

IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL DE UN SIMULADOR DE RESERVORIOS DE PETRÓLEO Y GAS POR EL MÉTODO DE LOS VOLÚMENES FINITOS

Ángel N. Menéndez^{*}, Matías H. Pomata^{*}, Jorge Valle, Alejandro Lacivita, Martín Kind[†]

Interfaces S.A. Viamonte 352, P° 11

C1053ABH, Buenos Aires (mpomata@interfaces.com.ar)

^{*} Consultor Independiente

[†] Actualmente en Tecpetrol

Palabras clave: Simulación numérica de reservorios, volúmenes finitos, modelo ‘black-oil’

Resumen *Se presenta la primera etapa de implementación de un modelo de simulación de reservorios composicional tridimensional. Dicha etapa corresponde al caso bidimensional de un simulador de petróleo tipo ‘black oil’. El modelo matemático planteado se basa en las ecuaciones de conservación de la masa para tres pseudo-componentes, teniendo en cuenta el carácter trifásico del sistema, incluyendo petróleo disuelto en gas y gas disuelto en petróleo. Como ecuación fenomenológica se utiliza la ley de Darcy. Las ecuaciones del modelo son discretizadas por el método de los volúmenes finitos (MVF). Se utilizan elementos triangulares trinodales. La formulación es centrada, pero se impone un esquema de aguas arriba (“upstream”) para el tratamiento de las movi­lidades de fase. La discretización temporal se hace con un método de diferencias finitas implícito. Se efectúa su progresiva validación comparando con soluciones analíticas, a través de ensayos simples encadenados en una jerarquía que permite la verificación discriminada de cada uno de los mecanismos intervinientes en el balance de masa.*

1 INTRODUCCIÓN

Las operaciones de recuperación de petróleo y gas están condicionadas por una serie de fenómenos complejos que se manifiestan dentro del reservorio. Para la explotación del reservorio es usual recurrir a la utilización de herramientas de modelación numérica. Estas herramientas de simulación ayudan a integrar diversos factores del reservorio y, de esa manera, generar resultados que posibiliten la toma de decisiones inteligentes^{1,2}.

La simulación de reservorios ha estado en constante crecimiento durante los últimos 30 años. Actualmente, gracias a la velocidad de procesamiento de las computadoras, los simuladores se han instalado como una herramienta indispensable para comprender la dinámica de los fluidos en el reservorio y ayudar en la predicción del futuro desempeño. En particular, le permite al ingeniero de reservorios probar distintas alternativas para optimizar la producción del mismo.

En este trabajo se presenta la primera etapa de implementación de un modelo de simulación de reservorios composicional tridimensional. Dicha etapa corresponde al caso bidimensional de un simulador de petróleo tipo 'black oil'. Se describe brevemente la formulación del modelo, y se muestra su progresiva validación.

2 MODELO MATEMÁTICO

2.1 Ecuaciones de conservación

Se considerarán NI componentes (ó especies químicas), distribuidas en tres fases: petróleo (para la que se utilizará el subíndice 'o'), gas ('g') y agua ('w').

Si C_{if} es la fracción de masa de la componente i -ésima en la fase f ($f = o, g$ ó w) [-], las ecuaciones de conservación de la masa por componente ($1 \leq i \leq NI$) son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 H \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(C_{io} \rho_o S_o + C_{ig} \rho_g S_g + C_{iw} \rho_w S_w \right) \right] = \\
 \nabla \cdot \left[\frac{HC_{io} \rho_o k_{ro}}{\mu_o} \bar{\mathbf{K}} \cdot (\nabla p_o - \rho_o g \nabla D) + \frac{HC_{ig} \rho_g k_{rg}}{\mu_g} \bar{\mathbf{K}} \cdot (\nabla p_g - \rho_g g \nabla D) \right. \\
 \left. + \frac{HC_{iw} \rho_w k_{rw}}{\mu_w} \bar{\mathbf{K}} \cdot (\nabla p_w - \rho_w g \nabla D) \right] + Hq_i
 \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

donde

t : coordenada temporal [seg]

x, y : coordenadas espaciales horizontales [m]

g : aceleración de la gravedad [m/s^2]

$\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$: operador gradiente [1/m]

$H(x, y)$: espesor (vertical) del yacimiento [m]

$D(x, y)$: profundidad del yacimiento [m]

p_f : presión de la fase f [N/m^2]

$S_f(x, y)$: saturación de la fase f [-]

$\phi(x, y)$: porosidad de la roca [-]

$\rho_f(x, y)$: densidad de masa de la fase f [kg/m^3]

$\mu_f(x, y)$: viscosidad de la fase f [$kg/(m.s)$]

$k_{rf}(x, y)$: permeabilidad relativa de la fase f [-]

$\bar{K}(x, y)$: tensor de permeabilidad [m^2]

$q_i(x, y)$: inyección local de masa de componente i por unidad de volumen [$kg/(m^3.s)$]

La ecuación (2.1.1) expresa, simplemente, que el aumento de la masa de componente i contenida en un volumen de control elemental (primer miembro) es igual al flujo de masa neto de esa componente a través de los bordes de ese volumen de control (primeros tres términos del segundo miembro) más la inyección externa de masa de esa componente (último término del segundo miembro).

Usando las definiciones de movilidad de cada fase, compresibilidad y presión capilar, la ecuación (2.1.1) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} & \phi \left(C_{io}\rho_o \frac{\partial S_o}{\partial t} + C_{ig}\rho_g \frac{\partial S_g}{\partial t} + C_{iw}\rho_w \frac{\partial S_w}{\partial t} \right) + \phi \left(\rho_o S_o \frac{\partial C_{io}}{\partial t} + \rho_g S_g \frac{\partial C_{ig}}{\partial t} + \rho_w S_w \frac{\partial C_{iw}}{\partial t} \right) \\ & + \phi \left[c_r \left(C_{io}\rho_o S_o + C_{ig}\rho_g S_g + C_{iw}\rho_w S_w \right) + \left(C_{io}S_o\rho_o c_o + C_{ig}S_g\rho_g c_g + C_{iw}S_w\rho_w c_w \right) \right] \frac{\partial p_o}{\partial t} \quad (2.1.2) \\ & = q_i + \frac{1}{H} \nabla \cdot \left[HC_{io}\rho_o \lambda_o \bar{K} \cdot (\nabla p_o - \rho_o g \nabla D) + HC_{ig}\rho_g \lambda_g \bar{K} \cdot (\nabla p_o + \nabla p_{cgo} - \rho_g g \nabla D) \right. \\ & \quad \left. + HC_{iw}\rho_w \lambda_w \bar{K} \cdot (\nabla p_o + \nabla p_{cwo} - \rho_w g \nabla D) \right] \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales aún necesita de adecuadas condiciones de borde y condiciones iniciales para tener una solución unívoca. Para el borde físico exterior se plantea una simple condición de flujo de masa nulo para cada componente (condición de Neumann

homogénea), la cual se expresa como

$$\sum_f \left[HC_{if} \rho_f \lambda_f \vec{K} \cdot (\nabla p_o - \rho_f g \nabla D) \cdot \hat{n} \right] + \sum_h \left[HC_{ih} \rho_h \lambda_h (\vec{K} \cdot \nabla p_{cho}) \cdot \hat{n} \right] = 0 \quad (2.1.3)$$

($1 \leq i \leq NI$), donde \hat{n} es la normal exterior a ese borde.

Respecto de las condiciones iniciales, es necesario conocer las distribuciones al tiempo inicial de cálculo de S_f , C_{if} , y p_o .

2.2 Modelo composicional simplificado

Un modelo composicional relativamente general, pero algo simplificado respecto de la formulación totalmente general planteada hasta este punto, surge de aplicar las siguientes restricciones:

- a) En la fase acuosa sólo hay componente agua; entonces

$$C_{iw} = 0 \text{ para } i \neq w; C_{ww} = 1 \quad (2.2.1)$$

- b) En las fases petróleo y gaseosa sólo hay componentes de hidrocarburos, es decir, no hay componente agua; entonces

$$C_{wo} = 0, C_{wg} = 0 \quad (2.2.2)$$

Se redefinirá, entonces, el parámetro NI como representando la cantidad de componentes de hidrocarburos, separándose explícitamente la componente agua.

2.3 Modelo de yacimiento tipo 'black-oil'

El modelo de yacimiento de tipo 'black oil' considera sólo dos pseudo componentes de hidrocarburo ($NI = 2$), cada una asociada a una de las fases, aceptando que las componentes pueden existir en ambas fases.

El sistema de ecuaciones de conservación que resulta al imponer estas restricciones al sistema (2.1.2 – 2.1.3), junto con las relaciones (2.2.1) y (2.2.2), es

$$\begin{aligned}
 & \phi \left\{ C_{oo}\rho_o \frac{\partial S_o}{\partial t} + C_{og}\rho_g \frac{\partial S_g}{\partial t} + \rho_o S_o \frac{\partial C_{oo}}{\partial t} + \rho_g S_g \frac{\partial C_{og}}{\partial t} \right. \\
 & \quad \left. + \left[(c_r + c_o) C_{oo}\rho_o S_o + (c_r + c_g) C_{og}\rho_g S_g \right] \frac{\partial p_o}{\partial t} \right\} \\
 = & q_o + \frac{1}{H} \nabla \cdot \left[HC_{oo}\rho_o \lambda_o \bar{K} \cdot (\nabla p_o - \rho_o g \nabla D) + HC_{og}\rho_g \lambda_g \bar{K} \cdot (\nabla p_o + \nabla p_{cgo} - \rho_g g \nabla D) \right] \\
 & \phi \left\{ C_{go}\rho_o \frac{\partial S_o}{\partial t} + C_{gg}\rho_g \frac{\partial S_g}{\partial t} + \rho_o S_o \frac{\partial C_{go}}{\partial t} + \rho_g S_g \frac{\partial C_{gg}}{\partial t} \right. \\
 & \quad \left. + \left[(c_r + c_o) C_{go}\rho_o S_o + (c_r + c_g) \rho_g S_g \right] \frac{\partial p_o}{\partial t} \right\} \tag{2.3.1} \\
 = & q_g + \frac{1}{H} \nabla \cdot \left[HC_{go}\rho_o \lambda_o \bar{K} \cdot (\nabla p_o - \rho_o g \nabla D) + HC_{gg}\rho_g \lambda_g \bar{K} \cdot (\nabla p_o + \nabla p_{cgo} - \rho_g g \nabla D) \right] \\
 & \phi \left[\rho_w \frac{\partial S_w}{\partial t} + (c_r + c_w) \rho_w S_w \frac{\partial p_o}{\partial t} \right] = q_w \\
 & + \frac{1}{H} \nabla \cdot \left[H \rho_w \lambda_w \bar{K} \cdot (\nabla p_o + \nabla p_{cwo} - \rho_w g \nabla D) \right]
 \end{aligned}$$

Se puede describir este sistema en función de las variables más usuales en la industria del petróleo, como ser:

$$\rho_o C_{oo} = \frac{\rho_{oS}}{B_o}, \quad \rho_o C_{go} = \frac{R_s \rho_{gS}}{B_o}, \quad \rho_g C_{og} = \frac{R_v \rho_{oS}}{B_g}, \quad \rho_g C_{gg} = \frac{\rho_{gS}}{B_g} \tag{2.3.2}$$

donde

ρ_{oS}, ρ_{gS} : densidades de masa del petróleo y del gas, medidas en condiciones estandar [kg/m³]

R_s, R_v : solubilidades del gas en el petróleo y del petróleo en el gas [-]

B_o, B_g : factores de formación de volumen del petróleo y del gas [-]

Con lo cual se llega finalmente al sistema de ecuaciones de un sistema de petróleo ‘black-oil’:

$$\begin{aligned}
 & \phi \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S_o}{B_o} + \frac{R_v S_g}{B_g} \right) + c_r \left(\frac{S_o}{B_o} + \frac{R_v S_g}{B_g} \right) \frac{\partial p_o}{\partial t} \right] = \frac{q_o}{\rho_{os}} \\
 & + \frac{1}{H} \nabla \cdot \left[\frac{H \lambda_o}{B_o} \bar{\mathbf{K}} \cdot (\nabla p_o - \rho_o g \nabla D) + \frac{H R_v \lambda_g}{B_g} \bar{\mathbf{K}} \cdot (\nabla p_o + \nabla p_{cgo} - \rho_g g \nabla D) \right] \\
 & \phi \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{R_s S_o}{B_o} + \frac{S_g}{B_g} \right) + c_r \left(\frac{R_s S_o}{B_o} + \frac{S_g}{B_g} \right) \frac{\partial p_o}{\partial t} \right] = \frac{q_g}{\rho_{gs}} \\
 & + \frac{1}{H} \nabla \cdot \left[\frac{H R_s \lambda_o}{B_o} \bar{\mathbf{K}} \cdot (\nabla p_o - \rho_o g \nabla D) + \frac{H \lambda_g}{B_g} \bar{\mathbf{K}} \cdot (\nabla p_o + \nabla p_{cgo} - \rho_g g \nabla D) \right] \\
 & \phi \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S_w}{B_w} \right) + \frac{c_r S_w}{B_w} \frac{\partial p_o}{\partial t} \right] = \frac{q_w}{\rho_{ws}} \\
 & + \frac{1}{H} \nabla \cdot \left[\frac{H \lambda_w}{B_w} \bar{\mathbf{K}} \cdot (\nabla p_o + \nabla p_{cwo} - \rho_w g \nabla D) \right]
 \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

3 DISCRETIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DE CONSERVACIÓN

Las ecuaciones diferenciales se discretizan por el método de los volúmenes finitos, que tiene idéntica versatilidad al método de los elementos finitos, pero posee la ventaja de mantener el balance exacto de los términos de flujo, es decir, provee una formulación conservativa.

Las tres ecuaciones de conservación están constituidas por tres tipos de términos:

- Términos de impermanencia T_1 de la forma

$$T_1 = c \frac{\partial X}{\partial t} \tag{3.1}$$

donde a y X dependen (directa o indirectamente) de las variables independientes t , x , e y , es decir, son campos escalares.

- Términos fuente T_2 de la forma

$$T_2 = b(t, x, y) \quad (3.2)$$

- Términos de flujo T_3 de la forma

$$T_3 = \nabla \cdot (\vec{\omega} \cdot \nabla p) \quad (3.3)$$

donde p es un campo escalar y $\vec{\omega}$ un campo tensorial.

3.1 Términos de flujo

La integración del término de flujo sobre el dominio de cálculo Ω , pesado con la función de peso w_n asociada al nodo n (numeración global) de la malla de discretización, conduce a

$$I_3 \equiv \int_{\Omega} T_3 w_n d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\vec{\omega} \cdot \nabla p) w_n d\Omega = \int_{\Gamma} (\vec{\omega} \cdot \nabla p) \cdot \hat{n} w_n d\Gamma - \int_{\Omega} (\vec{\omega} \cdot \nabla p) \cdot \nabla w_n d\Omega \quad (3.1.1)$$

donde se ha utilizado una generalización de la primera fórmula de Green, siendo Γ la curva que define el contorno de Ω , y \hat{n} su versor normal que apunta hacia el exterior. Como, de acuerdo a lo expresado en la sección 2.1, se considera que el flujo másico es nulo sobre el contorno, el primer término del último miembro de (3.2.4) se anula, independientemente de la elección de la función de peso.

Se elige una malla de discretización constituida por elementos triangulares trinodales, de acuerdo a lo mostrado en la figura 3.1.1, donde se indica, entre paréntesis, la numeración local de nodos, creciente en sentido antihorario.

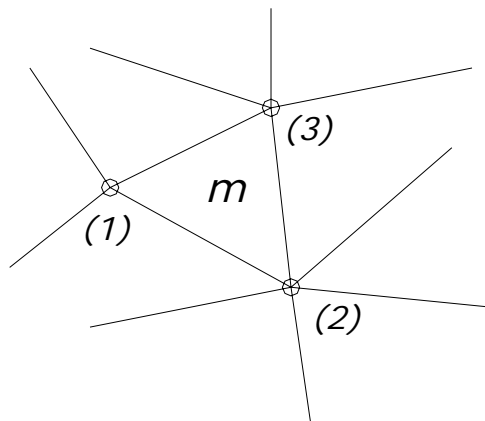


Figura 3.1.1: Elemento triangular general

Las funciones de peso del método de los volúmenes finitos (una para cada nodo de la malla) se eligen como

$$w_n(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{en } \Omega_n \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \quad (3.1.2)$$

donde Ω_n es un subdominio asociado al nodo n , construido en base a las medianas de los elementos adyacentes a ese nodo, tal como se muestra en la figura 3.1.2. Con esta elección, el gradiente de la función de peso es una delta de Dirac en la dirección contraria a la normal, por lo que la ecuación (3.1.1) se transforma en

$$I_3 = \int_{\Gamma_n} (\vec{\omega} \cdot \nabla p) \cdot \hat{n} \, d\Gamma \quad (3.1.3)$$

donde Γ_n es el contorno del subdominio Ω_n y \hat{n} es ahora la normal exterior a este subdominio.

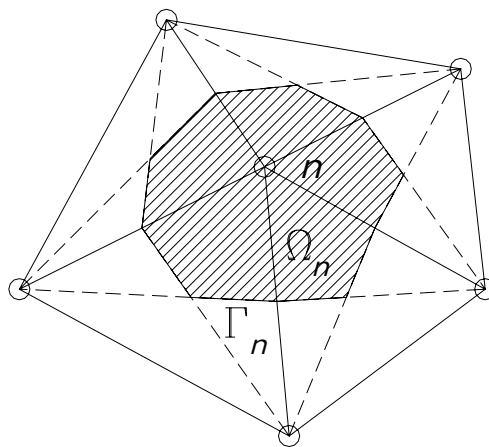


Figura 3.1.2: Subdominio de integración

La integración expresada en (3.1.3) se efectúa separadamente para cada elemento triangular que converge al nodo n , adicionándose las contribuciones individuales a posterior durante el proceso de ensamble. Para efectuar la integración sobre cada elemento triangular, es conveniente transformar el dominio a uno normalizado. Este se muestra en la figura 3.1.3, donde también se indica la numeración local de nodos, de 1 a 3, asignada en sentido antihorario. La relación de transformación entre las coordenadas originales y las del dominio transformado, denominadas ξ y η , son las siguientes:

$$x = \sum_{k=1}^3 N_{(k)}(\xi, \eta) x_{(k)}^m, \quad y = \sum_{k=1}^3 N_{(k)}(\xi, \eta) y_{(k)}^m \quad (3.1.4)$$

donde $x_{(k)}^m$ e $y_{(k)}^m$ son las coordenadas del nodo local k ($1 \leq k \leq 3$) del elemento m bajo análisis y $N_{(k)}$ las conocidas funciones de forma.

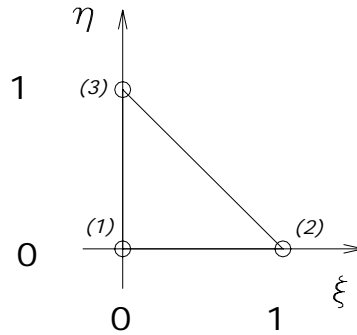


Figura 3.1.3: Elemento triangular normalizado

Para discretizar el integrando, las variables dependientes se expresan en términos de sus valores nodales:

$$p = \sum_{k=1}^3 N_{(k)}(\xi, \eta) p_{(k)}^m, \quad \omega_{ij} = \sum_{k=1}^3 N_{(k)}(\xi, \eta) [\omega_{ij}]_{(k)}^m \quad (3.1.5)$$

En consecuencia, la integral (3.1.3) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} I_3 &= [a_x]_n^m \sum_{k=1}^3 \left(\frac{l_{y13}^m}{\Delta} \frac{\partial N_{(k)}}{\partial \xi} - \frac{l_{y12}^m}{\Delta} \frac{\partial N_{(k)}}{\partial \eta} \right) p_{(k)}^m + [a_y]_n^m \sum_{k=1}^3 \left(-\frac{l_{x13}^m}{\Delta} \frac{\partial N_{(k)}}{\partial \xi} + \frac{l_{x12}^m}{\Delta} \frac{\partial N_{(k)}}{\partial \eta} \right) p_{(k)}^m \\ &= - \left[[a_x]_n^m \left(\frac{l_{y13}^m}{\Delta} - \frac{l_{y12}^m}{\Delta} \right) + [a_y]_n^m \left(-\frac{l_{x13}^m}{\Delta} + \frac{l_{x12}^m}{\Delta} \right) \right] p_{(1)}^m \\ &\quad + \left([a_x]_n^m \frac{l_{y13}^m}{\Delta} - [a_y]_n^m \frac{l_{x13}^m}{\Delta} \right) p_{(2)}^m + \left(-[a_x]_n^m \frac{l_{y12}^m}{\Delta} + [a_y]_n^m \frac{l_{x12}^m}{\Delta} \right) p_{(3)}^m \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

donde

$$l_{x12}^m \equiv x_{(2)}^m - x_{(1)}^m; l_{x13}^m \equiv x_{(3)}^m - x_{(1)}^m; l_{y12}^m \equiv y_{(2)}^m - y_{(1)}^m; l_{y13}^m \equiv y_{(3)}^m - y_{(1)}^m \quad (3.1.7)$$

$$\Delta \equiv l_{x12}^m l_{y13}^m - l_{x13}^m l_{y12}^m \quad (3.1.8)$$

$$\begin{aligned} [a_x]^m \equiv & \sum_{k'=1}^3 \left\{ \left(l_{y12}^m [\omega_{xx}]_{(k')}^m - l_{x12}^m [\omega_{yx}]_{(k')}^m \right) [\Psi_\xi]_{(k')n} \right. \\ & \left. + \left(l_{y13}^m [\omega_{xx}]_{(k')}^m - l_{x13}^m [\omega_{yx}]_{(k')}^m \right) [\Psi_\eta]_{(k')n} \right\} \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

$$\begin{aligned} [a_y]^m \equiv & \sum_{k'=1}^3 \left\{ \left(l_{y12}^m [\omega_{xy}]_{(k')}^m - l_{x12}^m [\omega_{yy}]_{(k')}^m \right) [\Psi_\xi]_{(k')n} \right. \\ & \left. + \left(l_{y13}^m [\omega_{xy}]_{(k')}^m - l_{x13}^m [\omega_{yy}]_{(k')}^m \right) [\Psi_\eta]_{(k')n} \right\} \end{aligned}$$

$$[\Psi_\xi]_{(k')n} \equiv \int_{\tilde{\Gamma}_n} N_{(k')} d\xi, \quad [\Psi_\eta]_{(k')n} \equiv \int_{\tilde{\Gamma}_n} N_{(k')} d\eta \quad (3.1.10)$$

Dado que la advección es el fenómeno dominante de transporte, la interpolación bilineal aplicada a los términos de flujo puede conducir a inestabilidades numéricas. La solución a esta dificultad radica en introducir un pesaje hacia aguas arriba de los términos de flujo para la movilidad³. Esto significa que, en lugar de interpolarla bilinealmente, la movilidad se escoge desde el nodo más cercano ubicado aguas arriba del segmento de integración. De esta manera, las integrales mostradas en las ecuaciones (3.1.10) deben ser descompuestas, para cada elemento, en sus dos tramos; y para cada tramo se debe utilizar la movilidad correspondiente, en función del criterio explicado.

3.2 Términos fuente

La integración del término fuente (3.2) sobre el dominio de cálculo Ω , pesado con la función de peso w_n conduce a:

$$I_2 \equiv \int_{\Omega} T_2 w_n d\Omega = \int_{\Omega} b(t, x, y) w_n d\Omega = \int_{\Omega_n} b(t, x, y) d\Omega \quad (3.2.1)$$

Como antes, la integración en (3.2.1) se efectúa individualmente para cada elemento triangular convergente al nodo n . Esta integración se transforma, entonces, en

$$I_2 = J \int_{\tilde{\Omega}_n} b(t, \xi, \eta) d\tilde{\Omega} \quad (3.2.2)$$

donde J es el Jacobiano, dado por

$$J \equiv \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_{x12}^m & l_{x13}^m \\ l_{y12}^m & l_{y13}^m \end{vmatrix} \quad (3.2.3)$$

El integrando se discretiza como

$$b = \sum_{k=1}^3 N_{(k)}(\xi, \eta) b_{(k)}^m \quad (3.2.4)$$

Reemplazando (3.2.4) en (3.2.2) se obtiene

$$I_2 = J \sum_{k=1}^3 \Lambda_{(k)} b_{(k)}^m \quad (3.2.5)$$

donde

$$\Lambda_{(k)} \equiv \int_{\tilde{\Omega}_n} N_{(k)}(\xi, \eta) d\tilde{\Omega} \quad (3.2.6)$$

3.3 Términos de impermanencia

La integración del término de impermanencia (3.1) conduce a:

$$I_1 \equiv \int_{\Omega} T_1 w_n d\Omega = \int_{\Omega} c \frac{\partial X}{\partial t} w_n d\Omega = \int_{\Omega_n} c \frac{\partial X}{\partial t} d\Omega \quad (3.3.1)$$

que, transformado, da

$$I_1 = J \int_{\tilde{\Omega}_n} c \frac{\partial X}{\partial t} d\tilde{\Omega} \quad (3.3.2)$$

La discretización espacial del integrando se efectúa como sigue:

$$c = \sum_{k=1}^3 N_{(k)}(\xi, \eta) c_{(k)}^m, \quad X = \sum_{k=1}^3 N_{(k)}(\xi, \eta) X_{(k)}^m \quad (3.3.3)$$

Introduciendo (3.3.3) en (3.3.1) se llega a

$$I_1 = J \sum_{k=1}^3 c_{(k)}^m \sum_{k'=1}^3 \Upsilon_{(kk')} \frac{d}{dt} X_{(k')}^m \quad (3.3.4)$$

donde

$$\Upsilon_{(kk')} \equiv \int_{\tilde{\Omega}_n} N_{(k)}(\xi, \eta) N_{(k')}(\xi, \eta) d\tilde{\Omega} \quad (3.3.5)$$

3.4 Discretización temporal

Para proceder a la discretización temporal, se plantea una ecuación diferencial genérica que contenga los tres tipos de términos analizados, es decir, impermanente, fuente y de flujo. Se adopta la siguiente forma:

$$\sum_{j=1}^{JIp} c_j \frac{\partial X_j}{\partial t} - \sum_{j'=1}^{JFu} b_{j'} - \sum_{j''=1}^{JFl} \nabla \cdot (\vec{\omega}_{j''} \cdot \nabla p_{j''}) = 0 \quad (3.4.1)$$

donde JIp , JFu y JFl indican la cantidad de términos de cada tipo, respectivamente. Nótese que X_j puede ser alguna de las siguientes variables independientes: p_o , S_o ó S_g , mientras que c_j , $b_{j'}$, $\omega_{j''}$ y $p_{j''}$ son funciones de estas variables independientes.

Utilizando las discretizaciones espaciales plasmadas en (3.1.6), (3.2.2) y (3.3.4), junto con una discretización temporal mediante un esquema totalmente implícito en diferencias finitas, la ecuación (3.4.1) conduce a

$$\begin{aligned}
& J \sum_{j=1}^{Jp} \sum_{k=1}^3 [c_{j(k)}^m]^{n+1} \sum_{k'=1}^3 \Upsilon_{(kk')} \left([X_{j(k')}^m]^{n+1} - [X_{j(k')}^m]^n \right) - J \Delta t \sum_{j'=1}^{JFu} \sum_{k=1}^3 \Lambda_{(k)} [b_{j'(k)}^m]^{n+1} \\
& - \Delta t \sum_{j''=1}^{JFl} \left\{ - \left[[a_{xj''}^m]_n^m \right]^{n+1} \left(\frac{l_{y13}^m}{\Delta} - \frac{l_{y12}^m}{\Delta} \right) + \left[[a_{yj''}^m]_n^m \right]^{n+1} \left(-\frac{l_{x13}^m}{\Delta} + \frac{l_{x12}^m}{\Delta} \right) \right\} [p_{j''(1)}^m]^{n+1} \\
& + \left(\left[[a_{xj''}^m]_n^m \right]^{n+1} \frac{l_{y13}^m}{\Delta} - \left[[a_{yj''}^m]_n^m \right]^{n+1} \frac{l_{x13}^m}{\Delta} \right) [p_{j''(2)}^m]^{n+1} \\
& + \left(- \left[[a_{xj''}^m]_n^m \right]^{n+1} \frac{l_{y12}^m}{\Delta} + \left[[a_{yj''}^m]_n^m \right]^{n+1} \frac{l_{x12}^m}{\Delta} \right) [p_{j''(3)}^m]^{n+1} \left. \right\}
\end{aligned} \tag{3.4.2}$$

donde el supraíndice n indica ahora el nivel temporal (no confundir con el subíndice n , que identifica el nodo global) y Δt es el paso temporal. La notación $[\varphi]^{n+1}$ significa que la variable dependiente φ se debe calcular en términos de al menos algunas de las variables dependientes primarias p_o , S_o ó S_g evaluadas en el paso $n+1$.

La resolución numérica del sistema (3.4.2) se lleva a cabo por un método de punto fijo, resolviéndose cada sistema lineal del paso iterativo mediante un método directo.

3.5 Aporte de los pozos de inyección

3.5.1 Pozos con condición de borde de caudal

Cuando se impone el caudal a un pozo inyector, el aporte de caudal de un pozo j se calcula como

$$(q_f)_j = \frac{(Q_f)_j}{H_j \tilde{\Omega}_j} \tag{3.5.1}$$

donde el subíndice f representa cada componente ($f = o, g, w$) y $\tilde{\Omega}_j$ es el área del volumen de control centrado en el nodo j [m^2].

3.5.2 Aporte de pozos de inyección con condiciones de borde de presión

Para un pozo por el que fluye una única componente, suponiendo que el flujo en el entorno es básicamente radial y considerando isotropía en la permeabilidad, el caudal se puede expresar en función del salto de presión en el entorno del pozo a través de la solución analítica⁴

$$Q_o = \psi (p_{ef} - p_w) \quad (3.5.2)$$

donde p_w es la presión en el pozo, p_{ef} la presión en el nodo de cálculo, y

$$\psi \equiv \frac{2\pi\lambda_f KH}{\ln(r_{ef} / r_w)} \quad (3.5.3)$$

siendo λ_f la movilidad de la fase de inyección, K un valor medio de la permeabilidad en el entorno del nodo, r_w el radio del pozo y r_{ef} el radio efectivo del pozo (a la escala de resolución de la grilla de cálculo), que es una variable de ajuste del modelo^{4,5}.

4 IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

La implementación computacional del simulador numérico se llevó a cabo en Visual Basic 6.0. Se dispone de un programa para generar grillas irregulares que siguen un contorno predefinido.

La resolución del sistema de ecuaciones algebraicas lineales se llevó a cabo con un 'solver' directo, de tipo 'skyline', provisto especialmente por el CIMEC.

5 VALIDACIÓN

Los ensayos que se presentan a continuación tienen como objetivo validar el modelo numérico implementado. Han sido diseñados de forma tal de incorporar gradualmente los distintos mecanismos representados, de modo de poder efectuar una validación de cada uno de ellos. En primer lugar se simulan problemas monofásicos, lo que permite validar la representación del flujo másico dentro del reservorio utilizando como condiciones de contorno del modelo los caudales de producción/inyección o la presión en los pozos. En segundo lugar se encara un problema multifásico, consistente en el caso de desplazamiento inmiscible en flujo bifásico.

5.1 Ensayo de pulso de presión

Este primer ensayo tuvo como objetivo validar los términos de flujo. Entonces, se efectuaron las siguientes simplificaciones en relación al reservorio:

$$\begin{aligned}
 R_v &= R_s = 0 \text{ (sin efectos de solubilidad)} \\
 p_{cgo} &= p_{cwo} = 0 \text{ (sin efectos de presión capilar)} \\
 D &= \text{cte. (sin efectos de gravedad)} \\
 H &= \text{cte. (sin efectos de espesor)} \\
 \vec{K} &= K \vec{I}, \vec{I} = \text{matriz identidad (permeabilidad isotrópica)} \\
 k_{ro} &= k_{rg} = k_{rw} = 1 \text{ (permeabilidad relativa constante y máxima)} \\
 B_o, B_g, B_w, \lambda_o, \lambda_g, \lambda_w &= \text{ctes. (propiedades uniformes)}
 \end{aligned}$$

En segundo lugar, se consideró que no existen fuentes ni sumideros (pozos), es decir, $Q_o = Q_g = Q_w = 0$.

Con estas condiciones, el sistema (2.3.3) se reduce a

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{c_r} \frac{\partial S_o}{\partial t} + S_o \frac{\partial p_o}{\partial t} &= \kappa_o \nabla^2 p_o; & \kappa_o &\equiv \frac{\lambda_o K}{\phi c_r} \\
 \frac{1}{c_r} \frac{\partial S_g}{\partial t} + S_g \frac{\partial p_o}{\partial t} &= \kappa_g \nabla^2 p_o; & \kappa_g &\equiv \frac{\lambda_g K}{\phi c_r} \\
 \frac{1}{c_r} \frac{\partial S_w}{\partial t} + S_w \frac{\partial p_o}{\partial t} &= \kappa_w \nabla^2 p_o; & \kappa_w &\equiv \frac{\lambda_w K}{\phi c_r}
 \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

donde κ_o , κ_g y κ_w son coeficientes de difusividad efectiva para las fases petróleo, gas y agua, respectivamente. Sumando las ecuaciones (5.1.1), y teniendo en cuenta que $S_o + S_g + S_w = 1$, se obtiene

$$\frac{\partial p_o}{\partial t} = \kappa \nabla^2 p_o, \quad \kappa \equiv \kappa_o + \kappa_g + \kappa_w = (\lambda_o + \lambda_g + \lambda_w) \frac{K}{\phi c_r} \tag{5.1.2}$$

es decir, una ecuación de difusión para la presión.

Se tomó como referencia un reservorio caracterizado por los siguientes valores de los parámetros básicos:

$$\begin{aligned}\phi &= 0,2 \\ c_r &= 5 \times 10^{-9} \text{ Pa}^{-1} \approx 3,5 \times 10^{-5} \text{ 1pc}^{-1} \\ K &= 10^{-13} \text{ m}^2 \approx 101 \text{ mD} \\ \mu_o &= 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s} = 1 \text{ cp} \Rightarrow \lambda_o = 10^3 \text{ 1/(Pa}\cdot\text{s)} = 0,5 \text{ cp}^{-1}\end{aligned}$$

Con estos valores se tiene que $\kappa_o = 0,1 \text{ m}^2/\text{s}$. Por simplicidad, se consideró que también $\kappa_g = \kappa_w = 0.1 \text{ m}^2/\text{s}$. Por la misma causa se tomó $B_o = B_g = B_w = 1$ y $H = 1 \text{ m}$.

Como condiciones iniciales, se partió de distribuciones uniformes de presión y de saturaciones con los siguientes valores:

$$p_o = 0; S_o = 0,6; S_g = 0; S_w = 0,4$$

El sistema se motorizó con un pulso de presión instantáneo aplicado puntualmente, de amplitud $P_o = 1,0 \times 10^7 \text{ Pa} \approx 1,45 \times 10^7 \text{ Psi}$. Si el dominio es ilimitado, este problema tiene la siguiente solución analítica para la presión:

$$p_o(x, y, t) = \frac{P_o}{4\pi \kappa t} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4\kappa t}\right) \quad (5.1.3)$$

Se tomó un recinto cuadrado de $2 \times 2 \text{ km}$. Se lo discretizó en elementos triangulares uniformes de tipo rectángulo, con catetos de longitud $l = 100 \text{ m}$. El pulso de presión se aplicó en el nodo central. Por razones de precisión, el paso de tiempo debe ser del orden del tiempo de difusión para la presión, es decir $l^2 / \kappa \approx 8 \text{ horas}$. En la figura 5.1.1 se muestra la comparación entre cortes radiales, a través del punto central del pulso, de la solución numérica (calculada con $\Delta t = 1 \text{ hora}$) y la analítica para la presión, para dos instantes de tiempo (1 y 2 días), anteriores a que se empiecen a hacer significativos los efectos de rebote en los bordes exteriores del reservorio. El acuerdo es excelente.

5.2 Ensayo de inyección monofásico

El objetivo del segundo ensayo fue validar el término de inyección en un pozo. Se mantuvieron las simplificaciones del ensayo anterior, salvo por las permeabilidades relativas, que se tomaron como $k_{ro} = 1$ y $k_{rg} = k_{rw} = 0$, con lo que resulta $\kappa_g = \kappa_w = 0$.

Se supuso una inyección de fase petróleo en un punto. Se tomó un valor constante (irrealmente alto) $Q_o = 1 \text{ m}^3/\text{s} \approx 540 \text{ mil BPD}$ desde el instante $t = 0$. Los valores de los parámetros del reservorio también se mantuvieron iguales a los del ensayo anterior. Las condiciones iniciales, uniformes, fueron las siguientes:

$$p_o = 1,0 \times 10^7 \text{ Pa} \approx 1,45 \times 10^7 \text{ Psi}; \quad S_o = 1; \quad S_g = S_w = 0$$

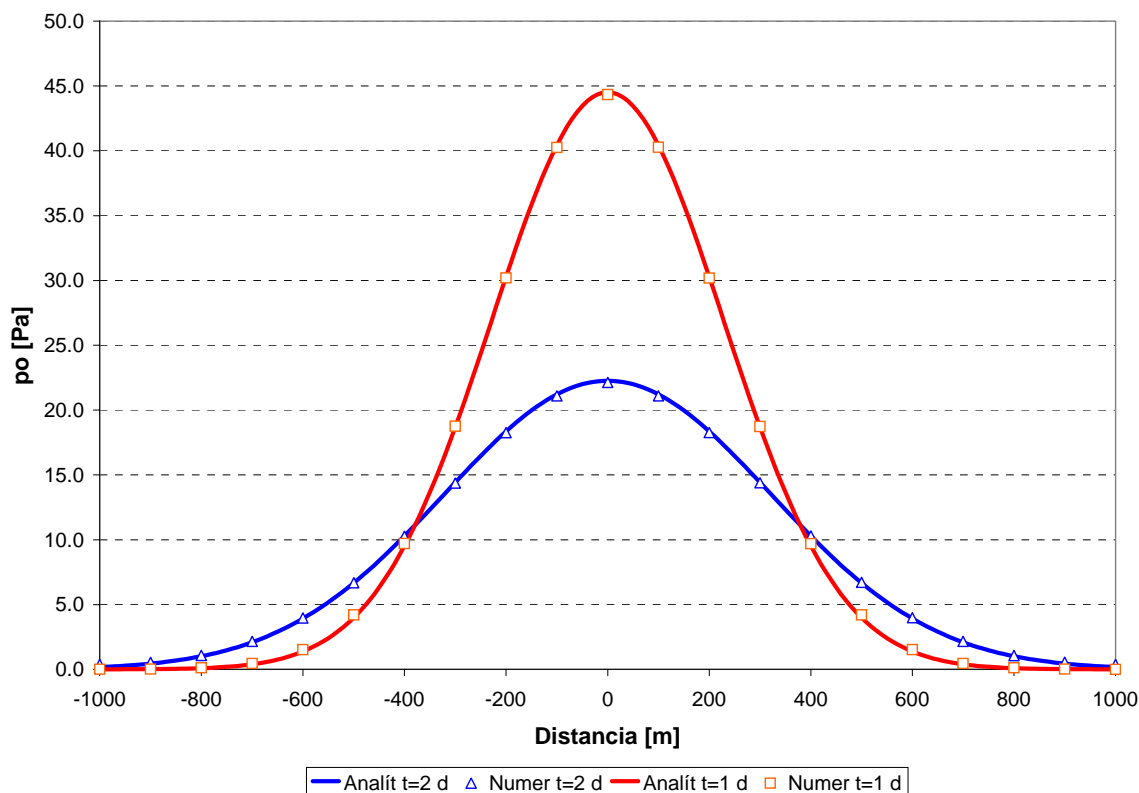


Figura 5.1.1: Comparación de soluciones numérica y analítica para el pulso de presión

Se consideró un dominio circular, de radio 1 km. Sobre él se construyó una grilla de elementos triangulares a partir de una primera división en anillos de un espesor uniforme de 100 m (totalizando 10 anillos) y sectores de un ángulo uniforme de 18° (totalizando 20 sectores), que se muestra en la figura 5.2.1. El pozo de inyección de caudal se ubicó en el nodo central.

La escala temporal de difusión de la presión es ahora $l^2 / \kappa_o \approx 28$ horas. Se tomó $\Delta t = 1$ día. En la figura 5.2.2 se muestra la evolución temporal del caudal que fluye hacia el nodo de inyección (un caudal saliente es, en consecuencia, negativo), calculado como flujo saliente del volumen de control alrededor de ese nodo. Se observa que, luego de un transitorio del orden de pocos días, el caudal se estabiliza en el valor impuesto. Este transitorio es, precisamente, la escala temporal de difusión sobre distancias del orden de las dimensiones del volumen de control.

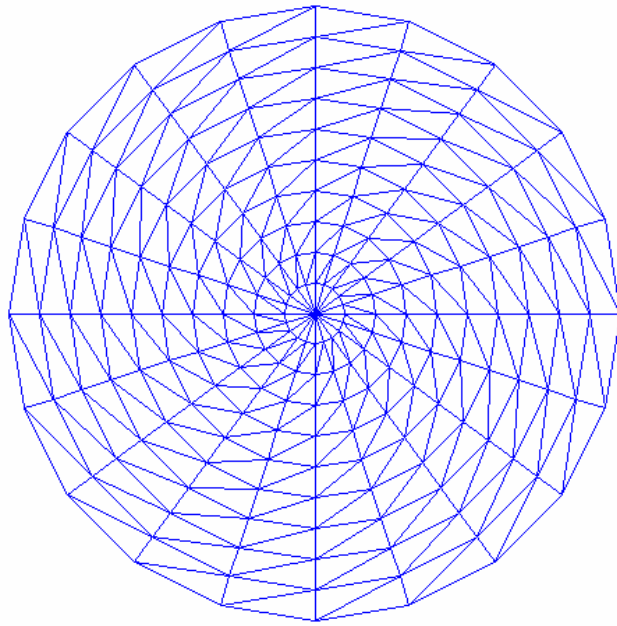


Figura 5.2.1: Grilla de discretización para el ensayo de inyección de caudal

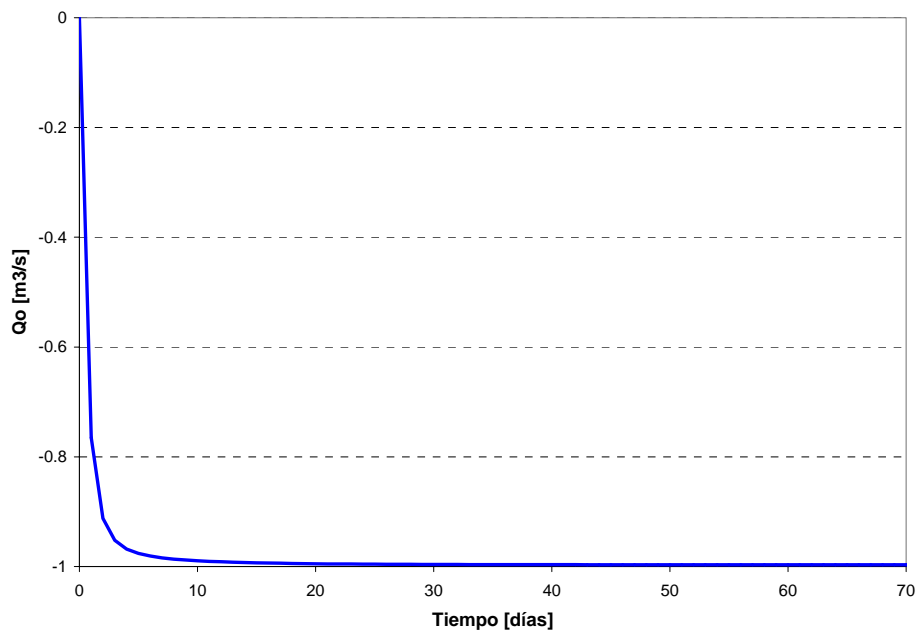


Figura 5.2.2: Evolución temporal del caudal en el nodo de inyección

5.3 Ensayo de extracción de petróleo

Este tercer ensayo tuvo como objetivo validar la representación de un pozo de extracción de petróleo mediante una condición de presión.

Las condiciones del ensayo (simplificaciones, geometría, condiciones iniciales y discretización) fueron las mismas que para el ensayo anterior, pero en lugar de imponer una inyección en el punto central, se supuso una caída de presión constante en ese nodo de valor $P_o = 1,0 \times 10^7 \text{ Pa} \approx 1,45 \times 10^7 \text{ Psi}$ desde el instante $t = 0$. Se utilizó, además, el mismo paso de tiempo.

El flujo resultante tiene simetría radial. Entonces, el problema se reduce a uno unidimensional en el espacio, cuya solución puede obtenerse con cualquier precisión requerida por un método de diferencias finitas ajustando la malla de cálculo al gradiente de presiones, resolviendo entonces explícitamente la caída brusca alrededor del pozo (que es lo que en el simulador se representa con la solución analítica). Esta solución numérica 1D se puede utilizar, entonces, como referencia para la validación.

Se efectuaron pruebas con el simulador variando el radio efectivo del pozo, que es el parámetro de ajuste, obteniéndose un acuerdo satisfactorio con la solución 1D cuando $r_{ef} = 1.2 r_o$, donde r_o es el radio efectivo del volumen de control ($r_o = \sqrt{\tilde{\Omega}/\pi}$), con $\tilde{\Omega}$ siendo el área del volumen de control centrado en el pozo, de modo que esa relación fue adoptada como ley de calibración. La Figura 5.3.1 muestra esta comparación para el volumen total extraído.

5.4 Ensayo de inyección bifásico

Este ensayo simula el avance de un frente de agua en una un canal saturado con petróleo, es decir, apunta a validar la simulación de flujos multifásicos.

Se consideró un dominio rectangular, de 2 m de ancho y 5 km de largo. Los elementos de la grilla son triángulos rectángulos, con catetos de 1 m en la dirección lateral y 100 m en la dirección longitudinal. Se inyecta agua en la cabecera desde tres pozos ubicados en los tres nodos del extremo izquierdo del canal, imponiéndose un caudal total de inyección de $1,41 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$. En tres pozos de extracción, situados en los nodos del extremo opuesto, se impone presión nula. Como condición inicial se considera un flujo estacionario de petróleo de izquierda a derecha con el mismo caudal (esta condición se genera utilizando el propio simulador).

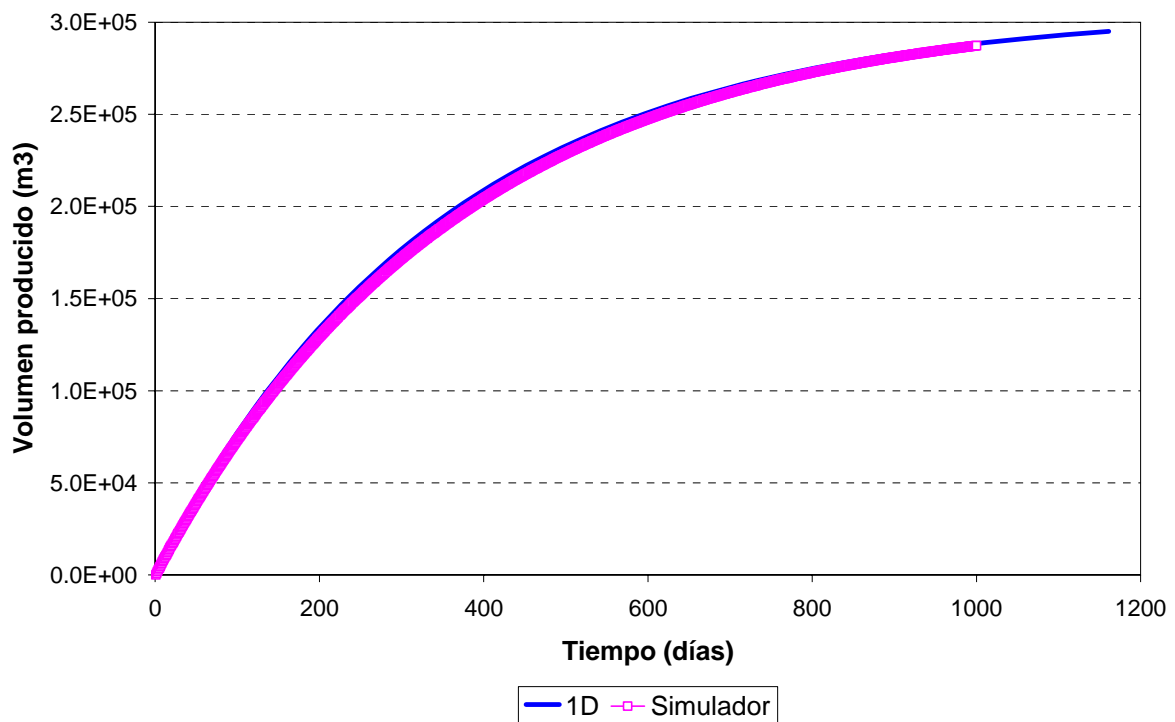


Figura 5.3.1: Evolución temporal del caudal extraído desde el nodo de producción

La figura 5.4.1 muestra la comparación entre los perfiles de la saturación de agua, para distintos tiempos, obtenidos con el simulador y las correspondientes soluciones cerradas de Buckley-Leverett⁶. El acuerdo se considera muy satisfactorio, teniendo en cuenta que el simulador representa al frente de avance de forma directa valiéndose de la difusión numérica.

6 CONCLUSIONES

Los ensayos de validación del simulador numérico de petróleo de primera etapa, basado en un modelo bidimensional tipo 'black-oil' y discretizado en volúmenes finitos, han mostrado un desempeño satisfactorio, lo que lo proyecta como una herramienta adecuada para su uso futuro en la operación de reservorios.

Antes de pasar a modelos más complejos, aún resta validar los efectos de la gravedad (flujo segregado).

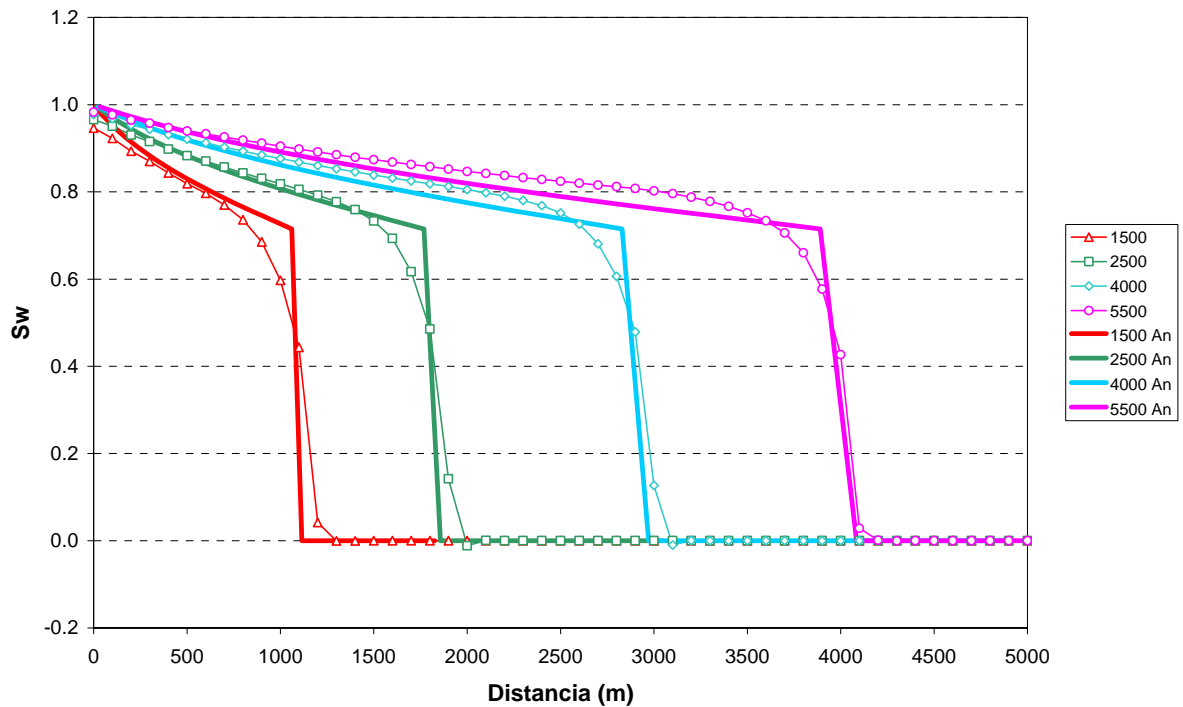


Figura 5.4.1: Perfiles de saturación de agua para distintos tiempos (en días)

7 BIBLIOGRAFÍA

- [1] H.B. Crichlow, *Modern reservoir engineering – a simulation approach*, Prentice-Hall, Inc. (1977).
- [2] J.R. Fanchi, *Principles of applied reservoir simulation*, Gulf Publishing Company (1997).
- [3] L.S.-K. Fung, A.D. Hiebert, L.X. Nghiem, “Reservoir Simulation with a Control-Volume Finite-Element Method”, *Jr. of SPE*, paper 21224 (1992).
- [4] D.W. Peaceman, “Interpretation of Well-Block Pressures in Numerical Reservoir Simulation UIT Nonsquare Grid Blocks and Anisotropic Permeability”, *Jr. of SPE*, paper 10528 (1983).
- [5] J.H. Abou-Kassem, K. Aziz, “Analytical Well Models for Reservoir Simulation”, *Jr. of SPE*, paper 11719 (1985).
- [6] L.P. Dake, *Fundamentals of Reservoir Engineering*, Elsevier (1978).