

Métodos Computacionales en Capa Límite

by Mario Storti^a, Norberto Nigro^a, Lisandro Dalcín^a,
Rodrigo Paz^a, Jorge D'Elía^a, Ricardo Prado^b

^aCentro Internacional de Métodos Numéricos
en Ingeniería - CIMEC

INTEC, (CONICET-UNL), Santa Fe, Argentina

<{mstorti, nnigro, dalcinl, rodrigop, jdelia},
@intec.unl.edu.ar>

<http://www.cimec.org.ar/mstorti>

^bFacultad de Ingeniería. UN Comahue. <prado@uncoma.edu.ar>

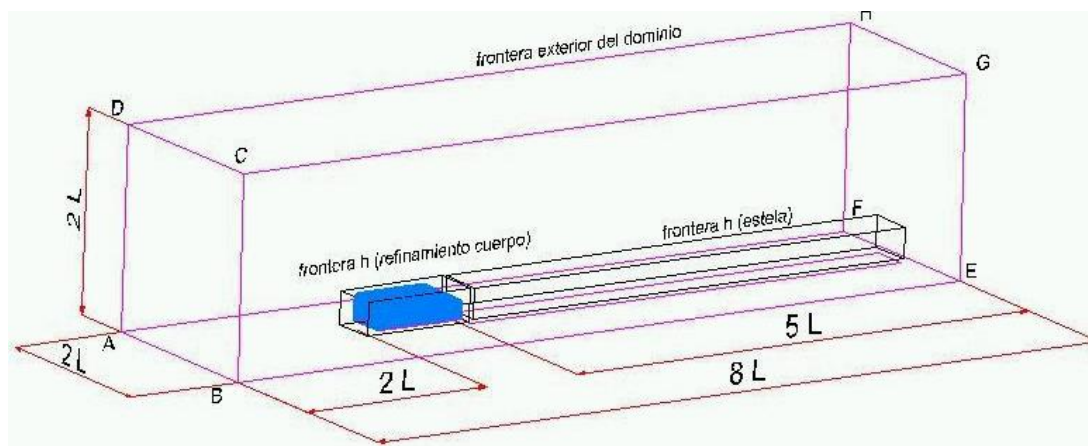
(document-version "blay-conf-0.0.1") (document-date "2005/09/02 02:52:42 UTC")

Que es la Mecánica Computacional?

- **Es la resolución de problemas de la Mecánica del Continuo mediante métodos computacionales.**
- **Es una nueva disciplina que combina Matemática, Física y Computación.**
- **El Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería (CIMEC, Santa Fe) viene desarrollando aplicaciones en Mecánica Computacional desde comienzos de los '80.**
- **Aplicaciones en ingeniería aeronáutica, nuclear, mecánica, ambiental, medicina, hidrología, siderurgia, ...**
- **Los siguientes ejemplos muestran casos típicos de análisis de problemas de ingeniería realizados en el CIMEC.**

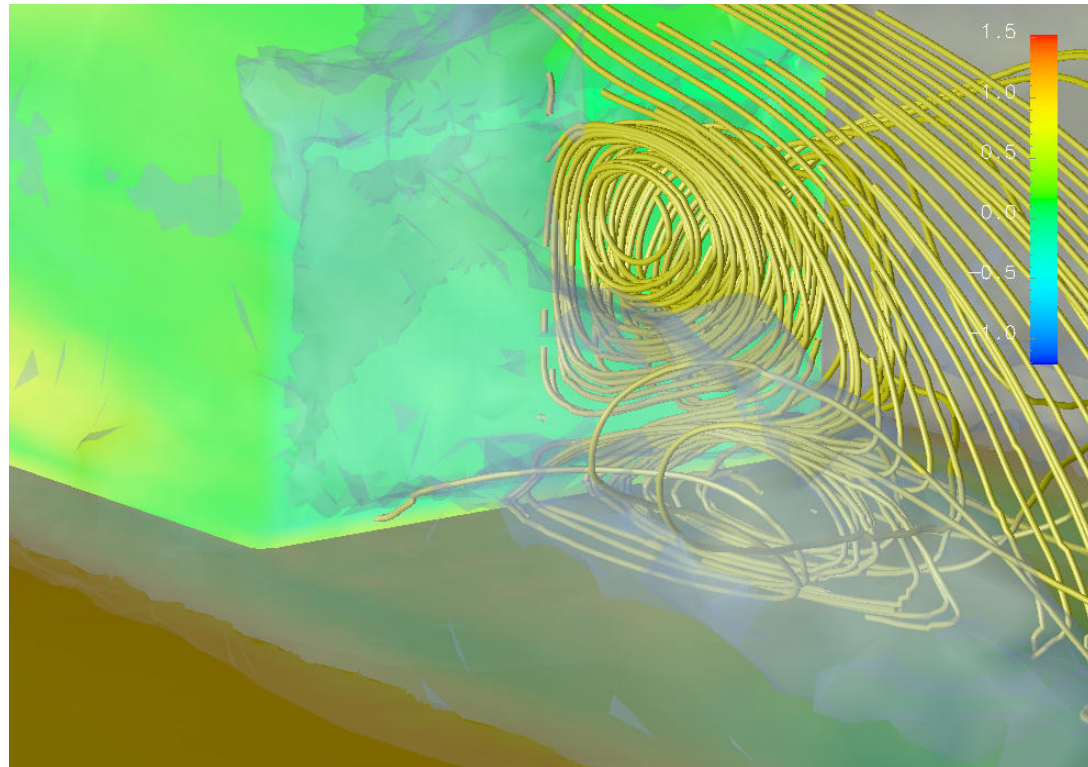
Aerodinámica exterior

- Resolver las ecuaciones de la dinámica de gases alrededor de un cuerpo.
Objetivo: Determinar fuerzas aerodinámicas como resistencia al avance y sustentación. En vehículos deportivos para obtener mayores velocidades y fuerza geotrópica. En vehículos de calle para disminuir el consumo de combustible.
- **Ecuaciones a resolver:** Ecuaciones de Navier-Stokes incompresible.
Campos involucrados: velocidad y presión.



Aerodinámica exterior (cont.)

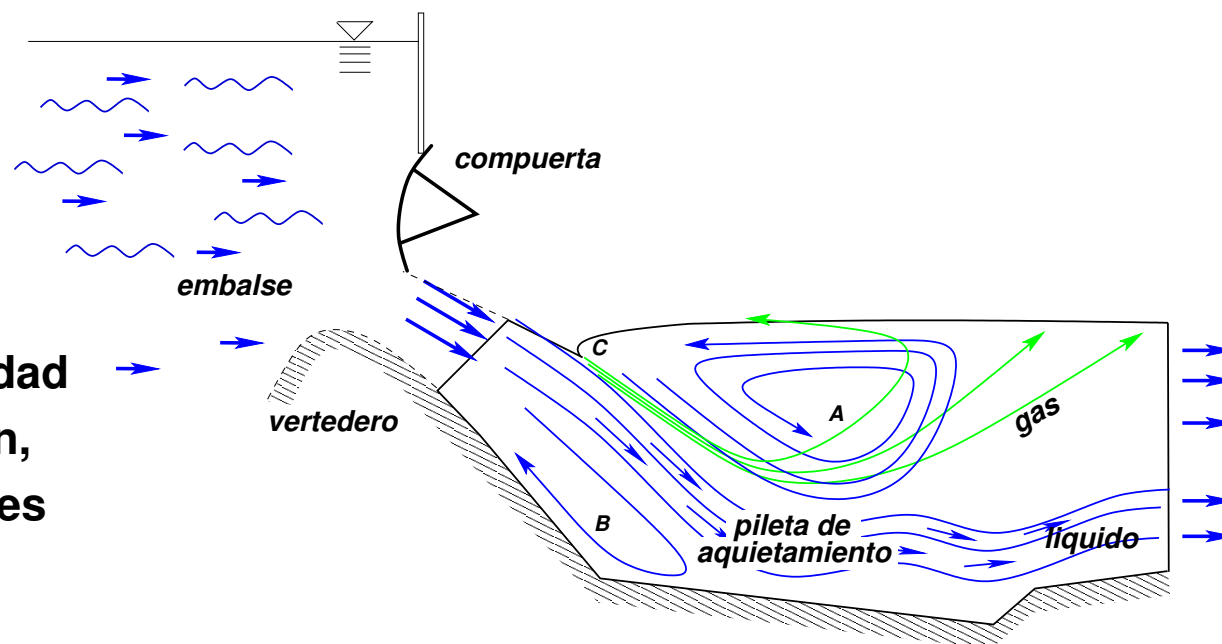
- La simulación numérica permite obtener todas las propiedades del flujo: campos de velocidad y presión, esfuerzos de corte, zonas de desprendimiento del flujo, ...
- Líneas de corriente en la parte trasera del vehículo.



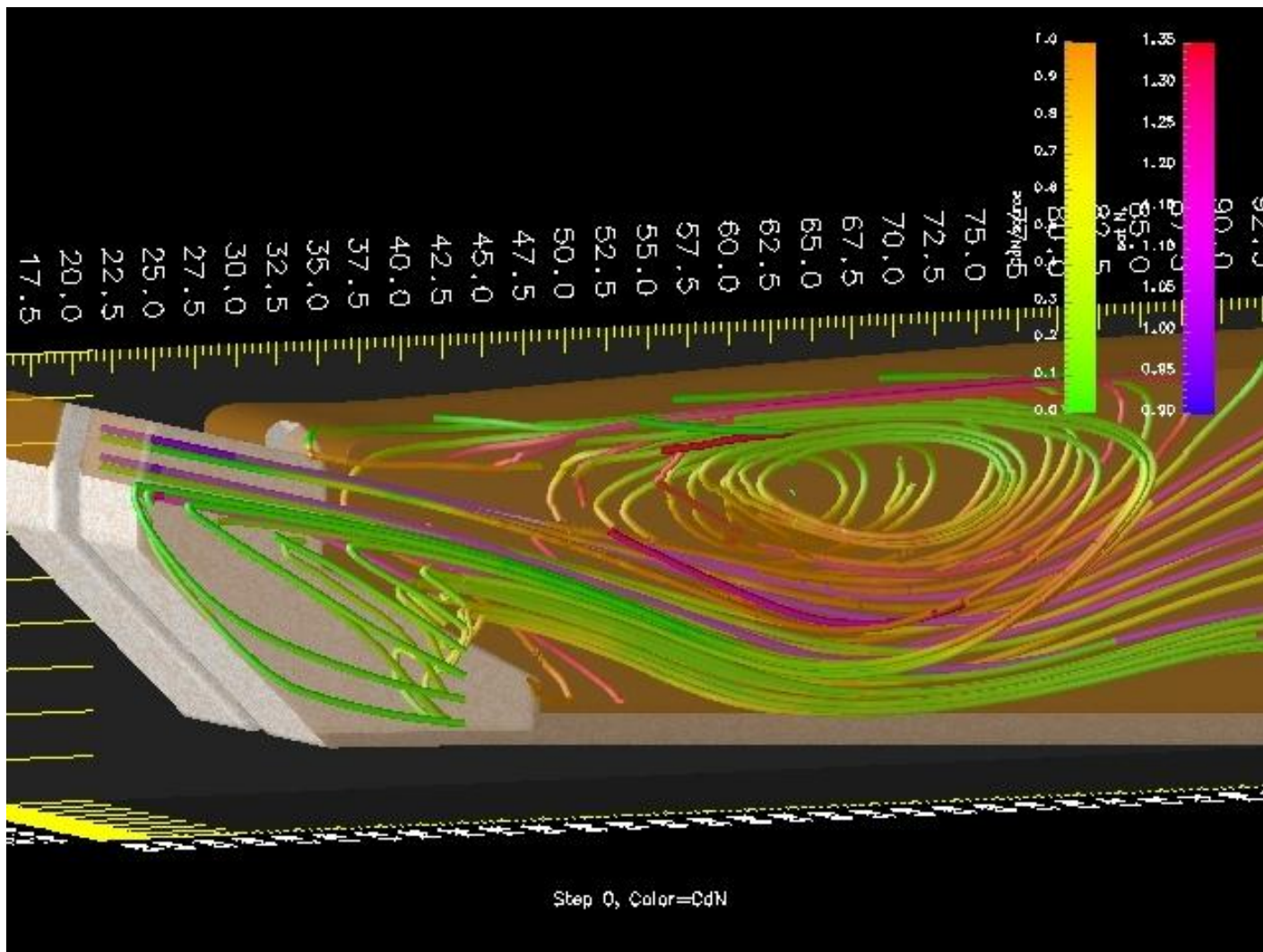
Estudio de impacto ambiental en Yacyreta.

- **Objetivo:** Calcular concentración de gases disueltos en la pileta de quietamiento (aguas abajo del vertedero). (Altas concentraciones de N₂ y O₂ disueltos puede producir embolia en especies ictícolas.)
- **Ecuaciones a resolver:** Ecuaciones de flujo bifásico para la mezcla líquido/aire.

- **Campos involucrados:** velocidad de líquido, velocidad de gas, presión, concentraciones de N₂ y O₂ en líquido y gas.

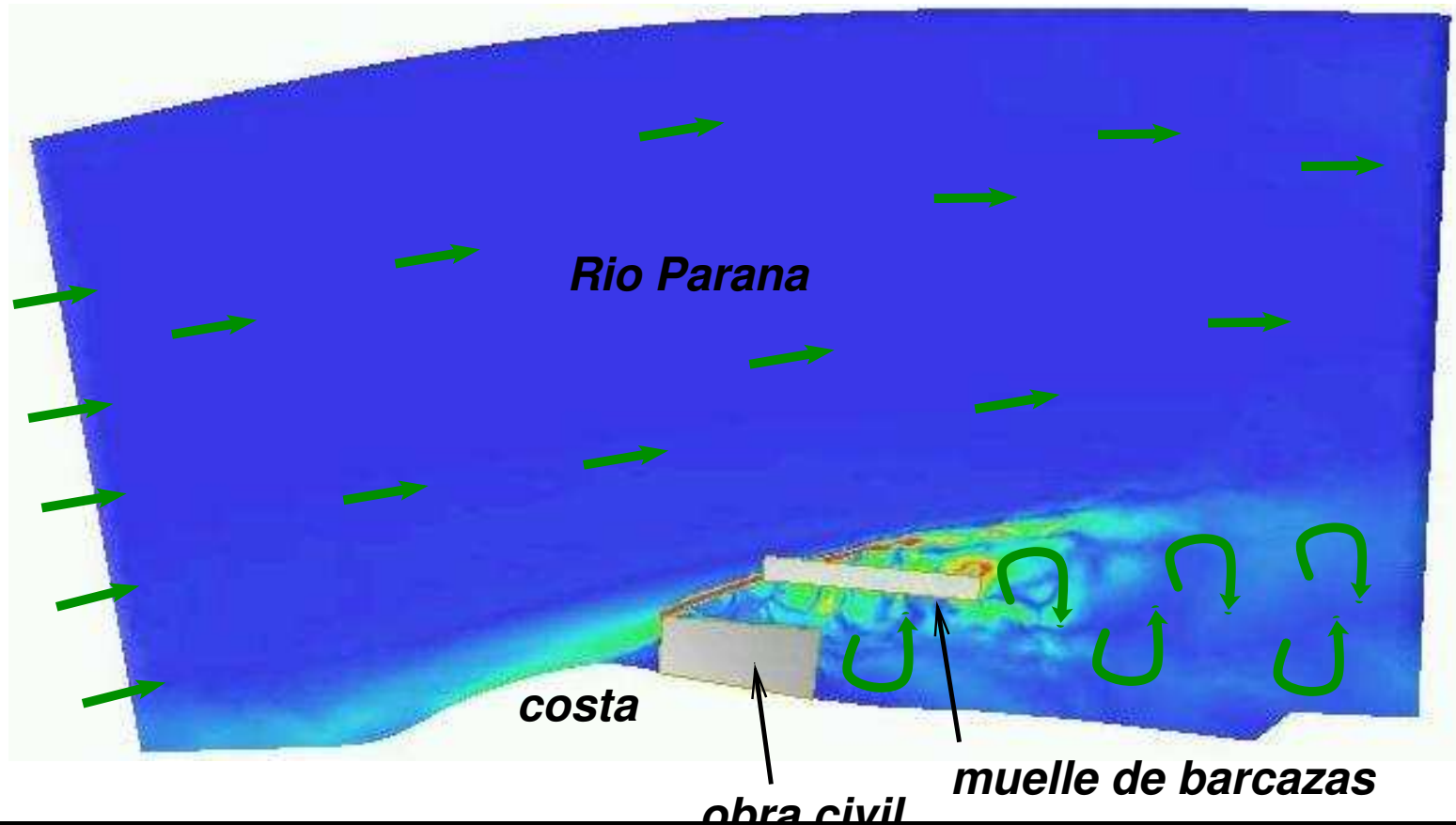


Estudio de impacto ambiental en Yacyreta. (cont.)



Impacto de obra civil sobre puerto de barcazas.

- **Objetivo:** Calcular intensidad de turbulencia cerca del muelle producida por construcción civil en la costa.
- **Ecuaciones a resolver:** Ecuaciones de Navier-Stokes 3D.



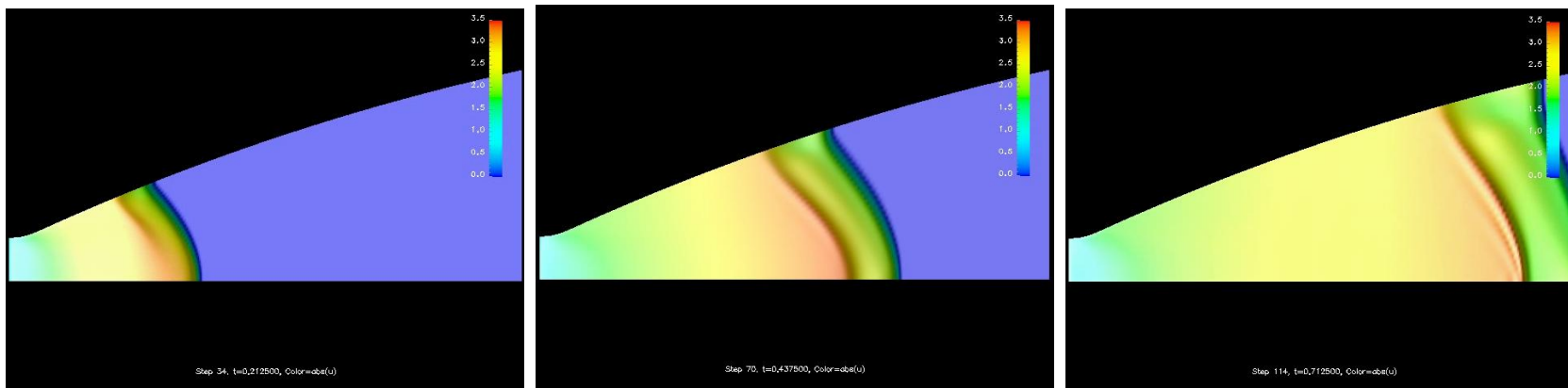
Llenado de la tobera divergente de expansión



Llenado de la tobera divergente de expansión (cont.)

Se modela la ignición de una tobera divergente de escape de un motor de cohete in atmósfera de baaja presión. El gas está inicialmente en reposo (143 Pa, 262 ° K). A $t = 0$ el motor se enciende y de la garganta de la tobera sale un gas a 6×10^5 Pa, 4170 ° K. Un *onda de choque* fuerte (intensidad $p_1/p_2 > 1000$) se propaga desde la garganta hasta la salida, llenando la tobera con un flujo a Mach mayor que 1. En el estado estacionario se encuentra un flujo supersonico que empieza desde Mach=1 en la garganta hasta Mach=4. El objetivo de la simulación es predecir las características del flujo estacionario y el tiempo de llenado.

Llenado de la tobera divergente de expansión (cont.)



Este cálculo se ha realizado por encargo de la ESTEC/ESA (European Space Research and Technology Centre-European Space Agency, Noordwijk, Holanda) a través de la empresa Open-Engineering (Liege, Belgium). The predicted mean velocity was 2621 m/s to be compared with the experimental value of 2650+/-50 m/sec.

Simulación numérica

- Resolver las ecuaciones que gobiernan el fluido (Ecuaciones de Navier-Stokes/Euler/Flujo Potencial).
- Dividir el dominio en pequeños “elementos”.
- Asumir variaciones simples de las variables dentro de cada elemento.
- Esto lleva a sistemas de ecuaciones lineales con tantas incógnitas como grados nodos por campos incógnita existen.
- No confundir simulación numérica con los (hoy muy comunes) efectos especiales usados en películas, etc...! Estos resultados se verifican con resultados obtenidos en mediciones experimentales.
- La simulación numérica es uno de las disciplinas relacionadas con la computación más antiguas. De hecho, uno de los principales usos de las primeras computadoras fue la simulación numérica en la industria de la aviación, nuclear, etc...

Ventajas de la simulación numérica

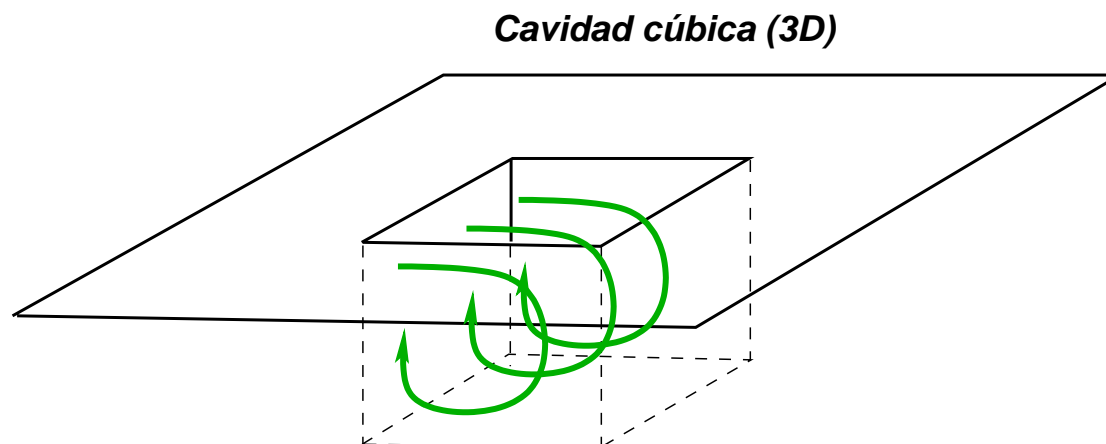
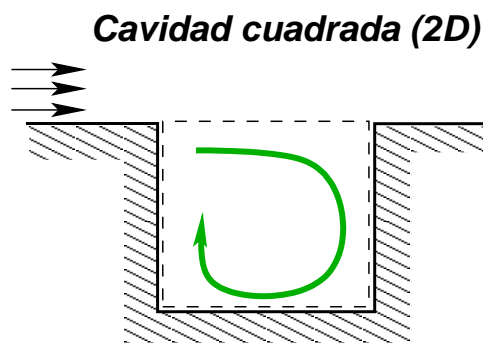
- El costo de las simulaciones numéricas es menor que las simulaciones experimentales y tiende a disminuir constantemente.
- Permite conocer el estado del fluido en todo punto del dominio.
- No hay problemas de escala o peligrosidad.
- Los mismos recursos (hardware y software) pueden ser usados para una variedad de problemas de ingeniería.

Desventajas

- El modelo matemático a resolver no es perfectamente conocido para ciertos problemas.
- El grado de refinamiento a veces no es suficiente para obtener una representación adecuada.

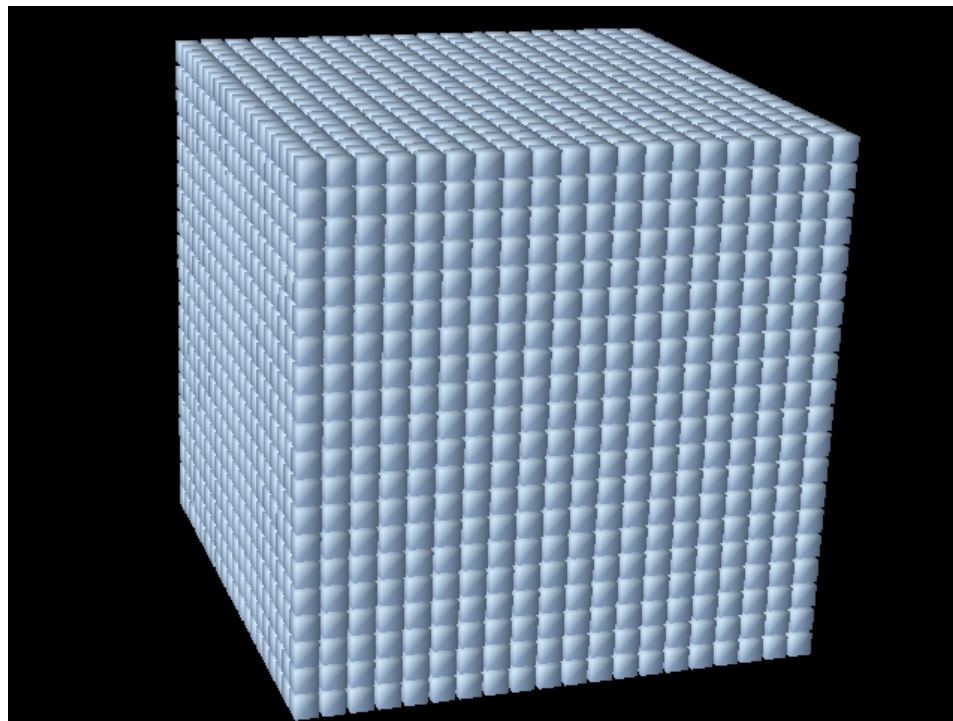
Recursos computacionales para CFD

- Consideremos un problema con una geometría muy simple, una cavidad cúbica en 3D.
- Es la versión 3D de un problema 2D muy conocido: la cavidad cuadrada.
- Existen muchos resultados experimentales y numéricos para comparar.



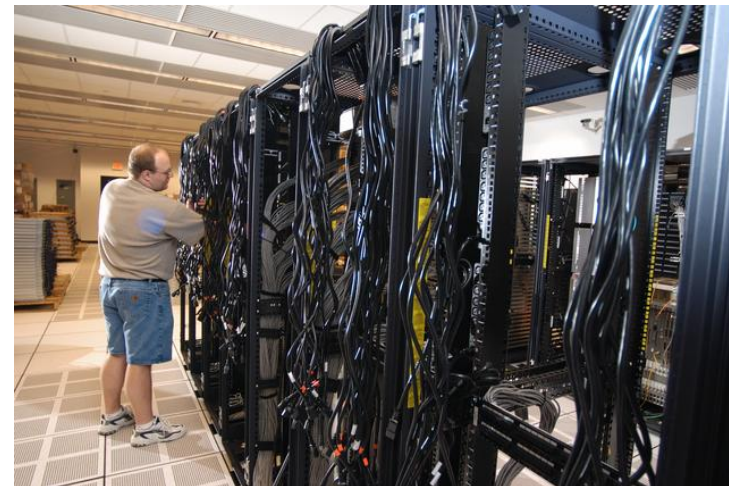
Costo computacional (tiempo de cálculo)

- **Dividimos el cubo en 100 intervalos por lado. Eso crea $100 \times 100 \times 100 = 10^6$ cubitos. (En la figura $20 \times 20 \times 20$).**
- **En cada cubito hay 4 incógnitas (3 componentes de velocidad y presión). En total 4×10^6 incógnitas.**
- **También hay que discretizar el tiempo: dividir el tiempo a simular en intervalos de tiempos (como los *frames* de una película). Digamos 1000 intervalos de tiempo.**
- **Por cada intervalo de tiempo hay que resolver sistemas de ecuaciones lineales de 4×10^6 de filas por 4×10^6 de columnas.**



Costo computacional (tiempo de cálculo) (cont.)

- Las simulaciones numéricas requieren *enormes* recursos computacionales.
- En la mayoría de los casos se realizan en supercomputadoras. Las simulaciones pueden tardar días o semanas en grandes supercomputadoras.
- En el CIMEC se cuenta con un cluster de PC's de 30 nodos, que se ampliará a la brevedad a 90. (P4 3GHz, 2GB RAM).
- Se ha desarrollado un programa de CFD por elementos finitos llamado PETSc-FEM basado en las librerías MPI/PETSc. <http://www.cimec.org.ar/petscfem>

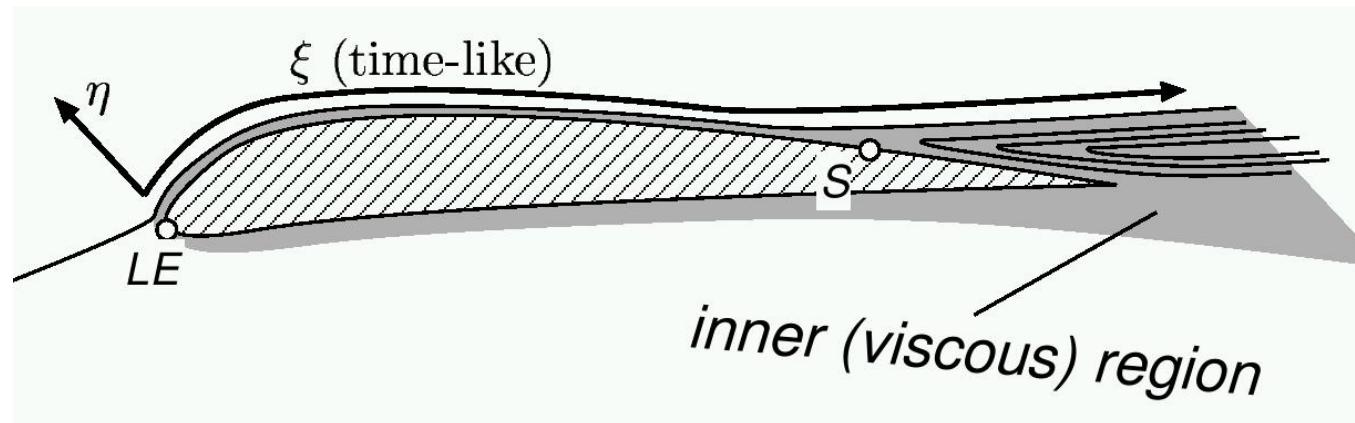


Capa límite y métodos numéricos

El “*Concepto de Capa Límite*” permite ahorrar esfuerzo computacional de dos formas.

- Reemplazando los modelos sofisticados como Navier-Stokes por modelos más simples basados en la resolución de un problema “*invíscido exterior*” con la resolución de un problema *parabolizado* interior (“*Ecuaciones de Capa Límite*”). Esto se llama en general: “*modelos de interacción viscosa/invíscida*”.
- En la resolución de las ecs. de Navier-Stokes en todo el dominio el concepto de capa límite permite usar criterios de refinamiento cerca del cuerpo. De esta forma se obtienen mejores aproximaciones al problema para el mismo costo computacional.

What are the boundary layer equations?



- For exterior high Reynolds number flows, the flow can be decomposed in an exterior *inviscid region* and an interior *viscous region*. A natural way to solve this is to solve the inviscid equations (potential, Euler) in the exterior region and *Parabolized Navier-Stokes Equations* in the inner region.
- Parabolized Navier-Stokes Equations amounts essentially to neglect diffusive terms in the longitudinal direction. This allows to solve the equations as if the longitudinal coordinate were time-like. Thus, computational resources (CPU-time, core memory) are highly reduced.

What are the boundary layer equations? (cont.)

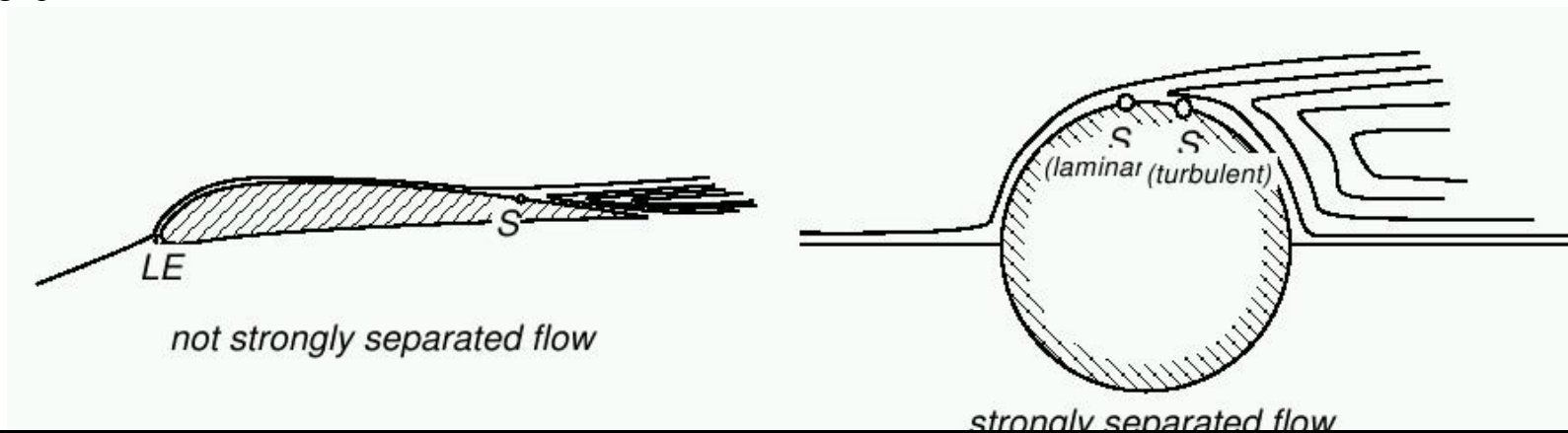
Boundary layer problems are the paradigm of *singular perturbation problems*. Other problems that can be solved with this formulation are:

- WKB theory for wave like problems (Helmholtz equations) in the limit of short wave-lengths (optical limit)
- Rounded leading edges

Typical inviscid/boundary layer calculation

- Compute the inviscid field with slip condition at the wall.
- Solve the boundary layer problem with the inviscid values at the wall as input data.
- Compute the displacement thickness.
- Solve again the inviscid problem with a geometry enlarged by the displacement thickness. This can be done by modifying the geometry or simulated by injecting fluxes at the wall.
- Repeat the process until convergence.

This process converges, unless very strong separation is present in the flow field.



Nowadays b.l. eqs. are solved mainly with..

- **Integral methods. (Non-convergent. Mainly in the aeronautical design).**
- **Finite differences.**
- **Finite elements (less used. See Schetz, Hytopoulos & M. Gunzburger FED-vol 123, Advances in Finite Element Analysis in Fluid Dynamics, ASME (1991))**
- **Spectral methods for high precision computations. Hydrodynamical stability of the boundary layer. (Pruett & Streett, Int. J Num Meth Fluids, vol 13, pp. 713-737 (1991))**

Contributions of CIMEC to V/I solutions

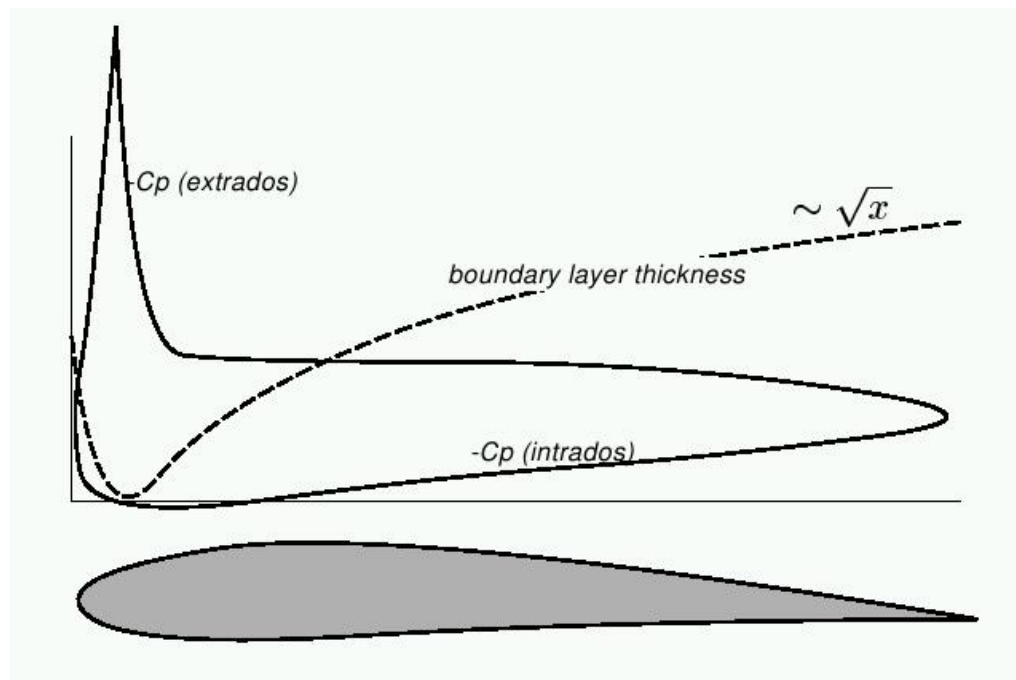
- Automatic scaling of the normal coordinate
- Spectral discretization in the normal coordinate and mesh-less discretization in the surface coordinates (3D).
- New mapping for the normal coordinate (avoids unnecessary refinement at the outer edge).
- Tensorial form of the b.l. eqs.

Automatic scaling of the normal coordinate

The incompressible laminar 2D boundary layer equations are:

$$\begin{aligned} uu_{,x} + vu_{,y} &= \nu u_{,yy} + U_{ext}U_{ext,x} \\ u_{,x} + v_{,y} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

The boundary layer thickness δ may greatly vary. It grows like \sqrt{x} for flat velocity profiles, and gets very thin for highly accelerated flows, like in the region near the suction peak of aero foils. For accuracy reasons it is highly desirable to keep the width of the computational domain (roughly) close to the b.l. thickness.



Automatic scaling of the normal coordinate (cont.)

Introducing an arbitrary normal scaling length δ_{scal} we get the transformed equations:

$$\begin{aligned} UU_{,\xi} + VU_{,\eta} &= \frac{\nu}{\delta_{scal}^2} U_{,\eta\eta} + U_{ext}U_{ext,\xi} \\ \frac{1}{\delta_{scal}} (\delta_{scal}U)_{,\xi} + V_{,\eta} &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Automatic scaling means to choose $\delta_{scal} = \delta^*$ and solving the resulting DAE system (Differential Algebraic Equations) appropriately.

Automatic scaling of the normal coordinate

If we have an *a priori* estimate to the b.l. thickness δ^* then we can use it for scaling purposes, for instance

$$\delta_{scal} \propto U_{ext}^{-1} \left(\int U_{ext}(x) dx \right)^{1/2} \quad \text{(Levy-Lees transf.)} \quad (3)$$

$$\delta_{scal} = \theta_{Thwaites} \propto \left(\frac{1}{U_{ext}^6} \int U_{ext}^5 dx \right)^{1/2}, \quad \text{(Thwaites method)} \quad (4)$$

These give correct behavior $\delta_{scal} \propto x^{1/2(1-m)}$ for wedge flows ($U_{ext} \propto x^m$).

However, large discrepancies exist in the location of the separation point.

Automatic scaling of the normal coordinate (cont.)

After semi-discretization in the normal coordinate (by spectral methods or whatever) we get a system of ODE's of the form

$$\mathbf{F}(\mathbf{a}, \delta_{scal}, \ddot{\mathbf{a}}, \ddot{\delta}_{scal}, x) = 0 \quad (5)$$

where \mathbf{a} is the vector of unknowns defining the b.l. profile.

$$u(x, \eta) = U_{ext}(x) \left(\sum_k a_k(x) \phi(\eta) \right) \quad (6)$$

Imposing exactly $\delta_{scal} = \delta^*$ amounts to a further linear restriction on the a_k 's.

$$U_{ext} \delta^* = \int_0^\infty (U_{ext} - u) dy. \quad (7)$$

$$1 = \int_0^\infty (1 - u/U_{ext}) d\eta. = \sum_{k=0}^M \beta_k a_k$$

Auto-scaling amounts to solve (5) together with restriction (7).

Automatic scaling of the normal coordinate (cont.)

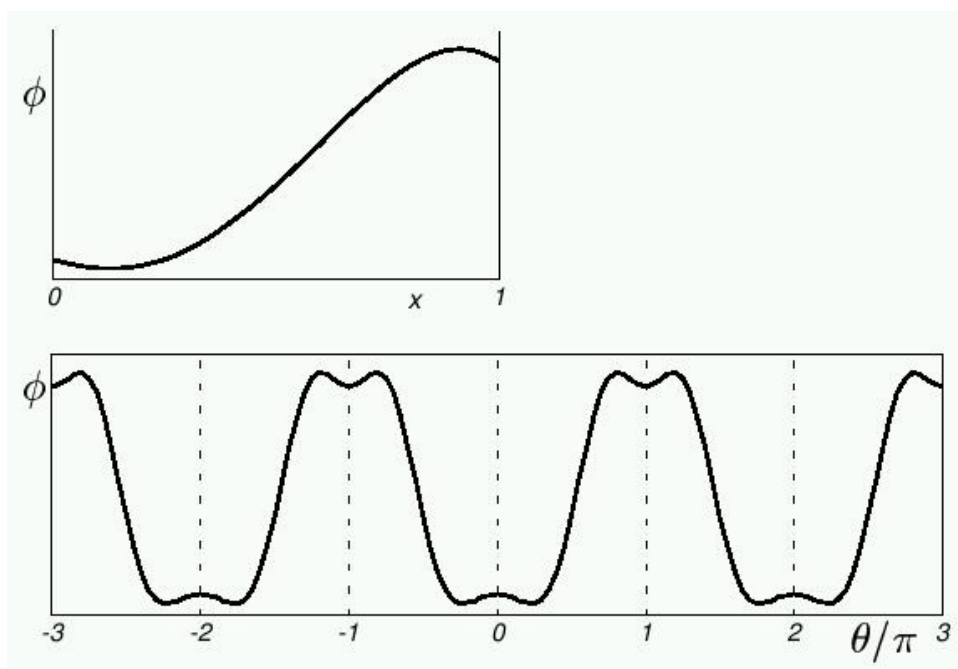
These represents a DAE's (Differential Algebraic Equations) system. Two possibilities arise

- Eliminate δ_{scal} and obtain a ODE's system.
- Use a special purpose package for DAE's like DASSL (Brenan), LIMEX (Nowak & Zugck).

Spectral discretization

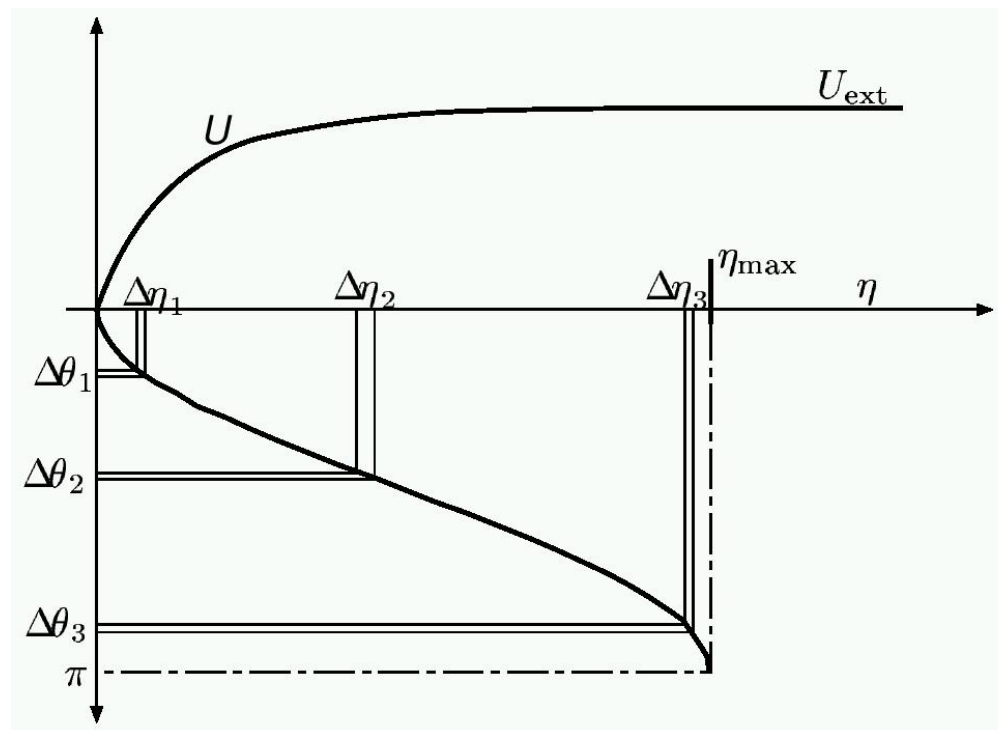
- Spectral methods are based on approximation by non-local functions, and (under certain conditions) give very high convergence rates (fast than any finite power of the number of unknowns). This is known as *spectral convergence*.

- The simplest example is Fourier series for problems with periodic conditions.
- For finite intervals (say $0 < x < 1$) one can transform the problem to a in periodic by mapping $x = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)$. This is equivalent to Tchebyshev polynomial expansion.



Spectral discretization (cont.)

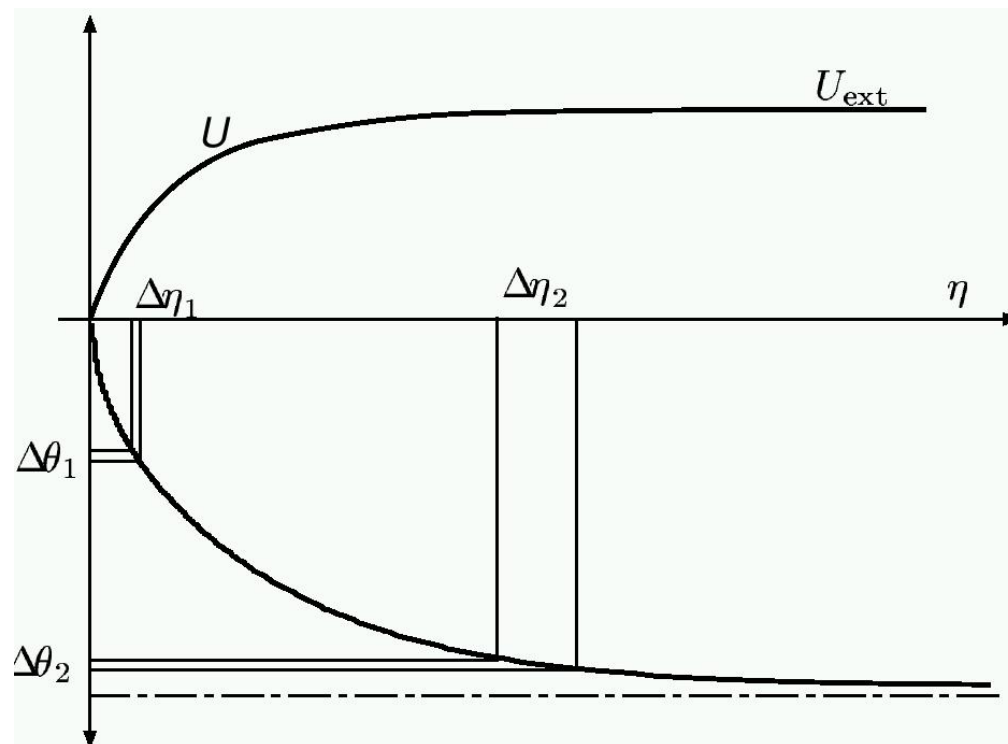
- For semi-infinite intervals (as is the case for the b.l. equations) it's usual to truncate the domain, say $0 < \eta < \eta_{max}$ and then apply the Tchebyshev expansion. This results in an undesired refinement near the outer boundary.



Spectral discretization (cont.)

- To correct this we propose the following mapping, which gives a uniformly decreasing resolution from the wall to the outer edge of the b.l.

$$\tanh\left(\frac{\eta}{\eta_{scal}}\right) = \left[\frac{1}{2}(1 - \cos\theta)\right]^2 \quad (8)$$

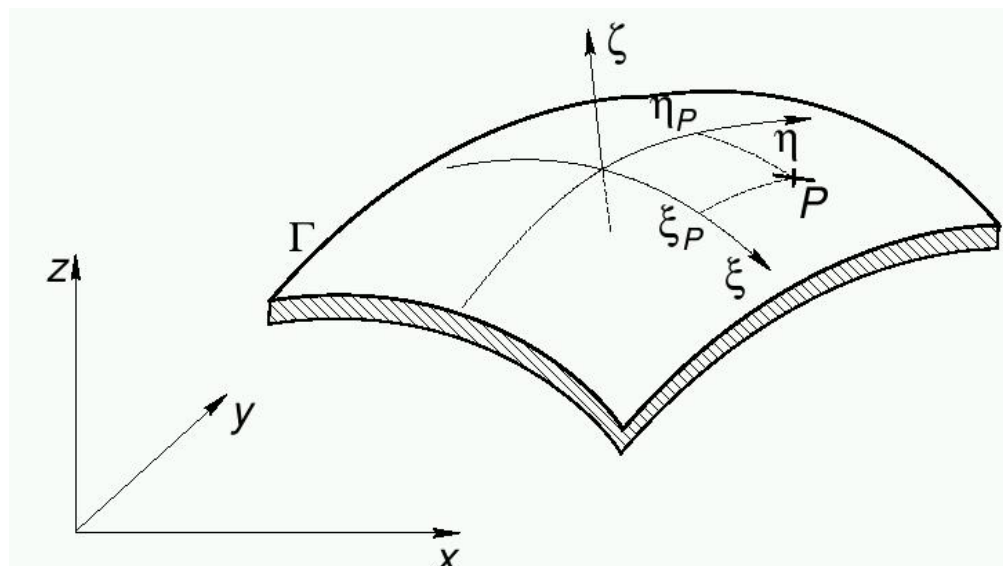


Tensorial form of the b.l. eqs.

It is obvious that some kind of *intrinsic curvilinear coordinates* $(\xi, \eta) = (x_1, x_2)$ are needed on the surface. Let $\zeta = x^3 = n/\delta(x_1, x_2)$ be the normal coordinate to it. Navier-Stokes equations in a general 3D curvilinear system are written in the following form:

$$u^i u^j_{,i} = \nu u^j_{,ii} + g^{ji} p_{,i} \quad (9)$$

$$u^i_{,i} = 0$$



Tensorial form of the b.l. eqs. (cont.)

- Upper (lower) subscripts denote “*contravariant*” (“*covariant*”) components of the vectors or tensors.
- $()_{,i}$ denotes the “*covariant derivative*”, where the 3-index term in braces is the Christoffel symbol:

$$u^i_{,j} = \frac{\partial u^i}{\partial x_j} + \left\{ \begin{matrix} i \\ j k \end{matrix} \right\} u^k \quad (10)$$

Tensorial form of the b.l. eqs. (cont.)

The following concepts arise in the context of tensorial calculus:

- *Christoffel symbols of second kind,*
- *Christoffel symbols of first kind,*
- *Contravariant metric tensor,*
- *Covariant metric tensor.*

Boundary layers in tensorial form

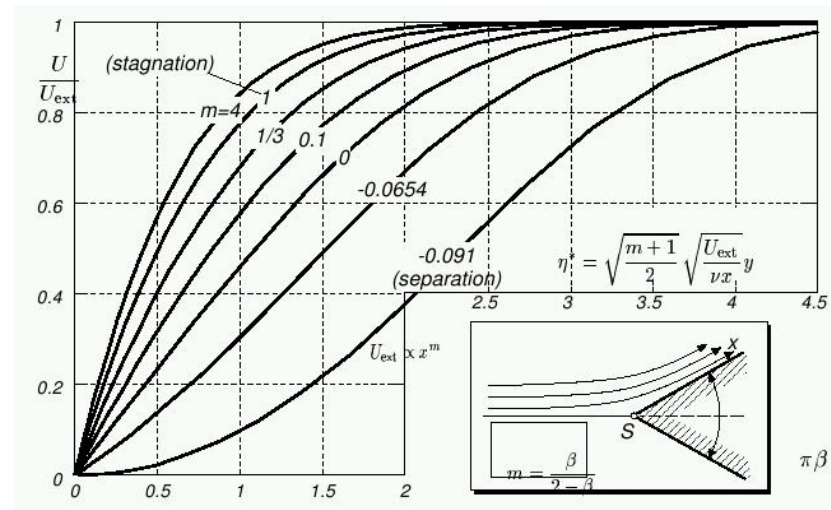
$$\begin{aligned} w \frac{\partial u^\beta}{\partial \zeta} + u^\alpha u^\beta_{,\alpha} + g^{\beta\alpha} \frac{\partial p}{\partial x^\alpha} &= \frac{\nu}{\delta_s^2} \frac{\partial^2 u^\beta}{\partial \zeta^2} \\ \frac{\partial w}{\partial \zeta} + \frac{1}{\delta_s a^{1/2}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\delta_s a^{1/2} u^\alpha) &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

This eqs. are invariant under change in intrinsic coordinates $(x^1, x^2) \rightarrow (w^1, w^2)$ and in transversal scaling: $\delta_s(x^1, x^2)$ is arbitrary.

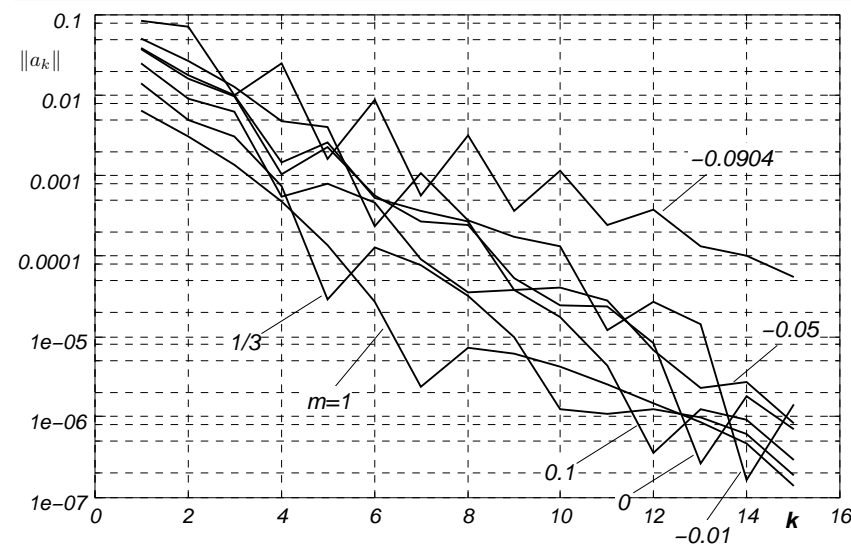
Advantages of writing the b.l. eqs. in tensorial form

- It's easier to detect errors.
- Conservative equations remain conservative:
- It's easier to change from one coordinate system to another.
- *Surface equations are essentially different to space equations: Space is Euclidean, surfaces are (in general) not.*
- Arbitrary scaling of the transverse coordinate is included.

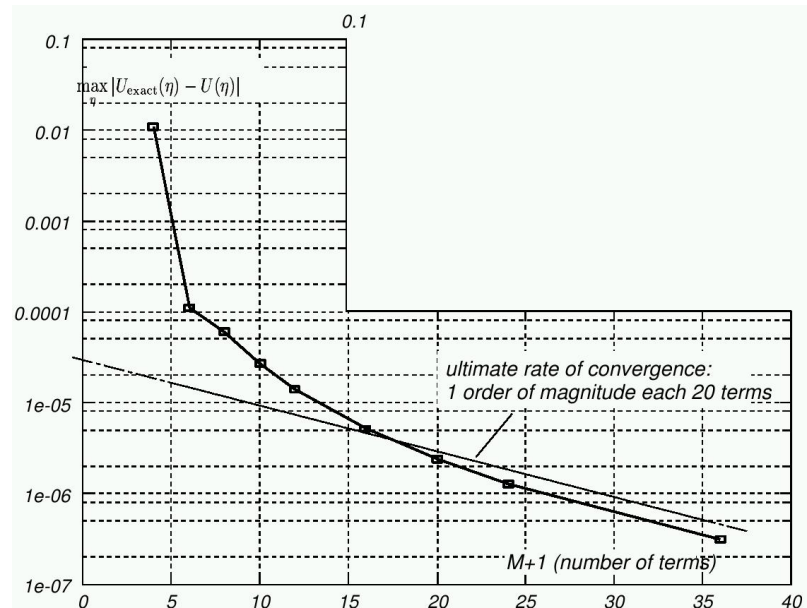
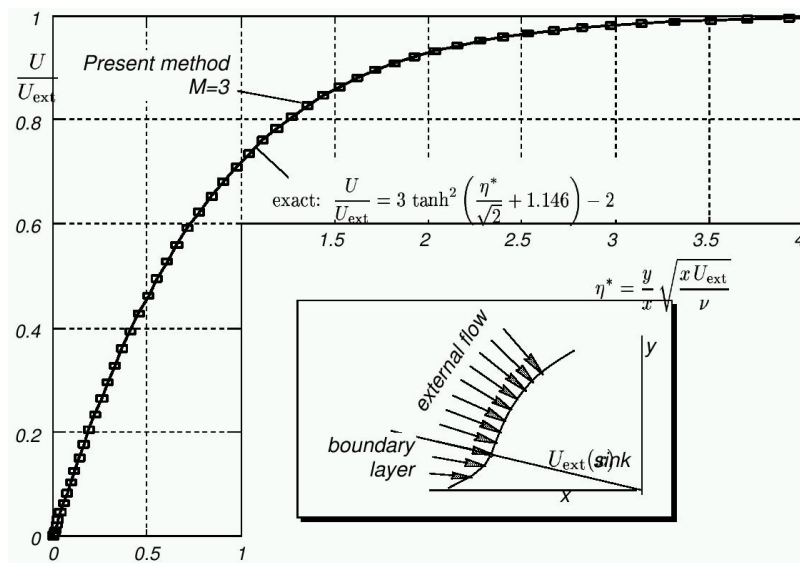
Numerical results. Wedge flow (Hartree profiles)



- Good convergence ($< 1\%$) is obtained even with 4 terms (equivalent to the von Kármán and Pohlhausen method).
- Spectral decay of the coefficients means "spectral convergence".



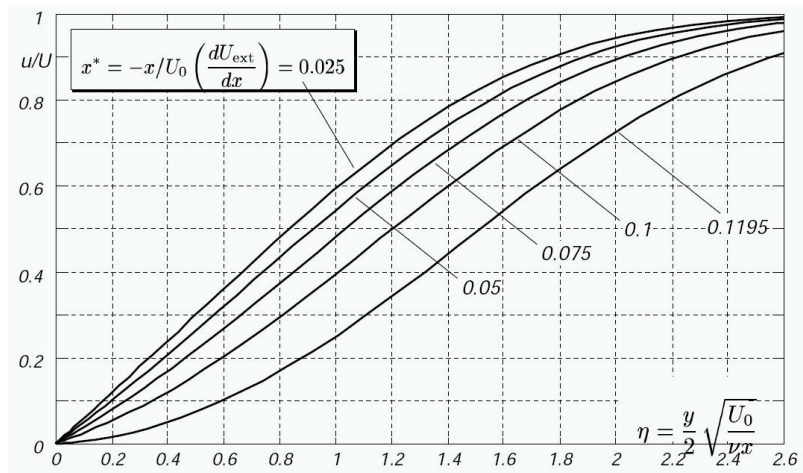
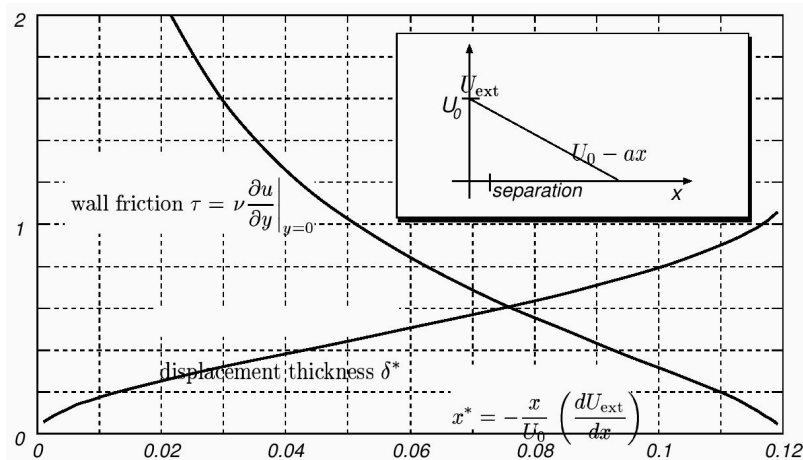
Numerical solutions. Convergent channel



- Flow in a convergent channel
 $U_{ext} \propto |x|^{-1}, (x < 0)$
- Wedge flows have an exact solution for $m = -1$

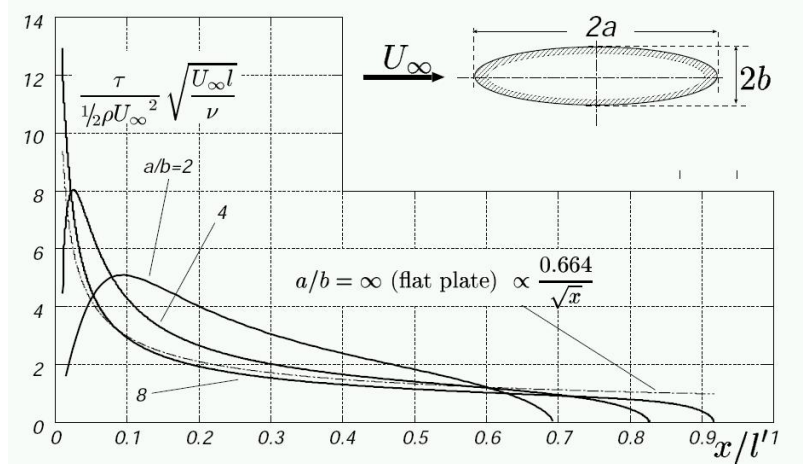
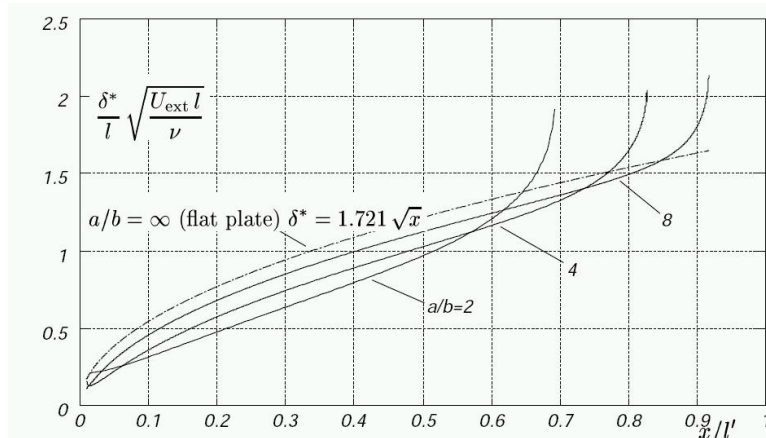
- The velocity profile obtained with 4 terms is compared here with the exact solution.
- Maximum error versus number of terms for the convergent channel flow ($U_{ext} \propto -|x|^{-1}, \text{ for } x < 0$).

Howarth decelerated flow



- This is also referred as **“linearly retarded flow”**. $U_{ext}(x) = U_0 - ax$
- Flow separates at $x^* = 0.01195$ which is in very good coincidence with both the value of $x^* = 0.0119863$ reported by Wippermann.
- Figures show displacement thickness and wall friction (left) and longitudinal velocity profiles (right) Howarth’s flow

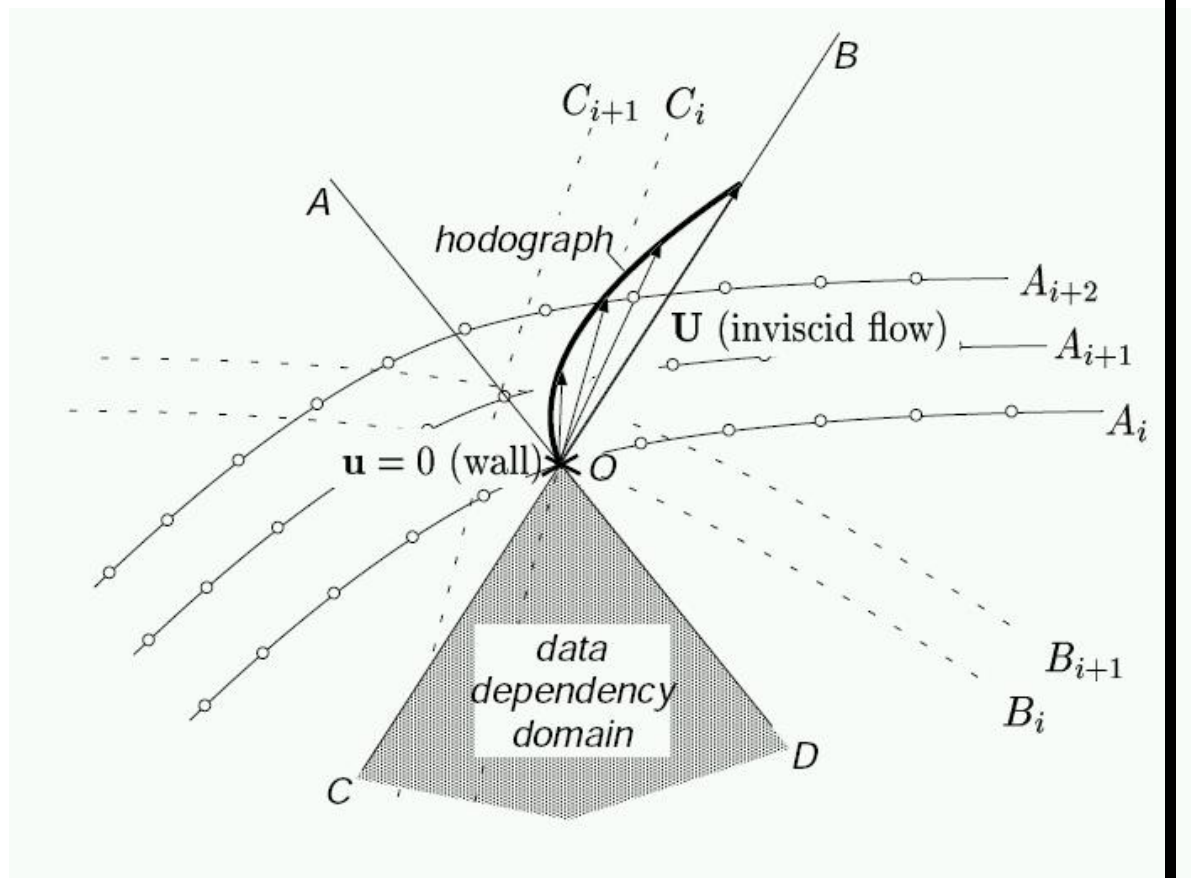
Ellipses



- Displacement thicknesses and wall friction are shown for several aspect ratios.
- The separation point moves to the trailing edge as the aspect ratio $a/b \rightarrow \infty$.
- Results converge to the flat plate for $a/b \rightarrow \infty$.
- Figures show displacement thickness for flow around ellipses of various slenderness (left) and wall friction or flow around ellipses of various slenderness (right).

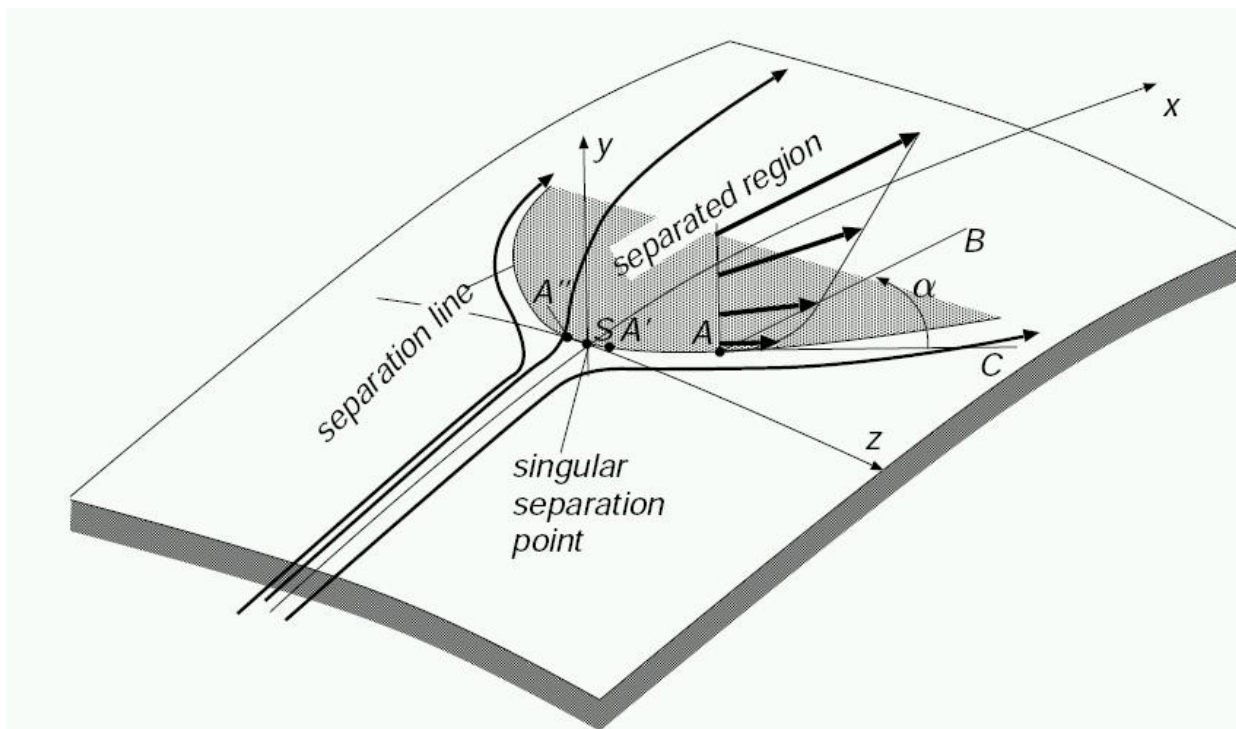
Mesh-less discretization of the 3D problem

- **Spectral discretization in the normal coordinate of the tensor form of the 3D equations gives a ODE system. The *data dependency domain* for a given point is (locally) the cone including the projection of the locus of vector velocities at the point.**



Mesh-less discretization of the 3D problem (cont.)

- If we advance the computation by layers, then arrangements $\{A_i\}$ and $\{B_i\}$ are admissible but the $\{C_i\}$ are not. The constraint becomes stronger as the aperture angle of the hodograph becomes wider.
- In the neighborhood of the separation point the cone becomes 180° wide and the advancing front has to reach the separation line perfectly tangential to it. Otherwise, instabilities occur.



Further developments

- Mesh less discretization in the surface.
- 3D results: cylinder, yawed cylinder, sphere, rotating sphere.
- Storti, M. “*A pseudo-spectral approach for the incompressible boundary layer equations with automatic normal scaling*”, presented at Fourth World Congress on Computational Mechanics, Buenos Aires, Argentina, Jun 29/Jul 2 1998.
- Slides: <http://www.cimec.org.ar/ojs/index.php/cimec-repo/article/view/452>
- Paper: <http://www.cimec.org.ar/ojs/index.php/cimec-repo/article/view/454>

Interacción flujo invíscido/capa límite

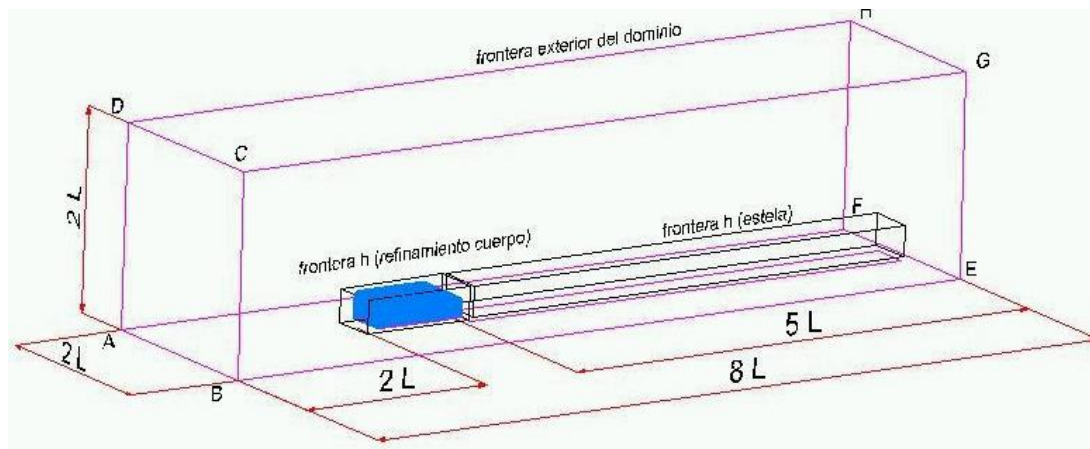
Estos resultados corresponden al trabajo del Ing. Ricardo Prado (U.N. Neuquén) dentro del doctorado de la Fac. Ing. UBA (Dirección Sergio Idelsohn, Mario Storti).

- **Objetivo: análisis fluidodinámico de la turbina eólica de eje horizontal.**
- **Palas de turbina tienen torsión (alabeo aerodinámico) y curvatura y rotan a velocidad angular constante.**
- **Flujo externo es resuelto por el método de paneles.**
- **Pala y estela son modelados por filamentos vorticosos.**
- **En la capa límite viscosa se resuelve las ecs. de Prandtl para la capa límite 3D por diferencias finitas.**
- **Condiciones estacionarias, sistema de coordenada no ortogonal.**

Boundary layer and mesh refinement

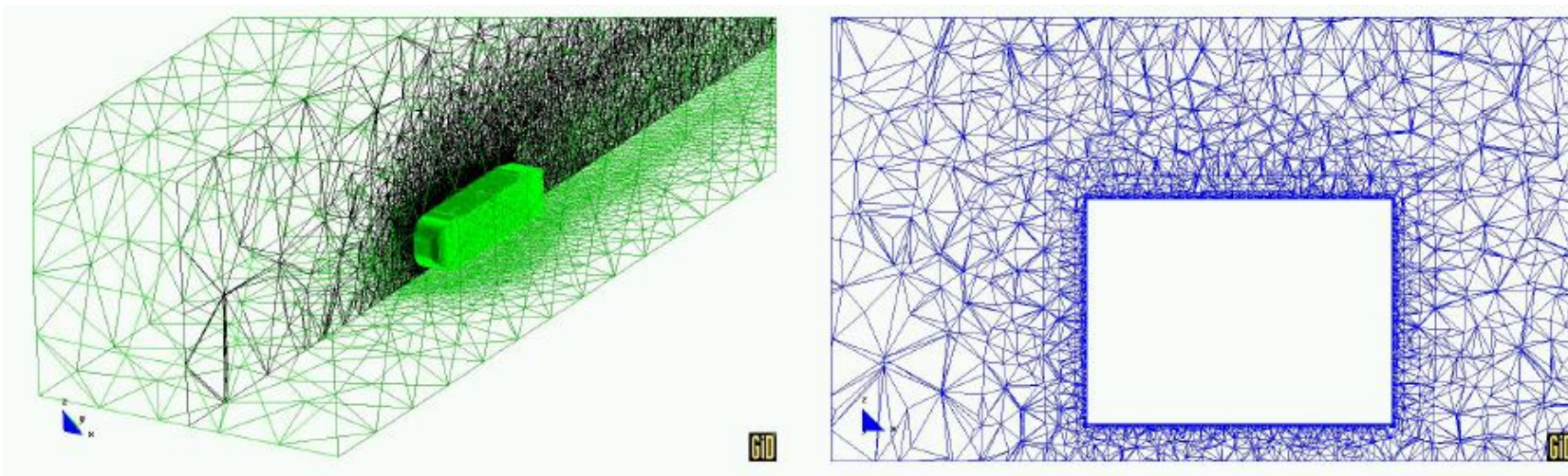
- Normalmente los gradientes de velocidad más intensos se producen en la capa límite. Esto llama a “refinar la malla” en esa región.
- No refinar apropiadamente puede producir una separación prematura de la capa límite con el consecuente error en la predicción de las fuerzas aerodinámicas (especialmente la fuerza de arrastre (drag)).

Fuerzas aerodinámicas sobre un vehículo



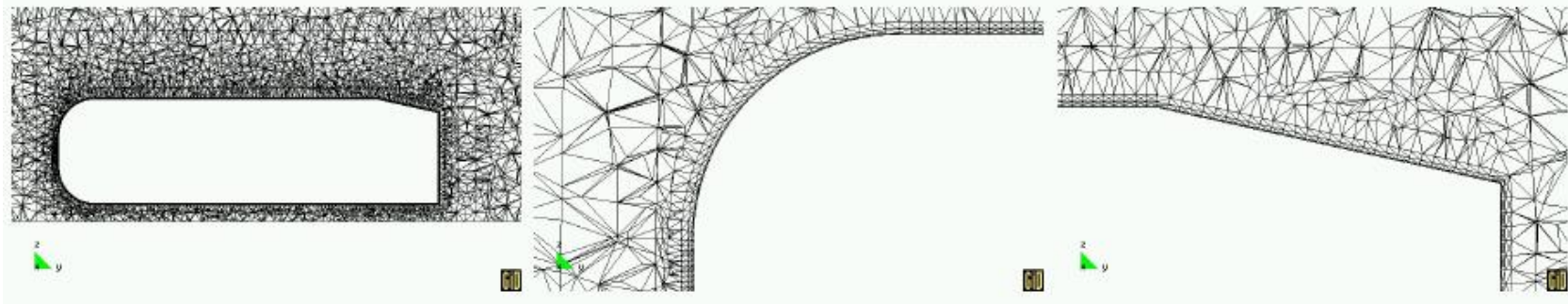
Fuerzas aerodinámicas sobre un vehículo (cont.)

- No refinando suficientemente en la capa límite se produce una separación prematura de la capa límite, con el consecuente incremento en el drag.



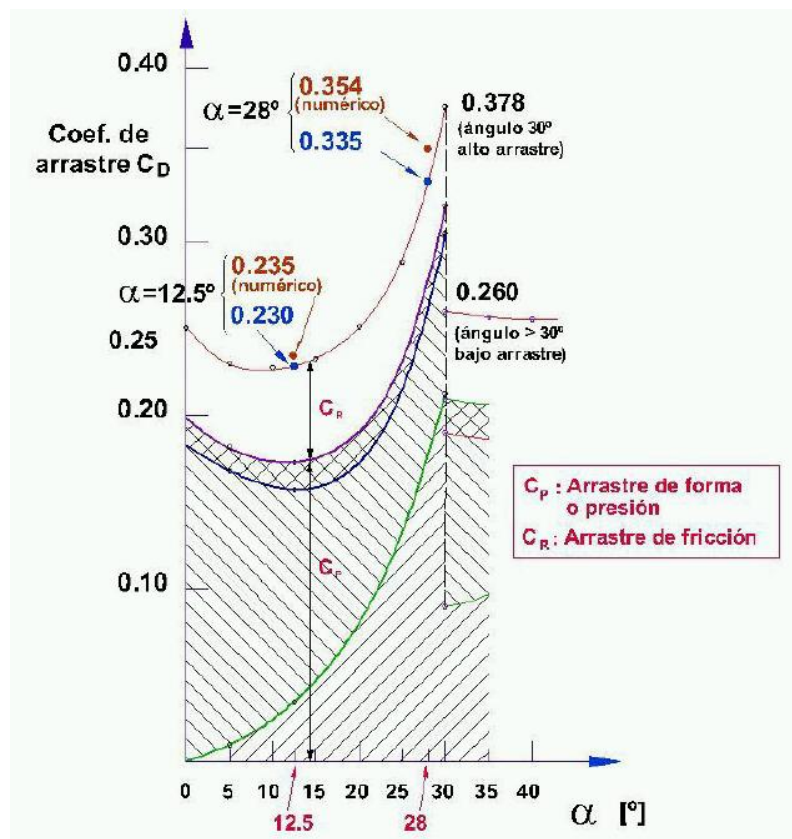
Fuerzas aerodinámicas sobre un vehículo (cont.)

- Para refinar correctamente en la capa límite se “*extrudan*” las caras triangulares de los elementos tetrahedricos que están en contacto con la piel del cuerpo, generando “*capas de elementos prismáticos*” (“*wedge elements*”).



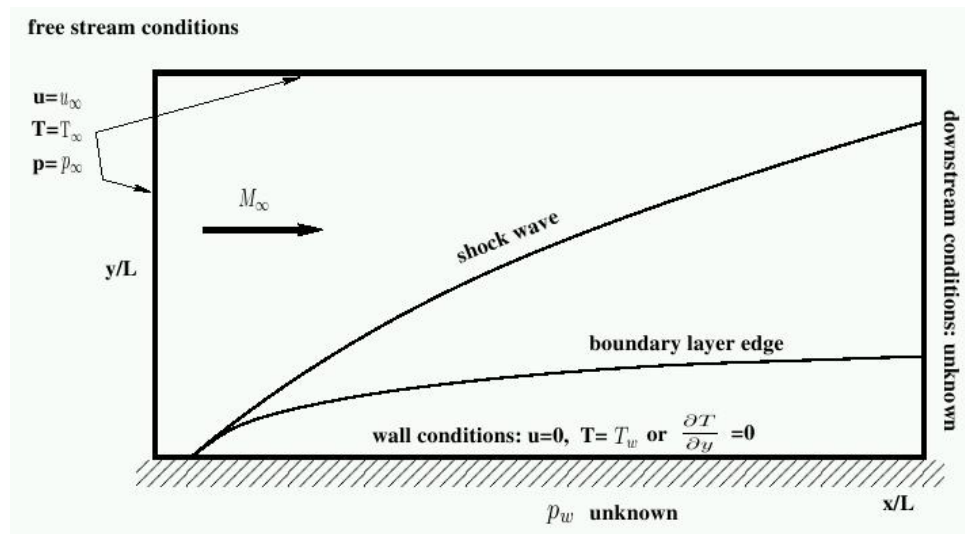
Fuerzas aerodinámicas sobre un vehículo (cont.)

- Se trata de predecir la crisis del drag en función del ángulo de slant.



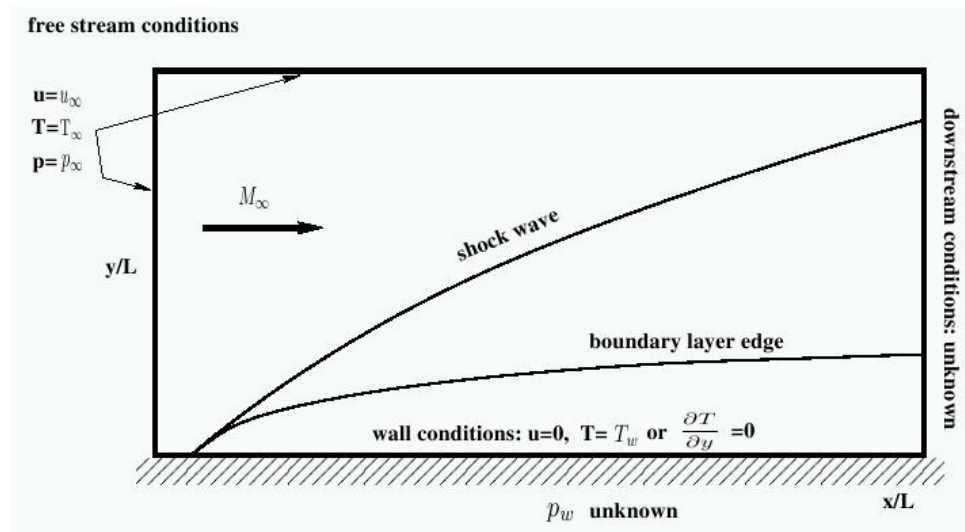
Efecto de la capa límite en flujo hipersónico

- En flujo compresible la capa límite produce a su vez una onda de choque.



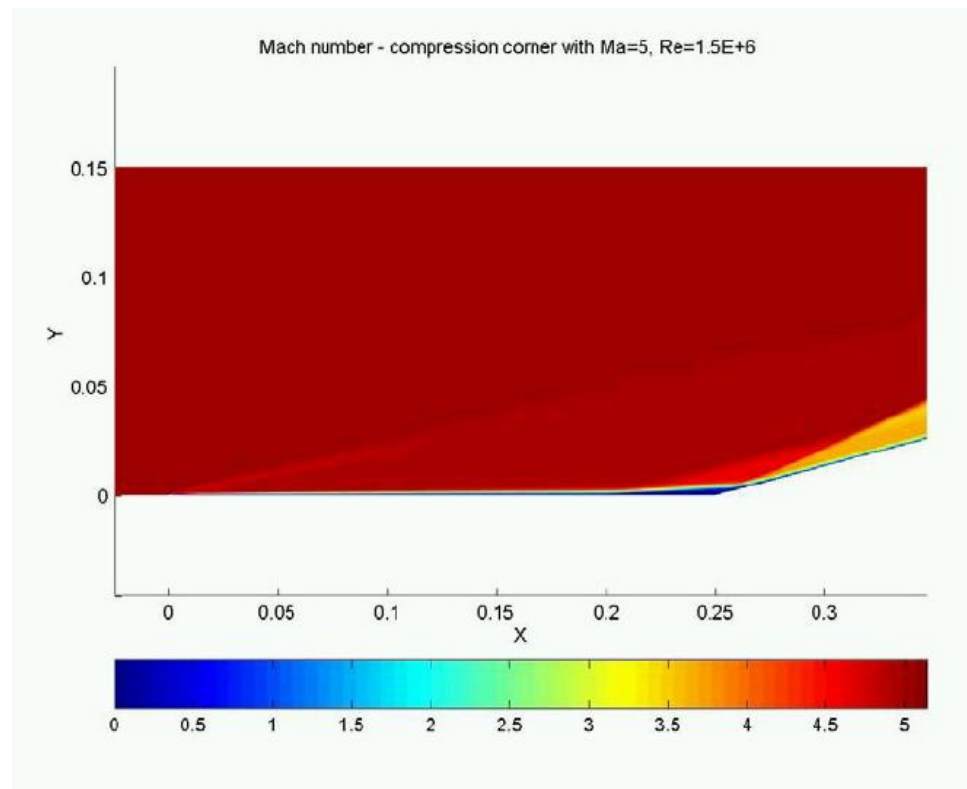
Efecto de la capa límite en flujo hipersónico

- En flujo compresible la capa límite produce a su vez una onda de choque.



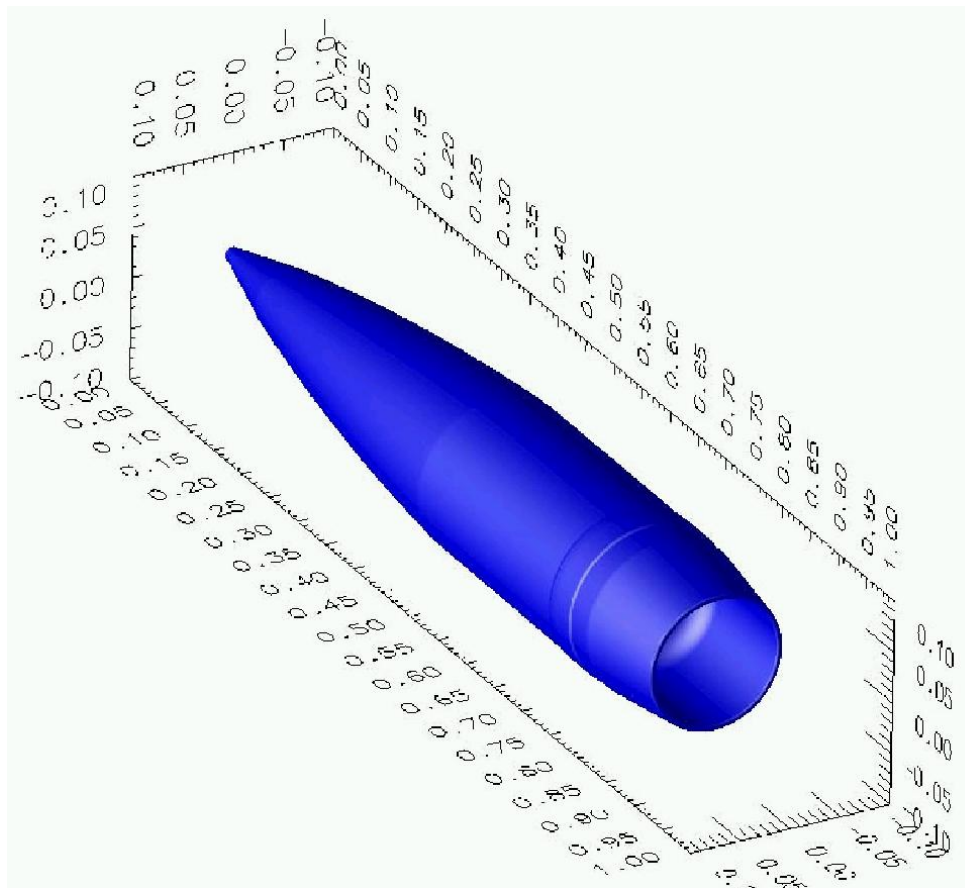
Efecto de la capa límite en flujo hipersónico (cont.)

- Problema de la rampa a Mach=5, $\alpha = 5^\circ$, Re=1.5e6. (ver artículo)
- Se torna muy dificultoso predecir los coeficientes de fricción y de calor (Nro. de Stanton) sobre la piel debido a lo delgado de la capa límite.
- $\Delta y \sim 4 \times 10^{-6}$ cerca de la piel (10^4 veces más pequeños que los elementos medios).
- Se generan elementos con relaciones de aspecto 1:1000 o más.
- Aparecen problemas para la resolución de ecuaciones.

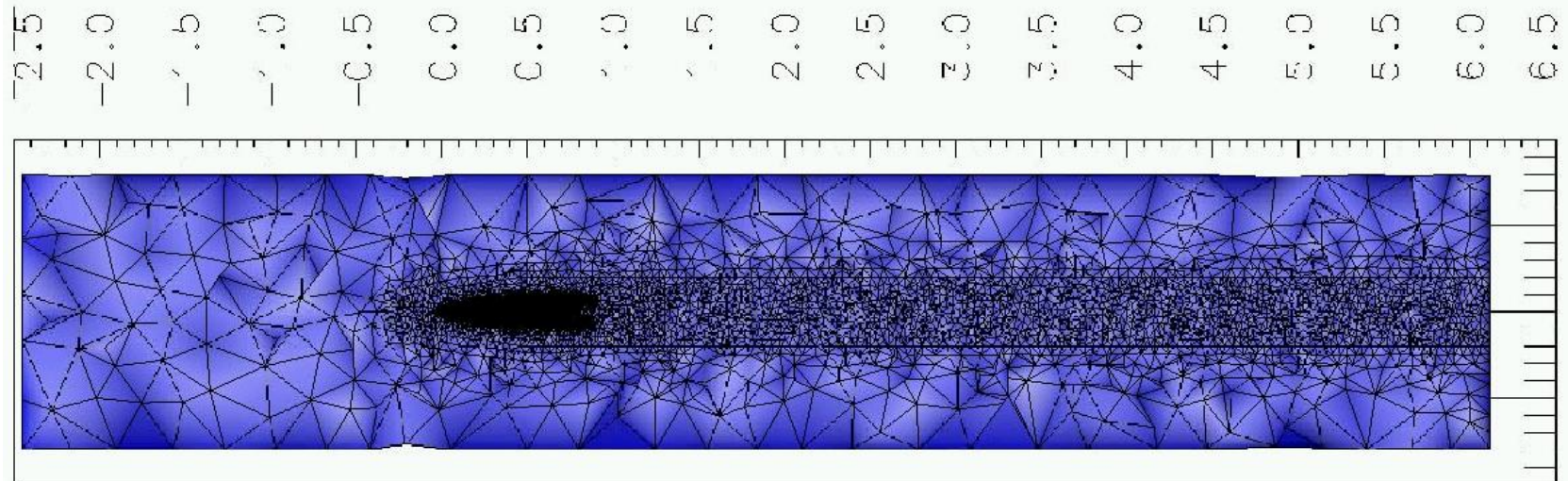


Capa límite en cuerpos con altas velocidades de rotación

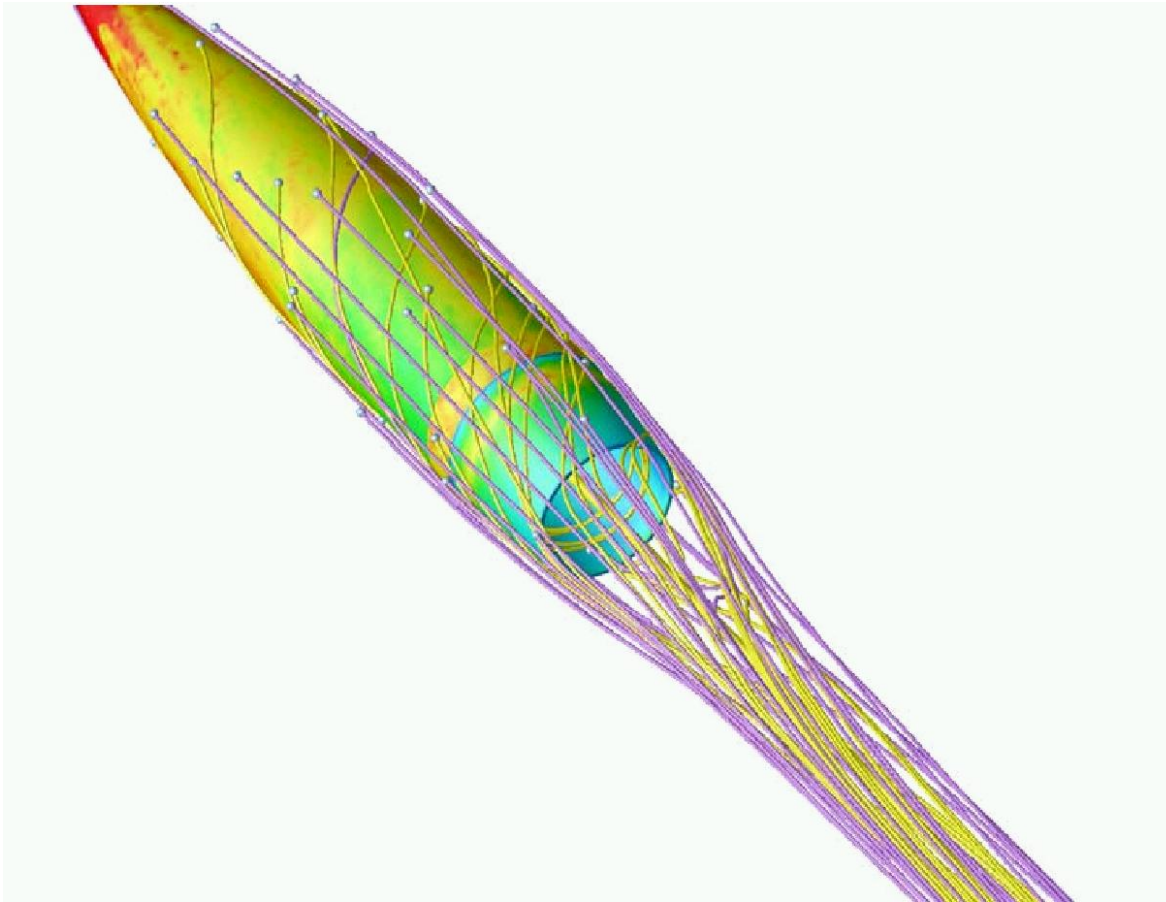
- **Proyectiles estabilizados por rotación $\Omega \sim 5000$ a 10000 RPM.**
- **Aplicación al cálculo de los coeficientes aerodinámicos del proyectil PACU, diseñado por CITEFA y actualmente en uso en el Ejército Argentino. (ver artículo completo)**



Capa límite en cuerpos con altas velocidades de rotación (cont.)



Capa límite en cuerpos con altas velocidades de rotación (cont.)



Acknowledgment

This work has received financial support from Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET, Argentina, grants PIP 0198/98, PIP 02552/00, PIP 5271/05), Universidad Nacional del Litoral (UNL, Argentina, grants CAI+D 2000/43) and Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (ANPCyT, Argentina, grants PICT 6973/99, PID-74/99, PICT Lambda 12-14573/2003, PME 209/2003).

We made extensive use of *Free Software* (<http://www.gnu.org>) as GNU/Linux OS, MPI, GNU-Guile, Python, PETSc, GCC compilers, Octave, Open-DX among many others.