda_{\mathbf{B}}
\end{aligned} \tag{A4.41}$$

donde

$$\lambda_{\mathbf{B}} = \det([\mathbf{B}]) = 1 + (x^2 \varphi')^2 = \mathbf{g}_{33} = \mathbf{J} = \sqrt{\mathbf{g}_0} . \tag{A4.42}$$

### A4.3. SUPERFICIE ALABEADA CONFORMADA POR PERFILES DE ARCO CIRCULAR

Se considera ahora la superficie de una pala alabeada, conformada por perfiles delgados que presentan curvatura, representados por secciones de arco circular de radio  $R_C$ , tal como se muestra en la Figura A4.3.

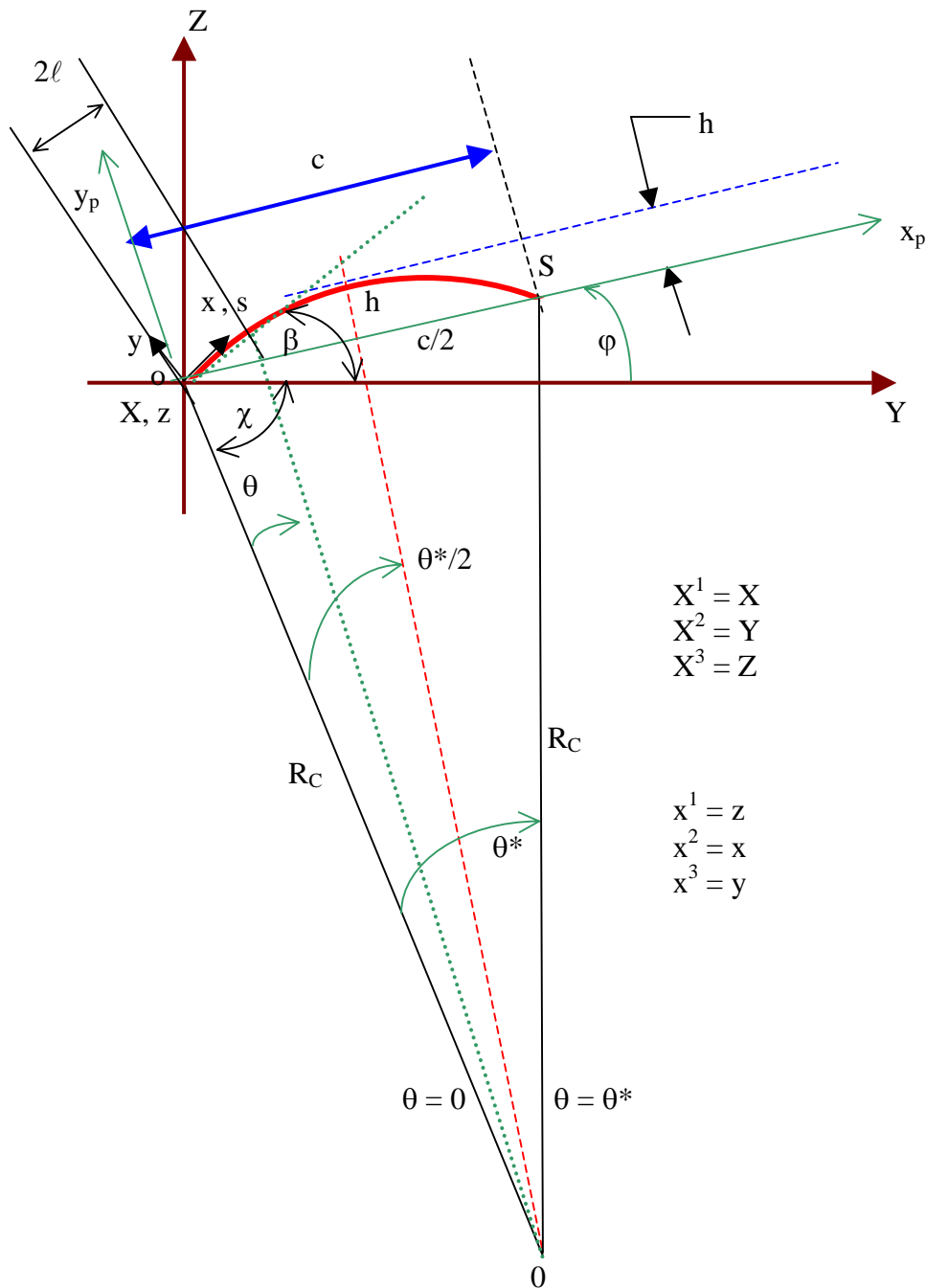


Figura A4.3 Geometría del perfil de arco circular.

Resolviendo la ecuación para el radio del arco de círculo,  $R_C$ , en función de la cuerda,  $c$ , y de la flecha,  $h$ , locales del perfil

$$R_C^2 = (R_C - h)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \quad (\text{A4.43})$$

resulta

$$\frac{R_C}{c} = \frac{h}{2c} + \frac{c}{8h} \quad (\text{A4.44})$$

Adicionalmente, el ángulo del arco tendido entre el borde de ataque y el borde de fuga del perfil resulta entonces,

$$\theta^* = 2 \arccos \left[ \frac{c}{h + c^2 / (4h)} \right] \quad (\text{A4.45})$$

siendo la longitud total del arco entre bordes

$$S = R_C \theta^* \quad (\text{A4.46})$$

Definiendo las siguientes variables angulares

$$\theta = \frac{s}{R_C} \quad 0 \leq \theta \leq \theta^* \quad 0 \leq s \leq S, \quad (\text{A4.47})$$

$$\chi = \frac{\pi}{2} - \varphi - \frac{\theta^*}{2} \quad (\text{A4.48})$$

y

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \chi - \frac{\theta}{2} = \varphi + \frac{1}{2}(\theta^* - \theta) \quad 0 < \theta \leq \theta^* \quad (\text{A4.49})$$

donde  $\varphi$  es el ángulo de torsión geométrica de la pala, resulta la semi-longitud del segmento de cuerda correspondiente a un arco de longitud  $s$ ,

$$\ell = R_C \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \quad 0 \leq \theta \leq \theta^* \quad 0 \leq 2\ell \leq c \quad (\text{A4.50})$$

con lo cual resultan las coordenadas de la superficie del perfil en el sistema coordenado global

$$Y_s = 2\ell \cos \beta = 2R_C \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \beta \quad (\text{A4.51})$$

$$Z_s = 2\ell \operatorname{sen} \beta = 2R_C \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \beta \quad (\text{A4.52})$$

En consecuencia, la superficie de la pala se define mediante

$$\begin{cases} X_s = X_s^1 = x^1 \\ Y_s = X_s^2 = 2R \operatorname{sen}(\theta/2) \cos \beta \\ Z_s = X_s^3 = 2R \operatorname{sen}(\theta/2) \operatorname{sen} \beta \end{cases} \quad (\text{A4.53})$$

en el sistema ortogonal rotante, siendo

$$\begin{aligned} \theta = \frac{x^2}{R} \quad \beta = \varphi(x^1) + \frac{1}{2}(\theta^* - \theta) \quad \gamma = \beta - \frac{\theta}{2} = \varphi(x^1) + \frac{\theta^*}{2} - \theta \\ \frac{\theta^*}{2} = \arcsin \left[ \left( \frac{h}{c} + \frac{c}{4h} \right)^{-1} \right] \end{aligned} \quad (\text{A4.54})$$

$$H \leq x^1 \leq B \quad 0 \leq \theta \leq \theta^* \quad 0 \leq x^2 \leq S \quad x^3 = 0$$

donde  $(x^1, x^2, x^3)$  representan las coordenadas locales de la pala y  $\varphi$  denota la torsión geométrica de la pala, definida por

$$\varphi(x^1) = \operatorname{arctg} \left( \frac{V_0}{\Omega X^1} \right) - \alpha_c(X^1) = \operatorname{arctg} \left( \frac{V_0}{\Omega x^1} \right) - \alpha_c(x^1) \quad (\text{A4.55})$$

donde  $V_0$  representa la velocidad del viento en el disco de la turbina, siendo  $V_0 < V_\infty$ , y  $\alpha_c$  denota el ángulo de ataque de la corriente medido desde la línea de cuerda del perfil.

Dado que ahora la superficie de la pala ( $x^3 = 0$ ) queda representada por

$$\vec{r}_s = (x^1, 2R \operatorname{sen}(\theta/2) \cos \beta, 2R \operatorname{sen}(\theta/2) \operatorname{sen} \beta) \quad (\text{A4.56})$$

y que  $\vec{g}_1$  y  $\vec{g}_2$  son definidas sobre la superficie, mediante (A4.5),  $\vec{g}_3$  se obtiene a partir de la definición de producto vectorial, resultando entonces perpendicular a  $\vec{g}_1$  y  $\vec{g}_2$ . Así,

$$\begin{aligned} \vec{g}_1 &= \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial x^1} = (1, -2R\varphi' \operatorname{sen}(\theta/2) \operatorname{sen} \beta, 2R\varphi' \operatorname{sen}(\theta/2) \cos \beta) \\ \vec{g}_2 &= \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial x^2} = (0, \cos \gamma, \operatorname{sen} \gamma) \\ \vec{g}_3 &= \vec{g}_1 \times \vec{g}_2 = (-R\varphi' \operatorname{sen} \theta, -\operatorname{sen} \gamma, \cos \gamma) \end{aligned} \quad (\text{A4.57})$$

donde

$$\varphi'(x^1) = \frac{d\varphi}{dx^1} = -\frac{(\Omega/V_0)}{1 + (\Omega x^1/V_0)^2} - \alpha'_c(x^1). \quad (\text{A4.58})$$

En el presente caso, los elementos del tensor fundamental,  $[g_{ij}]$ , resultan

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{11} = \vec{g}_1 \cdot \vec{g}_1 = 1 + [2R \varphi' \text{sen}(\theta/2)]^2 \\ g_{22} = \vec{g}_2 \cdot \vec{g}_2 = 1 \\ g_{33} = \vec{g}_3 \cdot \vec{g}_3 = 1 + (R \varphi' \text{sen} \theta)^2 \\ g_{12} = g_{21} = \vec{g}_1 \cdot \vec{g}_2 = -2R \varphi' \text{sen}^2(\theta/2) \\ g_{13} = g_{31} = g_{23} = g_{32} = \vec{g}_1 \cdot \vec{g}_3 = \vec{g}_2 \cdot \vec{g}_3 = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A4.59})$$

donde ahora  $g_{12}$  resulta no ser nulo denotando que no existe ortogonalidad entre  $\vec{g}_1$  y  $\vec{g}_2$ , y

$$g_0 = \det([g_{ij}]) = g_{33} [g_{11}g_{22} - (g_{12})^2] = [1 + (R \varphi' \text{sen} \theta)^2]^2 \equiv (g_{33})^2 \quad (\text{A4.60})$$

consecuentemente,

$$J = \sqrt{g_0} = 1 + (R \varphi' \text{sen} \theta)^2 \equiv g_{33}. \quad (\text{A4.61})$$

Asimismo, resultan los siguientes factores de escala

$$\begin{aligned} h_1 &= |\vec{g}_1| = \sqrt{g_{11}} = \sqrt{1 + [2R \text{sen}(\theta/2) \varphi']^2} \\ h_2 &= |\vec{g}_2| = \sqrt{g_{22}} = 1 \\ h_3 &= |\vec{g}_3| = \sqrt{g_{33}} = \sqrt{1 + (2R \text{sen} \theta \varphi')^2} \end{aligned} \quad (\text{A4.62})$$

entonces, las derivadas de los métricos resultan

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial x^1} &= \frac{[2R \text{sen}(\theta/2)]^2}{h_1} \varphi' \varphi'' \\ \frac{\partial h_1}{\partial x^2} &= \frac{R(\varphi')^2}{h_1} \text{sen} \theta \\ \frac{\partial h_3}{\partial x^1} &= \frac{(R \text{sen} \theta)^2}{h_3} \varphi' \varphi'' \\ \frac{\partial h_3}{\partial x^2} &= \frac{R(\varphi')^2}{h_3} \text{sen} \theta \cdot \cos \theta \\ \frac{\partial h_2}{\partial x^1} &= \frac{\partial h_2}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A4.63})$$

con

$$\varphi''(x^1) = \frac{d^2 \varphi}{d(x^1)^2} = \frac{2(\Omega/V_0)^3 x^1}{[1 + (\Omega x^1/V_0)^2]^2} - \alpha''(x^1) \quad (\text{A4.64})$$



y resultando además ahora los siguientes términos no nulos

$$\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} = -2R \varphi'' \sin^2(\theta/2) \quad (\text{A4.65})$$

$$\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} = -\varphi' \sin \theta .$$

En el espacio 3D alrededor de la pala, siendo  $x^3 \neq 0$ , se tiene que

$$\begin{cases} X = X^1 = x^1 - x^3 R \sin \theta \varphi' \\ Y = X^2 = 2R \sin(\theta/2) \cos \beta - x^3 \sin \gamma \\ Z = X^3 = 2R \sin(\theta/2) \sin \beta + x^3 \cos \gamma \end{cases} \quad (\text{A4.66})$$

con

$$\left\{ \begin{matrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial x^1} & \frac{\partial X^2}{\partial x^1} & \frac{\partial X^3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial X^1}{\partial x^2} & \frac{\partial X^2}{\partial x^2} & \frac{\partial X^3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial X^1}{\partial x^3} & \frac{\partial X^2}{\partial x^3} & \frac{\partial X^3}{\partial x^3} \end{bmatrix}_S \left\{ \begin{matrix} \hat{i}_1 \\ \hat{i}_2 \\ \hat{i}_3 \end{matrix} \right\} = [B] \left\{ \begin{matrix} \hat{i}_1 \\ \hat{i}_2 \\ \hat{i}_3 \end{matrix} \right\} \quad (\text{A4.67})$$

resultando, sobre la superficie donde  $x^3 = 0$ ,

$$b_{11} = 1$$

$$b_{12} = -2R \varphi' \sin \beta \sin(\theta/2)$$

$$b_{13} = -2R \varphi' \cos \beta \sin(\theta/2)$$

$$b_{21} = 0$$

$$b_{22} = \cos \gamma$$

$$b_{23} = \sin \gamma$$

$$b_{31} = -R \varphi' \sin \theta$$

$$b_{32} = -\sin \gamma$$

$$b_{33} = \cos \gamma .$$

(A4.68)

Entonces, su inversa

$$\begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{i}}_1 \\ \hat{\mathbf{i}}_2 \\ \hat{\mathbf{i}}_3 \end{Bmatrix} = [\mathbf{A}] \begin{Bmatrix} \vec{\mathbf{g}}_1 \\ \vec{\mathbf{g}}_2 \\ \vec{\mathbf{g}}_3 \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}]^{-1} \begin{Bmatrix} \vec{\mathbf{g}}_1 \\ \vec{\mathbf{g}}_2 \\ \vec{\mathbf{g}}_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A4.69})$$

tiene los elementos

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1/\lambda_B \\ a_{12} &= 2R\varphi' \text{sen}^2(\theta/2)/\lambda_B \\ a_{13} &= -R\varphi' \text{sen}\theta/\lambda_B \\ a_{21} &= -R\varphi' \text{sen}\theta \text{sen}\gamma/\lambda_B \\ a_{22} &= [\cos\gamma + 2R^2(\varphi')^2 \text{sen}\theta \text{sen}(\theta/2) \cos\beta]/\lambda_B \\ a_{23} &= -\text{sen}\gamma/\lambda_B \\ a_{31} &= R\varphi' \text{sen}\theta \cos\gamma/\lambda_B \\ a_{32} &= [\text{sen}\gamma + 2R^2(\varphi')^2 \text{sen}\theta \text{sen}(\theta/2) \text{sen}\beta]/\lambda_B \\ a_{33} &= \cos\gamma/\lambda_B \end{aligned} \quad (\text{A4.70})$$

donde

$$\lambda_B = \det([\mathbf{B}]) = 1 + (R\varphi' \text{sen}\theta)^2 \equiv \mathbf{g}_{33} = \mathbf{J} = \sqrt{\mathbf{g}_0} . \quad (\text{A4.71})$$

# APÉNDICE 5

## ESQUEMA NUMÉRICO

### A5. ESQUEMA KRAUSE ZIG-ZAG

El esquema Krause zig-zag ha sido empleado dado que su utilización es recomendada para la resolución numérica de problemas que involucran flujos donde la componente correspondiente al flujo cruzado cambia de signo, situación que se manifiesta en el presente problema. La molécula que representa a este esquema numérico incluye la información de ambos sentidos en la dirección según envergadura, permitiendo la representación de flujos cruzados, siempre que las direcciones de los flujos permanezcan dentro de la zona de dependencia de la molécula (Anderson *et al.*, 1984).

#### A5.1. Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad

$$\frac{1}{Sh_2} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{k_2}{h_2} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{k_3}{h_3} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{k_1}{h_1} \frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{1}{Bh_1} \frac{\partial w}{\partial \zeta} + uK_{20} + wK_{10} = 0 \quad (A5.1)$$

resulta discretizada, para un desarrollo centralizado en  $(i+1/2, j-1/2, k)$ , como

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Sh_2} \frac{1}{2(\Delta\xi)} (u_{j,k}^{i+1} + u_{j-1,k}^{i+1} - u_{j,k}^i - u_{j-1,k}^i) + \\ & + \frac{k_2}{h_2} \frac{1}{2(\Delta\eta)} [(u_{j,k}^{i+1} - u_{j-1,k}^{i+1}) + (u_{j,k}^i - u_{j-1,k}^i)] + \\ & + \frac{k_3}{h_3} \frac{1}{2(\Delta\eta)} [(v_{j,k}^{i+1} - v_{j-1,k}^{i+1}) + (v_{j,k}^i - v_{j-1,k}^i)] + \\ & + \frac{k_1}{h_1} \frac{1}{2(\Delta\eta)} [(w_{j,k}^{i+1} - w_{j-1,k}^{i+1}) + (w_{j,k}^i - w_{j-1,k}^i)] - \\ & - \frac{1}{Bh_1} \frac{1}{4(\Delta\zeta)} [(w_{j,k+1}^i + w_{j-1,k+1}^i + w_{j,k}^{i+1} + w_{j-1,k}^{i+1}) - (w_{j,k}^i + w_{j-1,k}^i + w_{j,k-1}^{i+1} + w_{j-1,k-1}^{i+1})] + \\ & + K_{20} \frac{1}{4} (u_{j-1,k}^{i+1} + u_{j,k}^{i+1} + u_{j-1,k}^i + u_{j,k}^i) + \\ & + K_{10} \frac{1}{4} (w_{j-1,k}^{i+1} + w_{j,k}^{i+1} + w_{j-1,k}^i + w_{j,k}^i) = 0 \end{aligned} \quad (A5.2)$$

donde los índices  $(i,j,k)$ , según las respectivas direcciones  $(\xi,\eta,\zeta)$ , se representan en la Figura A5.1. Se destaca asimismo la promediación entre las estaciones  $i$  e  $i+1$  y entre  $j-1$  y  $j$ .

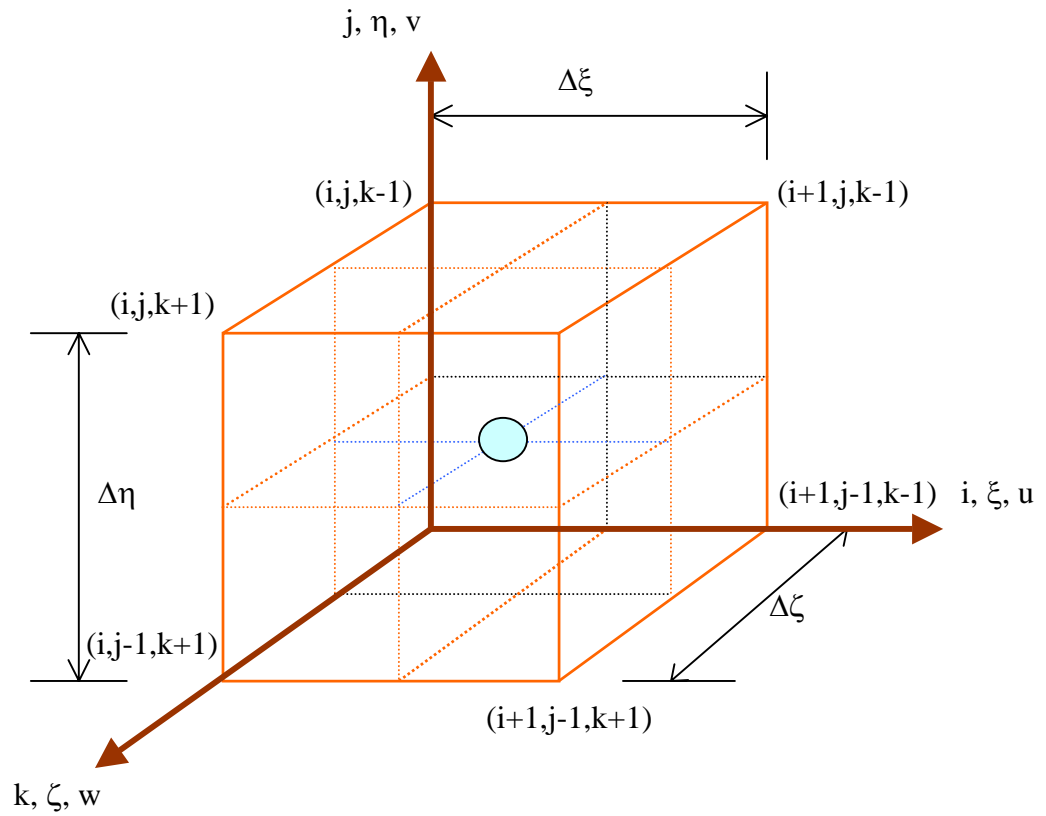


Figura A5.1 Esquema centrado en  $(i+1/2, j-1/2, k)$  para ecuación de continuidad.

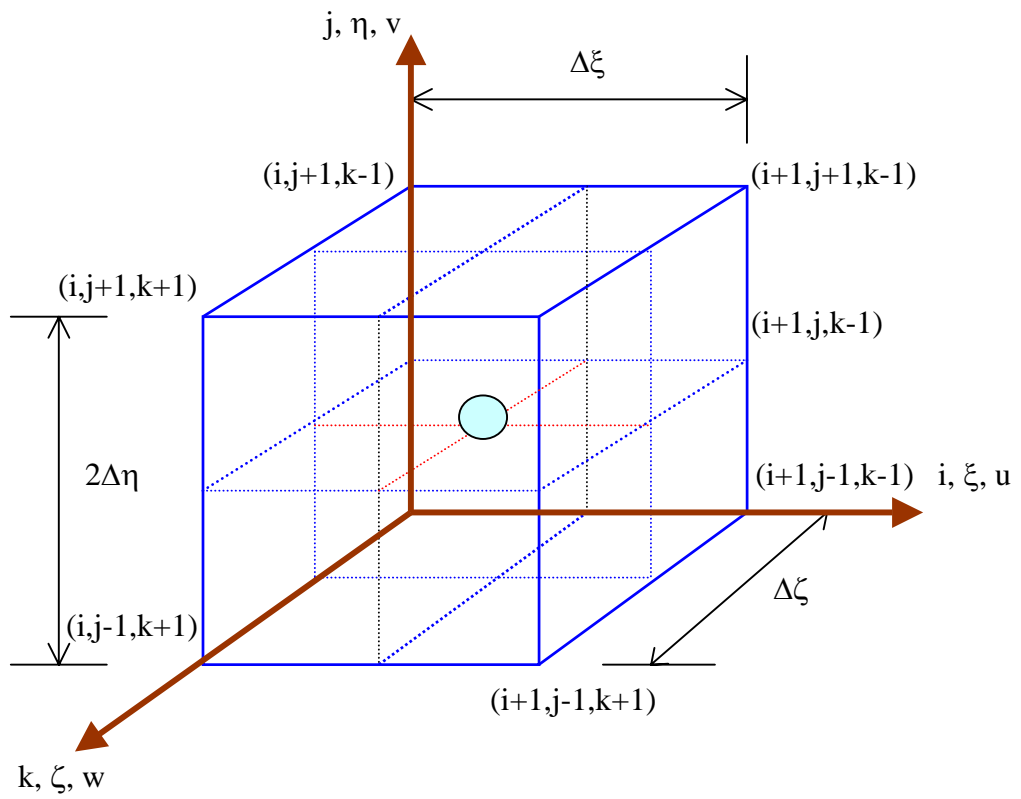


Figura A5.2 Esquema centrado en  $(i+1/2, j, k)$  para ecuación de cantidad de movimiento.

Reordenando la ecuación (A5.2) en un sistema tridiagonal para la incógnita  $v(\xi, \eta, \zeta)$ , que presenta la formulación general

$$\mathbf{B}_j^{(v)} v_{j-1,k}^{i+1} + \mathbf{D}_j^{(v)} v_{j,k}^{i+1} + \mathbf{A}_j^{(v)} v_{j+1,k}^{i+1} = \mathbf{C}_j^{(v)} \quad (\text{A5.3})$$

resultan

$$\mathbf{D}_j^{(v)} = -\mathbf{B}_j^{(v)} = \left( \frac{k_3}{h_3} \frac{1}{2(\Delta\eta)} \right) \quad \mathbf{A}_j^{(v)} = 0 \quad (\text{A5.4})$$

y

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{S h_2} \frac{1}{2(\Delta\xi)} (u_{j,k}^{i+1} + u_{j-1,k}^{i+1} - u_{j,k}^i - u_{j-1,k}^i) - \\ &-\frac{k_2}{h_2} \frac{1}{2(\Delta\eta)} [(u_{j,k}^{i+1} - u_{j-1,k}^{i+1}) + (u_{j,k}^i - u_{j-1,k}^i)] - \\ &\quad -\frac{k_3}{h_3} \frac{1}{2(\Delta\eta)} [(v_{j,k}^i - v_{j-1,k}^i)] - \\ &-\frac{k_1}{h_1} \frac{1}{2(\Delta\eta)} [(w_{j,k}^{i+1} - w_{j-1,k}^{i+1}) + (w_{j,k}^i - w_{j-1,k}^i)] + \\ &+\frac{1}{B h_1} \frac{1}{4(\Delta\zeta)} [(w_{j,k+1}^i + w_{j-1,k+1}^i + w_{j,k}^{i+1} + w_{j-1,k}^{i+1}) - (w_{j,k}^i + w_{j-1,k}^i + w_{j,k-1}^{i+1} + w_{j-1,k-1}^{i+1})] - \\ &-K_{20} \frac{1}{4} (u_{j-1,k}^{i+1} + u_{j,k}^{i+1} + u_{j-1,k}^i + u_{j,k}^i) - K_{10} \frac{1}{4} (w_{j-1,k}^{i+1} + w_{j,k}^{i+1} + w_{j-1,k}^i + w_{j,k}^i). \end{aligned} \quad (\text{A5.5})$$

## A5.2. Ecuación de cantidad de movimiento según cuerda

La ecuación de cantidad de movimiento, según el eje  $\xi$ , para la componente  $u$  del campo de velocidades es

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h_2} \frac{u}{S} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \left( w \frac{k_1}{h_1} + u \frac{k_2}{h_2} + v \frac{k_3}{h_3} \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{1}{h_1} \frac{w}{B} \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \\ &+ (ww - WW)K_{112} + (uw - UW)K_{122} + (uu - UU)K_{222} - \\ &\quad - \frac{1}{h_2} \frac{U}{S} \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{1}{h_1} \frac{W}{B} \frac{\partial U}{\partial \zeta} - \\ &- 2a_{33} \frac{g_{33}}{\sqrt{g_0}} [h_1 h_2 (w - W) + g_{12} (u - U)] \Omega - v \frac{(k_3)^2}{g_{33}} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A5.6})$$

donde  $U \equiv u_{NV}$  y  $W \equiv w_{NV}$ , con la única finalidad de simplificar la nomenclatura.

Según el esquema Krause zig-zag, centrado en  $(i+1/2, j, k)$  como se observa en la Figura A5.2, se tiene

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2 h_2 S(\Delta \xi)} \left\{ \left( u_{j,k}^{i+1} + u_{j,k}^i \right) \left( u_{j,k}^{i+1} - u_{j,k}^i \right) \right\} + \\
& + \frac{1}{4 (\Delta \eta)} \left\{ \frac{k_1}{h_1} \left( w_{j,k}^{i+1} \right) + \frac{k_2}{h_2} \left( u_{j,k}^{i+1} \right) + \frac{k_3}{h_3} \left( v_{j,k}^{i+1} \right) \right\} \left( u_{j+1,k}^{i+1} - u_{j-1,k}^{i+1} \right) + \\
& + \frac{1}{4 (\Delta \eta)} \left\{ \frac{k_1}{h_1} \left( w_{j,k}^i \right) + \frac{k_2}{h_2} \left( u_{j,k}^i \right) + \frac{k_3}{h_3} \left( v_{j,k}^i \right) \right\} \left( u_{j+1,k}^i - u_{j-1,k}^i \right) - \\
& - \frac{1}{4 h_1 B(\Delta \zeta)} \left[ \left( w_{j,k}^i + w_{j,k}^{i+1} \right) \left( u_{j,k+1}^i - u_{j,k}^i + u_{j,k}^{i+1} - u_{j,k-1}^{i+1} \right) \right] - \\
& - \frac{1}{2 h_2 S(\Delta \xi)} \left\{ \left( U_k^{i+1} + U_k^i \right) \left( U_k^{i+1} - U_k^i \right) \right\} + \\
& + \frac{1}{4 h_1 B(\Delta \zeta)} \left[ \left( W_k^i + W_k^{i+1} \right) \left( U_{k+1}^i - U_k^i + U_k^{i+1} - U_{k-1}^{i+1} \right) \right] + \tag{A5.7} \\
& + \frac{1}{4} K_{112} \left\{ \left( w_{j,k}^{i+1} + w_{j,k}^i \right)^2 - \left( W_k^{i+1} + W_k^i \right)^2 \right\} + \\
& + \frac{1}{4} K_{122} \left\{ \left[ \left( u_{j,k}^{i+1} + u_{j,k}^i \right) \left( w_{j,k}^{i+1} + w_{j,k}^i \right) \right] - \left[ \left( U_k^{i+1} + U_k^i \right) \left( W_k^{i+1} + W_k^i \right) \right] \right\} + \\
& + \frac{1}{4} K_{222} \left\{ \left( u_{j,k}^{i+1} + u_{j,k}^i \right)^2 - \left( U_k^{i+1} + U_k^i \right)^2 \right\} - \\
& - \Omega a_{33} \frac{g_{33}}{\sqrt{g_0}} \left\{ h_1 h_2 \left[ \left( w_{j,k}^{i+1} + w_{j,k}^i \right) - \left( W_k^{i+1} + W_k^i \right) \right] + g_{12} \left[ \left( u_{j,k}^{i+1} + u_{j,k}^i \right) - \left( U_k^{i+1} + U_k^i \right) \right] \right\} - \\
& - \frac{v(k_3)^2}{2 g_{33} (\Delta \eta)^2} \left\{ u_{j+1,k}^{i+1} + u_{j+1,k}^i - 2 \left( u_{j,k}^{i+1} + u_{j,k}^i \right) + u_{j-1,k}^{i+1} + u_{j-1,k}^i \right\} = 0,
\end{aligned}$$

expresión en donde se ha considerado la promediación entre las estaciones  $i$  e  $i+1$ .

Reordenando la ecuación (A5.7) se tiene que

$$\begin{aligned}
& \mathbf{u}_{j+1,k}^{i+1} \frac{1}{4(\Delta\eta)} \left\{ \frac{\mathbf{k}_1}{h_1} (\mathbf{w}_{j,k}^{i+1}) + \frac{\mathbf{k}_2}{h_2} (2\mathbf{u}_{j,k}^i - \mathbf{u}_{j,k}^{i-1}) + \frac{\mathbf{k}_3}{h_3} (\mathbf{v}_{j,k}^{i+1}) \right\} + \\
& + \mathbf{u}_{j,k}^{i+1} \left\{ \frac{1}{2h_2 S(\Delta\xi)} [(2\mathbf{u}_{j,k}^i - \mathbf{u}_{j,k}^{i-1}) + \mathbf{u}_{j,k}^i] - \frac{1}{4h_1 B(\Delta\zeta)} (\mathbf{w}_{j,k}^i + \mathbf{w}_{j,k}^{i+1}) \right\} + \\
& + \mathbf{u}_{j,k}^{i+1} \left\{ \frac{\mathbf{K}_{122}}{4} (\mathbf{w}_{j,k}^{i+1} + \mathbf{w}_{j,k}^i) + \frac{\mathbf{K}_{222}}{4} [\mathbf{u}_{j,k}^i + (2\mathbf{u}_{j,k}^i - \mathbf{u}_{j,k}^{i-1})] - \mathbf{g}_{12} \frac{\mathbf{g}_{33}}{\sqrt{\mathbf{g}_0}} \mathbf{a}_{33} \Omega \right\} - \\
& - \mathbf{u}_{j+1,k}^{i+1} \left\{ \frac{\mathbf{v}}{2\mathbf{g}_{33}(\Delta\eta)^2} (\mathbf{k}_3)^2 \right\} + \mathbf{u}_{j,k}^{i+1} \left\{ \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{g}_{33}(\Delta\eta)^2} (\mathbf{k}_3)^2 \right\} - \mathbf{u}_{j-1,k}^{i+1} \left\{ \frac{\mathbf{v}}{2\mathbf{g}_{33}(\Delta\eta)^2} (\mathbf{k}_3)^2 \right\} - \\
& - \mathbf{u}_{j-1,k}^{i+1} \frac{1}{4(\Delta\eta)} \left\{ \frac{\mathbf{k}_1}{h_1} (\mathbf{w}_{j,k}^{i+1}) + \frac{\mathbf{k}_2}{h_2} (2\mathbf{u}_{j,k}^i - \mathbf{u}_{j,k}^{i-1}) + \frac{\mathbf{k}_3}{h_3} (\mathbf{v}_{j,k}^{i+1}) \right\} = \\
& = - \frac{1}{2h_2 S(\Delta\xi)} [(2\mathbf{u}_{j,k}^i - \mathbf{u}_{j,k}^{i-1}) + \mathbf{u}_{j,k}^i] \mathbf{u}_{j,k}^i - \\
& - \frac{1}{4(\Delta\eta)} \left\{ \frac{\mathbf{k}_1}{h_1} (\mathbf{w}_{j,k}^i) + \frac{\mathbf{k}_2}{h_2} (\mathbf{u}_{j,k}^i) + \frac{\mathbf{k}_3}{h_3} (\mathbf{v}_{j,k}^i) \right\} (\mathbf{u}_{j+1,k}^i - \mathbf{u}_{j-1,k}^i) + \\
& + \frac{1}{4h_1 B(\Delta\zeta)} (\mathbf{w}_{j,k}^i + \mathbf{w}_{j,k}^{i+1}) (\mathbf{u}_{j,k+1}^i - \mathbf{u}_{j,k}^i - \mathbf{u}_{j,k-1}^{i+1}) + \\
& + \frac{1}{2h_2 S(\Delta\xi)} \{ (\mathbf{U}_k^{i+1} + \mathbf{U}_k^i) (\mathbf{U}_k^{i+1} - \mathbf{U}_k^i) \} - \\
& - \frac{1}{4h_1 B(\Delta\zeta)} [(\mathbf{W}_k^i + \mathbf{W}_k^{i+1}) (\mathbf{U}_{k+1}^i - \mathbf{U}_k^i + \mathbf{U}_k^{i+1} - \mathbf{U}_{k-1}^{i+1})] - \\
& - \frac{1}{4} \mathbf{K}_{112} \{ (\mathbf{w}_{j,k}^{i+1} + \mathbf{w}_{j,k}^i)^2 - (\mathbf{W}_k^{i+1} + \mathbf{W}_k^i)^2 \} - \\
& - \frac{1}{4} \mathbf{K}_{122} [\mathbf{u}_{j,k}^i (\mathbf{w}_{j,k}^{i+1} + \mathbf{w}_{j,k}^i) - (\mathbf{U}_k^{i+1} + \mathbf{U}_k^i) (\mathbf{W}_k^{i+1} + \mathbf{W}_k^i)] - \\
& - \frac{1}{4} \mathbf{K}_{222} \{ [\mathbf{u}_{j,k}^i + (2\mathbf{u}_{j,k}^i - \mathbf{u}_{j,k}^{i-1})] \mathbf{u}_{j,k}^i - (\mathbf{U}_k^{i+1} + \mathbf{U}_k^i) (\mathbf{U}_k^{i+1} + \mathbf{U}_k^i) \} + \\
& + \Omega \mathbf{a}_{33} \frac{\mathbf{g}_{33}}{\sqrt{\mathbf{g}_0}} \{ h_1 h_2 [(\mathbf{w}_{j,k}^{i+1} + \mathbf{w}_{j,k}^i) - (\mathbf{W}_k^{i+1} + \mathbf{W}_k^i)] + \mathbf{g}_{12} [\mathbf{u}_{j,k}^{i+1} - (\mathbf{U}_k^{i+1} + \mathbf{U}_k^i)] \} + \\
& + \frac{\mathbf{v}(\mathbf{k}_3)^2}{2\mathbf{g}_{33}(\Delta\eta)^2} \{ \mathbf{u}_{j+1,k}^i - 2\mathbf{u}_{j,k}^i + \mathbf{u}_{j-1,k}^i \}
\end{aligned} \tag{A5.8}$$

y con la finalidad de expresar (A5.8) mediante un sistema tridiagonal para la incógnita  $\mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta)$  que presenta la formulación general

$$\mathbf{B}_j^{(u)} \cdot \mathbf{u}_{j-1,k}^{i+1} + \mathbf{D}_j^{(u)} \cdot \mathbf{u}_{j,k}^{i+1} + \mathbf{A}_j^{(u)} \cdot \mathbf{u}_{j+1,k}^{i+1} = \mathbf{C}_j^{(u)} \quad (\text{A5.9})$$

resultan los coeficientes

$$\mathbf{A}_j^{(u)} = + \frac{1}{4(\Delta\eta)} \left\{ \frac{k_1}{h_1} (\mathbf{w}_{j,k}^{i+1}) + \frac{k_2}{h_2} (2\mathbf{u}_{j,k}^i - \mathbf{u}_{j,k}^{i-1}) + \frac{k_3}{h_3} (\mathbf{v}_{j,k}^{i+1}) \right\} - \left\{ \frac{\mathbf{v}}{2g_{33}(\Delta\eta)^2} (\mathbf{k}_3)^2 \right\} \quad (\text{A5.10})$$

$$\mathbf{B}_j^{(u)} = - \frac{1}{4(\Delta\eta)} \left\{ \frac{k_1}{h_1} (\mathbf{w}_{j,k}^{i+1}) + \frac{k_2}{h_2} (2\mathbf{u}_{j,k}^i - \mathbf{u}_{j,k}^{i-1}) + \frac{k_3}{h_3} (\mathbf{v}_{j,k}^{i+1}) \right\} - \left\{ \frac{\mathbf{v}}{2g_{33}(\Delta\eta)^2} (\mathbf{k}_3)^2 \right\} \quad (\text{A5.11})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_j^{(u)} = & \left\{ \frac{1}{2h_2 S(\Delta\xi)} [(2\mathbf{u}_{j,k}^i - \mathbf{u}_{j,k}^{i-1}) + \mathbf{u}_{j,k}^i] - \frac{1}{4h_1 B(\Delta\zeta)} (\mathbf{w}_{j,k}^i + \mathbf{w}_{j,k}^{i+1}) \right\} + \\ & + \left\{ \frac{\mathbf{K}_{122}}{4} (\mathbf{w}_{j,k}^{i+1} + \mathbf{w}_{j,k}^i) + \frac{\mathbf{K}_{222}}{4} [\mathbf{u}_{j,k}^i + (2\mathbf{u}_{j,k}^i - \mathbf{u}_{j,k}^{i-1})] - g_{12} \frac{g_{33}}{\sqrt{g_0}} \mathbf{a}_{33} \Omega \right\} + \left\{ \frac{\mathbf{v}}{g_{33}(\Delta\eta)^2} (\mathbf{k}_3)^2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{A5.12})$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_j^{(u)} = & - \frac{1}{2h_2 S(\Delta\xi)} [(2\mathbf{u}_{j,k}^i - \mathbf{u}_{j,k}^{i-1}) + \mathbf{u}_{j,k}^i] \mathbf{u}_{j,k}^i - \\ & - \frac{1}{4(\Delta\eta)} \left\{ \frac{k_1}{h_1} (\mathbf{w}_{j,k}^i) + \frac{k_2}{h_2} (\mathbf{u}_{j,k}^i) + \frac{k_3}{h_3} (\mathbf{v}_{j,k}^i) \right\} (\mathbf{u}_{j+1,k}^i - \mathbf{u}_{j-1,k}^i) + \\ & + \frac{1}{4h_1 B(\Delta\zeta)} (\mathbf{w}_{j,k}^i + \mathbf{w}_{j,k}^{i+1}) (\mathbf{u}_{j,k+1}^i - \mathbf{u}_{j,k}^i - \mathbf{u}_{j,k-1}^{i+1}) + \\ & + \frac{1}{2h_2 S(\Delta\xi)} \{ (\mathbf{U}_k^{i+1} + \mathbf{U}_k^i) (\mathbf{U}_k^{i+1} - \mathbf{U}_k^i) \} - \\ & - \frac{1}{4h_1 B(\Delta\zeta)} [(\mathbf{W}_k^i + \mathbf{W}_k^{i+1}) (\mathbf{U}_{k+1}^i - \mathbf{U}_k^i + \mathbf{U}_k^{i+1} - \mathbf{U}_{k-1}^{i+1})] - \\ & - \frac{1}{4} \mathbf{K}_{112} \{ (\mathbf{w}_{j,k}^{i+1} + \mathbf{w}_{j,k}^i)^2 - (\mathbf{W}_k^{i+1} + \mathbf{W}_k^i)^2 \} - \\ & - \frac{1}{4} \mathbf{K}_{122} [\mathbf{u}_{j,k}^i (\mathbf{w}_{j,k}^{i+1} + \mathbf{w}_{j,k}^i) - (\mathbf{U}_k^{i+1} + \mathbf{U}_k^i) (\mathbf{W}_k^{i+1} + \mathbf{W}_k^i)] - \\ & - \frac{1}{4} \mathbf{K}_{222} \{ [\mathbf{u}_{j,k}^i + (2\mathbf{u}_{j,k}^i - \mathbf{u}_{j,k}^{i-1})] \mathbf{u}_{j,k}^i - (\mathbf{U}_k^{i+1} + \mathbf{U}_k^i) (\mathbf{U}_k^{i+1} + \mathbf{U}_k^i) \} + \\ & + \Omega \mathbf{a}_{33} \frac{g_{33}}{\sqrt{g_0}} \{ h_1 h_2 [(\mathbf{w}_{j,k}^{i+1} + \mathbf{w}_{j,k}^i) - (\mathbf{W}_k^{i+1} + \mathbf{W}_k^i)] + g_{12} [\mathbf{u}_{j,k}^{i+1} - (\mathbf{U}_k^{i+1} + \mathbf{U}_k^i)] \} + \\ & + \frac{\mathbf{v} (\mathbf{k}_3)^2}{2g_{33}(\Delta\eta)^2} \{ \mathbf{u}_{j+1,k}^i - 2\mathbf{u}_{j,k}^i + \mathbf{u}_{j-1,k}^i \}. \end{aligned} \quad (\text{A5.13})$$



### A5.3. Ecuación de cantidad de movimiento según envergadura

La ecuación de cantidad de movimiento, según el eje  $\zeta$ , para la componente  $w$  del campo de velocidades es

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_2} \frac{u}{S} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \left( w \frac{k_1}{h_1} + u \frac{k_2}{h_2} + v \frac{k_3}{h_3} \right) \frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{1}{h_1} \frac{w}{B} \frac{\partial w}{\partial \zeta} + \\ & + (ww - WW)K_{111} + (uw - UW)K_{121} + (uu - UU)K_{221} - \frac{1}{h_2} \frac{U}{S} \frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{1}{h_1} \frac{W}{B} \frac{\partial W}{\partial \zeta} - \\ & - 2a_{33} \frac{g_{33}}{\sqrt{g_0}} [h_1 h_2 (U - u) + g_{12} (W - w)] \Omega - v \frac{(k_3)^2}{g_{33}} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (A5.14)$$

donde  $U \equiv u_{NV}$  y  $W \equiv w_{NV}$ , con la única finalidad de simplificar la nomenclatura.

Según el esquema Krause zig-zag, centrado en  $(i+1/2, j, k)$  como se observa en la Figura A5.2, se tiene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h_2 S (\Delta \xi)} \left[ (u_{j,k}^{i+1} + u_{j,k}^i) (w_{j,k}^{i+1} - w_{j,k}^i) \right] + \\ & + \frac{1}{4(\Delta \eta)} \left\{ \frac{k_1}{h_1} (2w_{j,k}^i - w_{j,k}^{i-1}) + \frac{k_2}{h_2} (u_{j,k}^{i+1}) + \frac{k_3}{h_3} (v_{j,k}^{i+1}) \right\} (w_{j+1,k}^{i+1} - w_{j-1,k}^{i+1}) + \\ & + \frac{1}{4(\Delta \eta)} \left\{ \frac{k_1}{h_1} (w_{j,k}^i) + \frac{k_2}{h_2} (u_{j,k}^i) + \frac{k_3}{h_3} (v_{j,k}^i) \right\} (w_{j+1,k}^i - w_{j-1,k}^i) + \\ & - \frac{1}{4h_1 B (\Delta \zeta)} \left[ (2w_{j,k}^i + w_{j,k}^{i-1}) + w_{j,k}^i \right] (w_{j,k+1}^i - w_{j,k}^i + w_{j,k}^{i+1} - w_{j,k-1}^{i+1}) - \\ & - \frac{1}{2h_2 S (\Delta \xi)} \left[ (U_k^{i+1} + U_k^i) (W_k^{i+1} - W_k^i) \right] + \\ & + \frac{1}{4h_1 B (\Delta \zeta)} \left[ (W_k^i + W_k^{i+1}) (W_{k+1}^i - W_k^i + W_k^{i+1} - W_{k-1}^{i+1}) \right] + \\ & + \frac{1}{4} K_{111} \left\{ (2w_{j,k}^i - w_{j,k}^{i-1}) + w_{j,k}^i \right\} (w_{j,k}^{i+1} + w_{j,k}^i) - (W_k^{i+1} + W_k^i)^2 \left\} + \\ & + \frac{1}{4} K_{121} \left[ (u_{j,k}^{i+1} + u_{j,k}^i) (w_{j,k}^{i+1} + w_{j,k}^i) - (U_k^{i+1} + U_k^i) (W_k^{i+1} + W_k^i) \right] + \\ & + \frac{1}{4} K_{221} \left[ (u_{j,k}^{i+1} + u_{j,k}^i)^2 - (U_k^{i+1} + U_k^i)^2 \right] - \\ & - a_{33} \Omega \frac{g_{33}}{\sqrt{g_0}} \left\{ h_1 h_2 \left[ (U_k^{i+1} + U_k^i) - (u_{j,k}^{i+1} + u_{j,k}^i) \right] + g_{12} \left[ (W_k^{i+1} + W_k^i) - (w_{j,k}^{i+1} + w_{j,k}^i) \right] \right\} - \\ & - \frac{v(k_3)^2}{2g_{33} (\Delta \eta)^2} \left\{ w_{j+1,k}^{i+1} + w_{j+1,k}^i - 2(w_{j,k}^{i+1} + w_{j,k}^i) + w_{j-1,k}^{i+1} + w_{j-1,k}^i \right\} = 0, \end{aligned} \quad (A5.15)$$

expresión en donde se ha considerado la promediación entre las estaciones  $i$  e  $i+1$ .

Reordenando la ecuación (A5.15) se tiene que

$$\begin{aligned}
& w_{j+1,k}^{i+1} \frac{1}{4(\Delta\eta)} \left\{ \frac{k_1}{h_1} (2w_{j,k}^i - w_{j,k}^{i-1}) + \frac{k_2}{h_2} (u_{j,k}^{i+1}) + \frac{k_3}{h_3} (v_{j,k}^{i+1}) \right\} - \\
& + w_{j,k}^{i+1} \left\{ \frac{1}{2h_2 S(\Delta\xi)} (u_{j,k}^{i+1} + u_{j,k}^i) - \frac{1}{4h_1 B(\Delta\zeta)} [w_{j,k}^i + (2w_{j,k}^i - w_{j,k}^{i-1})] \right\} + \\
& + w_{j,k}^{i+1} \left\{ \frac{K_{111}}{4} [w_{j,k}^i + (2w_{j,k}^i - w_{j,k}^{i-1})] + \frac{K_{121}}{4} (u_{j,k}^{i+1} + u_{j,k}^i) + g_{12} \frac{g_{33}}{\sqrt{g_0}} a_{33} \Omega \right\} + \\
& - w_{j-1,k}^{i+1} \frac{1}{4(\Delta\eta)} \left\{ \frac{k_1}{h_1} (2w_{j,k}^i - w_{j,k}^{i-1}) + \frac{k_2}{h_2} (u_{j,k}^{i+1}) + \frac{k_3}{h_3} (v_{j,k}^{i+1}) \right\} - \\
& - w_{j+1,k}^{i+1} \left\{ \frac{v}{2g_{33}(\Delta\eta)^2} (k_3)^2 \right\} + w_{j,k}^{i+1} \left\{ \frac{v}{g_{33}(\Delta\eta)^2} (k_3)^2 \right\} - w_{j-1,k}^{i+1} \left\{ \frac{v}{2g_{33}(\Delta\eta)^2} (k_3)^2 \right\} = \\
& = \frac{1}{2h_2 S(\Delta\xi)} (u_{j,k}^{i+1} + u_{j,k}^i) w_{j,k}^i - \\
& - \frac{1}{4(\Delta\eta)} \left\{ \frac{k_1}{h_1} (w_{j,k}^i) + \frac{k_2}{h_2} (u_{j,k}^i) + \frac{k_3}{h_3} (v_{j,k}^i) \right\} (w_{j+1,k}^i - w_{j-1,k}^i) + \\
& + \frac{1}{4h_1 B(\Delta\zeta)} [w_{j,k}^i + (2w_{j,k}^i - w_{j,k}^{i-1})] (w_{j,k+1}^i - w_{j,k}^i - w_{j,k-1}^{i+1}) + \\
& + \frac{1}{2h_2 S(\Delta\xi)} [(U_k^{i+1} + U_k^i) (W_k^{i+1} - W_k^i)] - \\
& - \frac{1}{4h_1 B(\Delta\zeta)} [(W_k^i + W_k^{i+1}) (W_{k+1}^i - W_k^i + W_k^{i+1} - W_{k-1}^{i+1})] - \\
& - \frac{1}{4} K_{111} \left\{ (2w_{j,k}^i - w_{j,k}^{i-1}) + w_{j,k}^i \right\} (w_{j,k}^i) - (W_k^{i+1} + W_k^i)^2 \left\{ - \right. \\
& - \frac{1}{4} K_{121} [(u_{j,k}^{i+1} + u_{j,k}^i) (w_{j,k}^i) - (U_k^{i+1} + U_k^i) (W_k^{i+1} + W_k^i)] - \\
& \left. - \frac{1}{4} K_{221} [(u_{j,k}^{i+1} + u_{j,k}^i)^2 - (U_k^{i+1} + U_k^i)^2] \right\} + \\
& + a_{33} \Omega \frac{g_{33}}{\sqrt{g_0}} \left\{ h_1 h_2 [(U_k^{i+1} + U_k^i) - (u_{j,k}^{i+1} + u_{j,k}^i)] + g_{12} [(W_k^{i+1} + W_k^i) - w_{j,k}^i] \right\} + \\
& + \frac{v}{2(\Delta\eta)^2} \left( \frac{k_3}{h_3} \right)^2 \left\{ w_{j+1,k}^i - 2w_{j,k}^i + w_{j-1,k}^i \right\}
\end{aligned} \tag{A5.16}$$

y con la finalidad de expresar (A5.16) mediante un sistema tridiagonal para la incógnita  $w(\xi, \eta, \zeta)$  que presenta la formulación general

$$\mathbf{B}_j^{(w)} \cdot \mathbf{w}_{j-1,k}^{i+1} + \mathbf{D}_j^{(w)} \cdot \mathbf{w}_{j,k}^{i+1} + \mathbf{A}_j^{(w)} \cdot \mathbf{w}_{j+1,k}^{i+1} = \mathbf{C}_j^{(w)} \quad (\text{A5.17})$$

resultan los coeficientes

$$\mathbf{A}_j^{(w)} = + \frac{1}{4(\Delta\eta)} \left\{ \frac{k_1}{h_1} (2w_{j,k}^i - w_{j,k}^{i-1}) + \frac{k_2}{h_2} (u_{j,k}^{i+1}) + \frac{k_3}{h_3} (v_{j,k}^{i+1}) \right\} - \left\{ \frac{v}{2g_{33}(\Delta\eta)^2} (k_3)^2 \right\} \quad (\text{A5.18})$$

$$\mathbf{B}_j^{(w)} = - \frac{1}{4(\Delta\eta)} \left\{ \frac{k_1}{h_1} (2w_{j,k}^i - w_{j,k}^{i-1}) + \frac{k_2}{h_2} (u_{j,k}^{i+1}) + \frac{k_3}{h_3} (v_{j,k}^{i+1}) \right\} - \left\{ \frac{v}{2g_{33}(\Delta\eta)^2} (k_3)^2 \right\} \quad (\text{A5.19})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_j^{(w)} = & \left\{ \frac{1}{2h_2 S(\Delta\xi)} (u_{j,k}^{i+1} + u_{j,k}^i) - \frac{1}{4h_1 B(\Delta\zeta)} [w_{j,k}^i + (2w_{j,k}^i - w_{j,k}^{i-1})] \right\} + \\ & + \left\{ \frac{K_{111}}{4} [w_{j,k}^i + (2w_{j,k}^i - w_{j,k}^{i-1})] + \frac{K_{121}}{4} (u_{j,k}^{i+1} + u_{j,k}^i) + g_{12} \frac{g_{33}}{\sqrt{g_0}} a_{33} \Omega \right\} + \left\{ \frac{v}{g_{33}(\Delta\eta)^2} (k_3)^2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{A5.20})$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_j^{(w)} = & \frac{1}{2h_2 S(\Delta\xi)} (u_{j,k}^{i+1} + u_{j,k}^i) w_{j,k}^i - \\ & - \frac{1}{4(\Delta\eta)} \left\{ \frac{k_1}{h_1} (w_{j,k}^i) + \frac{k_2}{h_2} (u_{j,k}^i) + \frac{k_3}{h_3} (v_{j,k}^i) \right\} (w_{j+1,k}^i - w_{j-1,k}^i) + \\ & + \frac{1}{4h_1 B(\Delta\zeta)} [w_{j,k}^i + (2w_{j,k}^i - w_{j,k}^{i-1})] (w_{j,k+1}^i - w_{j,k}^i - w_{j,k-1}^{i+1}) + \\ & + \frac{1}{2h_2 S(\Delta\xi)} [(U_k^{i+1} + U_k^i) (W_k^{i+1} - W_k^i)] - \\ & - \frac{1}{4h_1 B(\Delta\zeta)} [(W_k^i + W_k^{i+1}) (W_{k+1}^i - W_k^i + W_k^{i+1} - W_{k-1}^{i+1})] - \\ & - \frac{1}{4} K_{111} \left\{ (2w_{j,k}^i - w_{j,k}^{i-1}) + w_{j,k}^i \right\} (w_{j,k}^i) - (W_k^{i+1} + W_k^i)^2 \left\{ - \right. \\ & - \frac{1}{4} K_{121} [(u_{j,k}^{i+1} + u_{j,k}^i) (w_{j,k}^i) - (U_k^{i+1} + U_k^i) (W_k^{i+1} + W_k^i)] - \\ & \left. - \frac{1}{4} K_{221} [(u_{j,k}^{i+1} + u_{j,k}^i)^2 - (U_k^{i+1} + U_k^i)^2] \right\} + \\ & + a_{33} \Omega \frac{g_{33}}{\sqrt{g_0}} \left\{ h_1 h_2 [(U_k^{i+1} + U_k^i) - (u_{j,k}^{i+1} + u_{j,k}^i)] + g_{12} [(W_k^{i+1} + W_k^i) - w_{j,k}^i] \right\} + \\ & + \frac{v}{2(\Delta\eta)^2} \left( \frac{k_3}{h_3} \right)^2 \left\{ w_{j+1,k}^i - 2w_{j,k}^i + w_{j-1,k}^i \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A5.21})$$

#### A5.4. Comentarios adicionales

En el inicio del proceso iterativo de resolución del sistema de ecuaciones algebraicas, los términos no lineales de las ecuaciones discretizadas para la cantidad de movimiento, son linealizados modificando los coeficientes de dichos términos con valores de velocidad evaluados en una posición anterior. Haciendo uso de una aproximación mediante un desarrollo en serie de Taylor, resultan

$$u_{j,k}^{i+1} \cong 2u_{j,k}^i - u_{j,k}^{i-1} \quad (\text{A5.22})$$

para la ecuación de cantidad de movimiento según la coordenada x, y

$$w_{j,k}^{i+1} \cong 2w_{j,k}^i - w_{j,k}^{i-1} \quad (\text{A5.23})$$

para la ecuación de cantidad de movimiento según la coordenada z.

Durante la continuación del proceso iterativo, dejan de utilizarse las aproximaciones dadas por (A5.22) y (A5.23), ya que los nuevos valores de velocidad obtenidos en la iteración  $n$  resultarán incorporados como coeficientes en la próxima iteración  $(n+1)$ .

Siguiendo el análisis de Anderson *et al.* (1984), la condición de que los coeficientes  $A_j$  y  $B_j$  mantengan valores negativos provee una correcta simulación del comportamiento viscoso. Para conseguir que ésto ocurra, se debe asegurar la representación numérica de los términos convectivos. Una de las metodologías propuestas para lograr este fin es utilizar un esquema en diferencias como el de Leonard, pero ésto conllevaría la destrucción de la tridiagonalidad, la cual resulta tan práctica pues permite la utilización del algoritmo de Thomas para sistemas tridiagonales. Otra metodología es la de utilizar un esquema híbrido (en parte representación contracorriente *-upwind-*, en parte representación con diferencias centrales), pero su implementación ha resultado extremadamente compleja dado que requiere de la definición de los números de Péclet de grilla, que resultaban ser incógnitas.

La opción seleccionada fue la de pasar directamente del modelo en diferencias centrales a la representación de los términos convectivos mediante un esquema *upwind* cada vez que  $A_j$  y  $B_j$  tomaban valores negativos. Si bien el esquema *upwind* es altamente difusivo, asegura la diagonal dominancia del sistema algebraico, y por ende su estabilidad durante el proceso iterativo de resolución. Lógicamente, siempre que haya sido posible, la representación con diferencias centrales ha sido utilizada, dado que es un esquema de segundo orden.

# EPÍLOGO

## CONCLUSIONES Y FUTURO TRABAJO

Un requisito básico para una adecuada estimación de la eficiencia de una turbina eólica es una definición realista del flujo alrededor de sus palas. Sin embargo, la naturaleza compleja de la fluidodinámica involucrada, así como la variabilidad de las condiciones bajo las cuales opera, hacen que deban asumirse modelos simplificados. Las aproximaciones numéricas para la simulación del flujo sobre una turbina eólica tienen por finalidad describir el comportamiento aerodinámico de las mismas, no solamente con el objetivo de lograr un mejor diseño y eficiencia del rotor, mayor precisión en la determinación de la potencia extraída al viento, sino también predecir aspectos relacionados al diseño aerodinámico, como son los efectos aeroelásticos y aeroacústicos, los cuales dependen de una lograda predicción de las cargas sobre las palas. Por otra parte, se requiere asimismo una adecuada evaluación de los mecanismos que inducen la fatiga, dado que este fenómeno reduce la vida operativa e incrementa los costos de mantenimiento de la turbina. La falla de la pala de una turbina eólica, con sus consecuentes costos de reparación y de reemplazo, puede ser primariamente atribuida a una inadecuada evaluación de las cargas aerodinámicas actuantes.

En la presente tesis se han desarrollado los sucesivos pasos para determinar el campo de velocidades y el estado tensional del fluido sobre una la turbina eólica de eje horizontal de baja potencia. El proceso se ha llevado a cabo mediante la interacción de las regiones viscosa e invíscida del campo fluidodinámico desarrollado alrededor de la pala del rotor. Los pasos han incluido un modelo muy simple de disco actuador, con la finalidad de determinar una configuración de la envolvente del flujo que pasa a través del rotor. Dicha configuración ha sido utilizada como la envolvente del sistema de hilos vorticosos libres que conforman la estela no viscosa de la turbina en el método de los paneles, procedimiento computacional desarrollado para la determinación de las características no viscosas del flujo alrededor de la pala. Mediante la técnica de los paneles ha sido posible determinar no solo las fuerzas sustentadoras sobre la pala, sino también las resistencias inducidas por tratarse de superficies de longitud finita y, fundamentalmente, la distribución de velocidades en proximidad de las superficies de la pala. Es justamente esta distribución de velocidad, de origen invíscido, que

es utilizada como condición de contorno sobre el borde superior de la capa viscosa para así resolver numéricamente las ecuaciones de la capa límite tridimensional, siguiendo la superficies de las palas. Determinados entonces mediante la técnica de las diferencias finitas los perfiles de velocidades dentro de la capa límite, es ya posible calcular los efectos viscosos de la fricción sobre las superficies, y así completar la determinación de las cargas aerodinámicas actuantes sobre las palas.

La metodología de análisis descripta ha sido desarrollada con la finalidad de construir un modelo, tanto teórico como numérico, confiable y eficiente para la predicción del comportamiento aerodinámico de palas, si bien bajo condiciones restrictivas y simplificadas.

En el presente trabajo solamente se ha considerado el desarrollo de una capa límite laminar extensiva sobre la totalidad de la superficies de la pala, supuesto válido para turbinas eólicas de pequeño porte y por ende de baja potencia. Sin embargo, este supuesto no resulta realista cuando el tamaño de la pala, y en particular el de su cuerda, es lo suficientemente grande como para inducir la inestabilidad de la capa límite laminar, dando lugar a un proceso de transición que finalmente desembocará en un flujo turbulento completamente desarrollado dentro de la capa viscosa. Desde el punto de vista de las ecuaciones de gobierno, este comportamiento turbulento daría lugar a un estado tensional adicional, el cual puede modelarse ya sea con la incorporación de simples modelos algebraicos, como con ecuaciones diferenciales para la conservación de la energía cinética del movimiento turbulento y de la disipación turbulenta.

Adicionalmente, el propio proceso de transición debe ser modelado, debiéndose de adoptar, dentro de la capa viscosa, los límites inicial y final en donde tiene lugar el desarrollo de la transición. Diversos modelos ingenieriles proponen relaciones empíricas que establecen la extensión aproximada de la zona de transición.

Un modelo fluidodinámico todavía más complejo incluiría la no uniformidad del viento, la inclinación de dicha corriente con respecto al eje del rotor, los efectos de deformación de la estela vorticosa generada corriente abajo de la turbina eólica y las interacciones entre las palas así como la influencia de la torre sobre el rotor.

Por otra parte, una configuración fluidodinámica compleja genera asimismo situaciones desfavorables en donde la turbina trabaja fuera de su condición de diseño, y en donde los gradientes de presión adversos pueden resultar importantes, posibilitando la separación extensiva de la capa límite y la subsecuente modificación del campo invíscido. Lógicamente, si bien éste es un escenario admisible, en absoluto serían deseables estas circunstancias dado que toda separación no solamente va acompañada con la pérdida de sustentación y el incremento de la resistencia, con la consecuente reducción de la eficiencia de la turbina, sino también con la presencia de vibraciones que pueden llegar a producir las fallas de las palas o que finalmente reducirán la vida útil de las mismas.

Asimismo, se debe prever la tarea de verificar que las ecuaciones para la capa límite laminar estacionaria formuladas en la presente tesis resulten efectivamente invariantes ante transformaciones de coordenadas en la superficie y ante cambios de escala en la coordenada normal a dicha superficie.





# REFERENCIAS

- Afjeh A.A. y Keith T.G., Jr. (1986a) A Vortex Lifting Line Method for the Analysis of Horizontal Axis Wind Turbines. *Journal of Solar Energy Engineering*, Vol.108, pp.303-309.
- Afjeh A.A. y Keith T.G., Jr. (1986b) A Simplified Free Wake Method for Horizontal-Axis Wind Turbines Performance Prediction. *Journal of Fluids Engineering*, Vol.108, pp.400-406.
- Ainslie J.F. (1988) Calculating the Flowfield in the Wake of Wind Turbines. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol.27, pp.213-224.
- Anderson D.A., Tannehill J.C. y Pletcher R.H. (1984) *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Hemisphere Publishing Corporation, McGraw-Hill Book Company.
- Anderson O.L (1985) Calculation of Three-Dimensional Boundary Layers on Rotating Turbine Blades, *Three-dimensional Flow Phenomena in Fluid Machinery*, FED Vol.32, ASME, editado por A. Hamed, J. Herring y L. Povinelli, pp.121-132.
- Aris R. (1962) *Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.
- Asvapoositkul W. y Zangeneh M. (1998) A Time-Marching Method for the Calculation of Nonsimilar 3D Boundary Layers on Turbomachinery Blades. *Journal of Fluids Engineering*, ASME, Vol.120, pp.799-807.
- Baker R.W. y Walker S.N. (1984) Wakes Measurements Behind a Large Horizontal Axis Wind Turbine. *Solar Energy*, Vol.33, No.1, pp.5-12.
- Baker R.W., Walker S.N. y Katen P.C. (1985) Wakes Measurements Around Operating Wind Turbines. *Journal of Solar Energy Engineering*, Vol.107, pp.183-185.
- Barnett M. y Verdon J.M. (1987) Viscid/Inviscid Interactions Analysis of Subsonic Turbulent Trailing-Edge Flows. *AIAA Journal*, Vol.25, No.9, pp.1184-1193.

- Barnett M., Verdon J.M. y Ayer T.C. (1993) Analysis of High Reynolds Number Inviscid/Viscid Interactions in Cascades. *AIAA Journal*, Vol.31, No.11, pp.1969-1976.
- Bastianon.R.A. (1994) *Energía del viento y diseño de turbinas eólicas*. 2<sup>da</sup> edición, Tiempo de Cultura Ediciones, Buenos Aires.
- Batchelor G.K. (1967) *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, London.
- Beans E.W. (1983) Approximate Aerodynamic Analysis for Horizontal Axis Wind Turbines. . *Journal of Energy*, Vol.7, No.3, pp.243-249.
- Bertin J.J. y Smith M.L. (1979) *Aerodynamics for engineers*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Betz A. (1926) *Wind-Energie und ihre Ausnützung durch Windmühlen*. Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen.
- Betz A. (1927) Die Windmühlen im Lichte neuerer Forschung. *Die Naturwissenschaften*, Heft 46, pp.905-914, Berlin.
- Cebeci T., Khattab A.K. y Stewartson K. (1981) Three-dimensional laminar boundary layers and the ok of accessibility. *Journal of Fluid Mechanics*, vol.107, pp.57-87.
- Clausen P.D., Piddington D.M. y Wood D.H. (1987) An experimental investigation of blade element theory for wind turbines. Part 1: Mean flow results. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol.25, pp.189-206.
- Crespo A. y Hernández J. (1986) A numerical model of wind turbine wakes and wind farms. European Wind Energy Association Conference and Exhibition. Proceedings volume 2, pp.111-115.
- Chang L.K. (1980) *The Theoretical Performance of High Efficiency Propellers*, Ph.D. Thesis, Purdue University, West Lafayette, IN.
- Chang L.K. y Sullivan J.P. (1984) Optimization of Propeller Blade Twist by an Analytical Method. *AIAA Journal*, Vol.22, No.2, pp.252-255.

- Chiu Y.D. y Peters D.A. (1988) Numerical Solutions of Induced Velocities by Semi-Infinite Tip Vortex Lines. *Journal of Aircraft*, Vol.25, No.8, pp.684-694.
- de Andrade D. e de Oliveira Soviero P.A. (1987) Modelos Quase-Lineares para o Cálculo de Velocidades Induzidas em Rotores de Helicóptero em Vôo Axial. *IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, Florianópolis, SC, pp.173-176.
- DeJarnette F.R. y Radcliffe R.A. (1996) Matching Inviscid/Boundary-Layer Flowfields. *AIAA Journal*, Vol.34, No.1, pp.35-42.
- Drela M. y Giles M.B. (1987) Viscous-Inviscid Analysis of Transonic and Low Reynolds Number Airfoils. *AIAA Journal*, Vol.25, No.10, pp.1347-1355.
- Dyment A. (1989) A Modified Form of the Betz' Wind Turbine Theory Including Losses. *Journal of Fluids Engineering*, Vol.111, pp.356-358.
- Eggleston D.M. y Stoddard F.S. (1987) *Wind Turbine Engineering Design*. Van Nostrand Reinhold Company, New York.
- Fogarty L.E. (1951) The Laminar Boundary Layer on a Rotating Blade. *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol.18, pp.247-252.
- Fung Y.C. (1977) *A first course in continuum mechanics*, Second Edition, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.
- Galetuse S. (1986) On the Highest Efficiency Windmill Design. *Journal of Solar Energy Engineering*, Vol.108, pp.41-48.
- Gandía F., Plágaro L. y Rodríguez A. (1992) Código para el diseño aerodinámico de perfiles para aeroturbina. Congreso Int. Métodos Numéricos en Ingeniería y Ciencias Aplicadas, *Numerical Methods in Engineering and Applied Sciences*, Part II, H. Alder, J.C. Heinrich, S. Lavanchy, E. Oñate y B. Suárez (Eds.), CIMNE, Barcelona, pp.1331-1340.
- Goldstein S. (1929) On the Vortex Theory of Screw Propellers. *Proceedings of the Royal Society of London*, Series A, Vol.123, pp.440-465.

- Gould J. y Fiddes S.P. (1992) Computational Methods for the Performance Prediction of HAWTs. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol.39, pp.61-72.
- Graben A. y Rosen A. (1987) Velocities Induced by Semi-Infinite Helical Vortex Filaments. *Journal of Aircraft*, Vol.24, No.5, pp.289-290.
- Högström U., Asimakopoulos D.N., Kambezidis H., Helmis C.G. y Smedman A. (1988) A Field Study of the Wake behind a 2MW Wind Turbine. *Atmospheric Environment*, Vol.22, No.4 pp.803-820.
- Hunt V.D. (1981) *Windpower: A Handbook of Wind Energy Conversion Systems*. Van Nostrand Reinhold Company, New York, N.Y.
- Kaplan W. (1974) *Cálculo Avanzado*, C.E.C.S.A., Méjico.
- Karimipannah M.T. y Olsson, E. (1993) Calculation of Three-Dimensional Boundary Layers on Rotor Blades Using Integrals Methods, *Journal of Turbomachinery*, Vol.115, Transactions of the ASME, pp.342-353.
- Katz J. y Plotkin A. (1991) *Low-Speed Aerodynamics. From Wing Theory to Panel Methods*. McGraw-Hill, Inc.
- Kermarec M., Decaix A.F., Renon P., Favier D. y Maresca, C. (1993) Numerical modelling of unsteady flows around airfoils by a coupled potential-boundary-layer method. *European Journal of Mechanics, B/Fluids*, Vol.12, No.5, pp.657-681.
- Kinnas S.A. y Hsin C.-Y. (1992) Boundary Element Method for the Analysis of the Unsteady Flow Around Extreme Propeller Geometries. *AIAA Journal*, Vol.30, No.3, pp.688-696.
- Kobayakawa M. y Onuma H. (1985) Propeller Aerodynamic Performance by Vortex-Lattice Method. *Journal of Aircraft*, Vol.22, No.8, pp.649-654.
- Koh S.G. y Wood D.H. (1991a) Formulation of a Vortex Wake Model for Horizontal-Axis Wind Turbines. *Wind Engineering*, Vol.15, No.4, pp.196-210.
- Koh S.G. y Wood D.H. (1991b) Implementation of a Vortex Wake Model for Horizontal-Axis Wind Turbines. *Wind Engineering*, Vol.15, No.5, pp.262-274.

- Kotb M.A. y Schetz J.A. (1985) Turbulent Flowfield Measurements Immediately Behind a Windmill Rotor in Uniform Flow, *Three-dimensional Flow Phenomena in Fluid Machinery*, FED Vol.32, ASME, editado por A. Hamed, J. Herring y L. Povinelli, pp.87-94.
- Le Gourières D. (1982) *Énergie éolienne: Théorie, conception et calcul pratique des installations*. 2<sup>ème</sup> édition, Eyrolles, Paris.
- Malvern L.E. (1969) *Introduction to the mechanics of a continuous medium*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.
- Maydew R.C. y Klimas P.C. (1981) Aerodynamic Performance of Vertical and Horizontal Axis Wind Turbines. *Journal of Energy*, Vol.5, No.3, pp.189-190.
- McCormick B.W. (1994) *Aerodynamics, Aeronautics and Flight Mechanics*. 2<sup>nd</sup> edition, John Wiley & Sons.
- Milborrow D.J. (1983) Wake and cluster research: past, present and future. *IEE Proceedings*, Vol.130, Pt.A, No.9, pp.566-573.
- Milewski W.M. (1997) *Three-Dimensional Viscous Flow Computations Using the Integral Boundary Layer Equations Simultaneously Coupled with a Low Order Panel Method*. PhD thesis, Department of Ocean Engineering, Massachusetts Institute of Technology.
- Miyake Y. y Fujita S. (1974) A laminar boundary layer on a rotating three-dimensional blade. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.65, part 3, pp.481-498.
- Morris P.J. (1981) The three-dimensional boundary layer on a rotating helical blade. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.112, pp.283-296.
- Mughal B. y Drela M. (1993) A Calculation Method for the Three-Dimensional Boundary-Layer Equations in Integral Form. *AIAA paper 93-0786*, Reno NV.
- Musial W.D. y Cromack D.E. (1988) Influence of Reynolds Number on Performance Modeling of Horizontal Axis Wind Rotors. *Journal of Solar Engineering*, Vol.110, pp.139-144.

- Pai S. (1956) *Viscous Flow Theory, I-Laminar Flow*, D. Van Nostrand Company, Princeton, N. J.
- Panton R.L. (1984) *Incompressible Flow*, John Wiley & Sons, New York, N.Y.
- Prado R.A. (1994) Determinación de cargas aerodinámicas sobre las palas de turbinas eólicas. *Mecánica Computacional* Vol.14, pp.449-458, AMCA, Santa Fe.
- Prado R.A. (1995) Reformulation of the momentum theory applied to wind turbines. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol.58, pp.277-292.
- Prado R.A., Idelsohn, S.R. y Storti, M.A. (1998) Modelización del flujo invíscido alrededor de la pala de un aerogenerador mediante el método de los paneles, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol.14, No.4, Barcelona, España, pp.439-459.
- Prado R.A., Storti M.A. e Idelsohn S.R. (2002) Numerical Simulation of the 3D Laminar Viscous Flow on a Horizontal-Axis Wind Turbine Blade. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, Vol. 16 (4), pp.283-295.
- Sanderson R.J. y Archer R.D. (1983) Optimum Propeller Wind Turbines. *Journal of Energy*, Vol.7, No.6, pp.695-701.
- Schlichting H. (1972) *Teoría de la capa límite*, Ediciones URMO, Bilbao, España.
- Sforza P.M., Sheering P., y Smorto M. (1981) Three-dimensional wakes of simulated wind turbines. *AIAA Journal*, 19(9), pp.1101–1107.
- Shiple D.E., Miller M.S., Robinson M.C., Luttgies M.W. y Simms D.A. (1994) Evidence that Aerodynamic Effects, including Stall, Dictate HAWT Structure Loads and Power Generation in Highly Transient Time Frames. NREL/TP-441-7080, National Renewable Energy Laboratory, Golden, Colorado.
- Simms D.A. y Butterfield C.P. (1994) Full-Scale Wind Turbine Rotor Aerodynamics Research. NREL/TP-441-7225, National Renewable Energy Laboratory, Golden, Colorado.

- Simões F.J. y Graham J.M.R. (1992) Application of a free vortex wake model to a horizontal axis wind turbine. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol.39, pp.129-138.
- Sørensen J.N. (1998) Status and Perspectives on CFD in Wind Energy. *Computational Fluid Dynamics'98*, Volume 2, edited by K.D. Papailiou, D. Tsahalis, J. Périaux and Knörzer, John Wiley and Sons, pp.442-449.
- Stroud A.H. y Secrest D. (1966) *Gaussian Quadrature Formulas*. Series in Automatic Computation. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Tan H.S. (1953) On Laminar Boundary Layer over a Rotating Blade, *Journal Aero. Sci.*, Vol.20, No.11, pp.780-781.
- Tangler J.L. (1982) Comparison of wind turbine performance prediction and measurement, *Journal of Solar Energy Engineering*, 104, pp.84-88.
- Taylor G.J. (1983) Wake and performance measurements on the Lawson-Tancred 17m horizontal axis windmill. *IEE Proceedings*, Vol.130, Pt.A, No.9, pp.604-612.
- Theodorsen Th. (1948) *Theory of propellers*, McGraw-Hill Book Company, Inc.
- Wang K.C. (1971) On the determination of the zones of influence and dependence for three-dimensional boundary-layer equations. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.48, part 2, pp.397-404.
- Wagner S., Guidati G. y Ostertag J. (1998) Numerical Simulation of the Aerodynamics and Acoustics of Horizontal Axis Wind Turbines. *Computational Fluid Dynamics'98*, Volume 2, edited by K.D. Papailiou, D. Tsahalis, J. Périaux and Knörzer, John Wiley and Sons, pp.436-441.
- White F.M. (2004) *Mecánica de Fluidos*, Quinta Edición, McGraw-Hill/Interamericana de España, S.A.U.
- White F.M. (1991) *Viscous Fluid Flow*, Second Edition, McGraw-Hill, Inc.
- Wie Y.-S. y Harris J.E. (1991) Numerical Solution of the Boundary-Layer Equations for a General Aviation Fuselage. *Journal of Aircraft*, Vol.28, No.12, pp.861-868.

- Williams J. (1985) Singularities in solutions of the three-dimensional laminar-boundary-layer equations. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.160, pp.257-279.
- Wilson R.E. (1986) Wind Turbine Flow Field Model. *Journal of Solar Energy Engineering*, Vol.108, pp. 344-345.
- Wood D.H. (1991) A three-dimensional analysis of stall-delay on a horizontal-axis wind turbine. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 37, pp.1-14.
- Wood D.H. (1993) On Wake Modelling at High Tip Speed Ratios. *Wind Engineering*, Vol.16, pp.291-303.
- Wood D.H. y Meyer C. (1991) Two Methods for Calculating the Velocities Induced by a Constant Diameter Far-Wake. *Journal of Aircraft*, Vol.28, No.8, pp.526-531.
- Wortman A. (1983) ) Optimum Performance of Propeller Wind Turbines Blades. *Journal of Energy*, Vol.7, No.1, pp.86-88.
- Zhang J. y Lakshminarayana B. (1990) Computation and Turbulence Modeling for Three-Dimensional Boundary Layers Including Turbomachinery Rotor Flows. *AIAA Journal*, Vol.28, No.11, pp.1861-1869.