

ANÁLISIS DE UN ELEMENTO DE PLACA CUADRILÁTERO SIN GRADO DE LIBERTAD ROTACIONAL

Carlos F. Estrada^{*}, Fernando G. Flores[†]

^{*} Departamento de Estructuras
Universidad Nacional de Córdoba,
Casilla de Correo 916, 5000 Córdoba-Argentina
e-mail: cestrada@efn.uncor.edu.

[†] Departamento de Estructuras
Universidad Nacional de Córdoba,
Casilla de Correo 916, 5000 Córdoba-Argentina
e-mail: fflores@efn.uncor.edu.

Key words: Elementos finitos, placa, sin rotaciones, cuadrilátero.

Abstract. *En este trabajo se estudia el comportamiento de un elemento placa cuadrilátero sin grado de libertad rotacional como una extensión de la formulación de un elemento lámina triangular presentados en publicaciones anteriores (F. Sabourin, M. Brunet, Análisis of plates and shells with a simplified three-node triangular element. Thin Walled Structures, 21:209-223, (1995)). El elemento se implementa en un código implícito (ALPHA) y se comparan con la respuesta del elemento triangular sin grado rotacional (F.G. Flores, E. Oñate, A Basic thin shell triangle with only translational DOFs for large strain plasticity, IJNME, 51:57-83, (2001)). En el elemento implementado, la curvatura se tiene en cuenta a través de los elementos vecinos adyacentes. Se considera un grado de libertad por nudo (desplazamiento normal al plano del elemento). Se utilizan funciones de forma y coordenadas de área. La matriz de rigidez se obtiene a partir de las curvaturas normales a los lados del elemento maestro más dos curvaturas adicionales correspondientes a las direcciones normales a las diagonales del elemento. Se consideran condiciones de borde libre y empotrado. Se muestran resultados para la prueba de la parcela y para varios ejemplos estándares.*

1 INTRODUCTION

La necesidad de elementos de láminas y placas eficientes es importante en problemas de la industria cómo en el análisis de estructuras civiles y mecánicas. El estudio de la formulación de elementos simples capaces de representar adecuadamente la deformación de estructuras placas o láminas bajo diversas condiciones de carga es un tema investigación.

El desarrollo de elementos finitos de placa delgadas se basó en un principio en la llamada teoría de placas delgadas de Kirchhoff, donde el principal problema es mantener la continuidad de la normal a la superficie media^{1,2}. El problema de la continuidad C^1 motivó a numerosos autores a explorar la posibilidad de usar la teoría de Reissner-Mindlin. Esta teoría relaja la condición de ortogonalidad de la normal, para lo cual introduce un efecto de deformación por corte, con la ventaja de tener continuidad C^0 . Sin embargo, esto requiere de un tratamiento especial del corte transversal en láminas delgadas para evitar el bloqueo numérico. Por otra parte, los modelos numéricos usando esta teoría requieren de mayor número de grados de libertad (asociado al esfuerzo computacional) para obtener una precisión similar.

Numerosos autores han tratado de formular elementos placas y láminas triangulares con desplazamientos como única variable nodal³⁻⁷. En esencia, todos los métodos se basan en aproximar sus curvaturas a partir de los desplazamientos de los nudos de elementos vecinos adyacentes.

En este trabajo se analiza un elemento placa sin grados de libertad rotacional para pequeñas deformaciones. Curiosamente los elementos sin grado de libertad rotacional se han realizado sobre elementos triangulares y hasta donde conocen los autores existe un solo trabajo⁸ sobre elementos cuadriláteros que es una extensión de la metodología utilizada sobre un elemento de placa triangular⁷. La curvatura del elemento placa se obtiene a través de una parcela de elementos cuadriláteros, donde se define un elemento principal y cuatro elementos vecinos. Los resultados obtenidos con el elemento cuadrilátero se comparan con los obtenidos utilizando un elemento de placa triangular sin grado de libertad rotacional. El elemento triangular que se utiliza en el análisis presenta muy buen comportamiento lo que permite usarlo como un elemento finito de comparación.

La formulación del elemento cuadrilátero se hace en base a coordenadas de área⁹. Se determina la matriz de flexión, la matriz de rigidez elemental, y se definen las condiciones de borde para bordes simplemente apoyados o empotrados. En este análisis se intenta conocer la performance del elemento cuadrilátero para lo cual se realiza la prueba de la parcela de una placa sometida a torsión constante. Se utilizan mallas regulares e irregulares de distintos grados de libertad. Se resuelven casos de placas cuadradas, simplemente apoyadas y empotradas. Se consideran condiciones de simetría. Se comparan con la convergencia del elemento triangular y soluciones analíticas. Todos los casos analizados son de comportamiento lineal elástico

2 DEFINICIÓN DE LA GEOMETRÍA

El elemento cuadrilátero tiene cuatro nudos con un grado de libertad en cada uno de los

nudos. Para tener en cuenta el comportamiento a flexión de la placa es necesario definir una parcela de elementos formado por un elemento principal (I) y cuatro elementos adyacentes, ver Figura 1.

El orden de los nudos en la parcela de elementos es la siguiente:

- Los nudos en el elemento principal (I) están numerados localmente como 1, 2, 3, y 4. Están definidos en el sentido antihorario.
- Los lados del elemento principal están numerados localmente como 1, 2, 3, y 4. Los lados (i) quedan definidos por los siguientes pares de nudos (j-k): (1)=(2-3), (2)=(3-4), (3)=(4-1), y (4)=(1-2).
- Los elementos adyacentes que forman la parcela están numerados localmente como (II) el elemento adyacente al lado (1), así sucesivamente para los elementos (III), (IV), y (V).
- Los nudos extras de los elementos adyacentes están numerados desde el 5 hasta el 12.
- Las conectividades se definen de la siguiente manera:

(I) Principal	2	3	4	1
(II)	3	2	7	8
(III)	4	3	9	10
(IV)	1	4	11	12
(V)	2	1	5	6

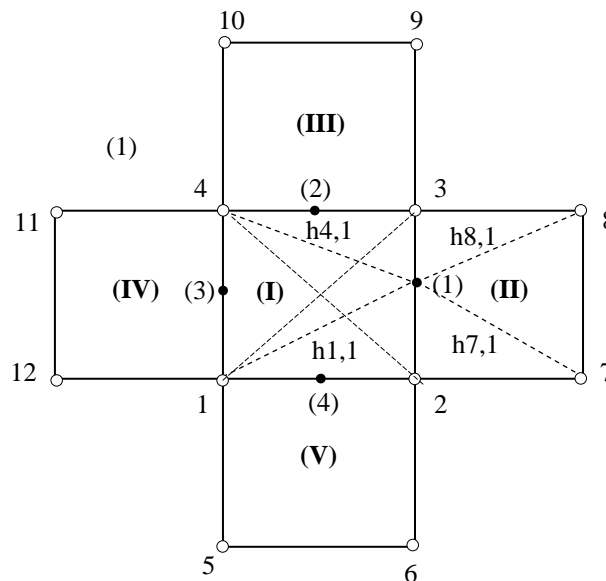


Figura 1: Parcela de elementos finitos.

Para definir las funciones de forma del elemento placa se considera un elemento cuadrilátero como muestra la Figura 2. La posición de un punto arbitrario P en el elemento puede ser expresado en término de las coordenadas de área L_1 , L_2 , L_3 , y L_4 , las cuales son definidas como

$$L_i = \frac{A_i}{A}, i=1,2,3,4 \quad (1)$$

Luego:

$$L_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \quad (2)$$

Donde, por ejemplo:

$$\begin{cases} a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ b_1 = y_2 - y_3 \\ c_1 = x_3 - x_2 \end{cases}$$

Donde A_i es el área de cada uno de los cuatro triángulos formados por el punto P y dos vértices adyacentes, y A es el área total del cuadrilátero. Se definen cuatro parámetros geométricos adimensionales $g_1, g_2, g_3,$ y g_4 de la siguiente forma:

$$g_1 = \frac{A_{124}}{A} \quad g_2 = \frac{A_{123}}{A} \quad g_3 = \frac{A_{234}}{A} = (1 - g_1) \quad g_4 = \frac{A_{143}}{A} = (1 - g_2) \quad (2)$$

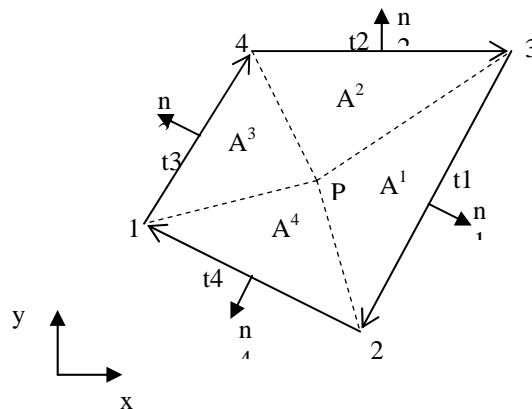


Figura 2: coordenadas de área del cuadrilátero.

Luego, el campo de desplazamiento puede interpolarse a través de los desplazamientos de los nudos como:

$$w = \sum_1^4 N_k w_k \quad (3)$$

Donde N_i son las funciones de interpolación en términos de las coordenadas de área L_j de las ecuaciones (1), las que se expresan como:

$$N_i = \frac{1}{4} \left[1 + \frac{L_i}{g_j} + \frac{L_j}{g_m} - \frac{L_k + L_m}{g_i} + \frac{g_k}{g_o} (g_i L_i L_j - g_j L_j L_k + g_k L_k L_m - g_m L_m L_i) \right] \quad (4)$$

Con $g_o = g_1 g_2 g_3 g_4$ y $i, j, k, m = 1, 2, 3, 4$

3 DEFINICIÓN DE LA CURVATURA

Suponiendo que los cuadriláteros tienen el mismo material y espesor a lo largo del lado común se define la curvatura normal en el punto medio del lado como la suma de los ángulos de giros por flexión del elemento principal y el elemento adyacente correspondiente, ver Figura 1. Se expresa la curvatura en los puntos medio de cada lado del cuadrilátero de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \chi_n^1 &= -2 \frac{\theta_{2,3,4,1} + \theta_{3,2,7,8}}{h_{4,1} + h_{1,1} + h_{7,1} + h_{8,1}} \\ \chi_n^1 &= -2 \frac{\theta_{2,3,4,1} + \theta_{3,2,7,8}}{h_{4,1} + h_{1,1} + h_{7,1} + h_{8,1}} \\ \chi_n^1 &= -2 \frac{\theta_{2,3,4,1} + \theta_{3,2,7,8}}{h_{4,1} + h_{1,1} + h_{7,1} + h_{8,1}} \\ \chi_n^1 &= -2 \frac{\theta_{2,3,4,1} + \theta_{3,2,7,8}}{h_{4,1} + h_{1,1} + h_{7,1} + h_{8,1}} \end{aligned} \quad (5)$$

Donde $\theta_{i,j,k,l}$ es el ángulo de rotación del punto medio del lado (i,j) del cuadrilátero (i,j,k,l), $h_{i,j}$ es la altura desde el nudo i al lado (j) donde (1)=(2-3), (2)=(3-4), (3)=(4-1), (4)=(1-2). El elemento cuadrilátero puede tener modos cinemáticos de alabeo para lo cuales se consideran dos curvaturas normales adicionales a lo largo de las dos diagonales internas del elemento denominadas (5)=(2-4) y (6)=(3-1):

$$\begin{aligned} \chi_n^5 &= \frac{\theta_{2,4,1} + \theta_{4,2,3}}{h_1 + h_3} \\ \chi_n^5 &= \frac{\theta_{2,4,1} + \theta_{4,2,3}}{h_1 + h_3} \end{aligned} \quad (6)$$

Donde $\theta_{i,j,k}$ es la rotación angular a lo largo de la diagonal (i-j) para el triángulo interno (i,j,k), h_k es la altura del nudo k al la diagonal (i,j). Las ecuaciones (3) y (4) se ponen en forma matricial de la siguiente manera:

$$\{\chi_n\}_{6 \times 1} = [H]_{6 \times 12} \{\theta\}_{12 \times 1} \quad (7)$$

Las seis curvaturas normales permite obtener las curvaturas en el sistema de coordenadas generales (\vec{x}, \vec{y}) a través de:

$$\begin{Bmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{x1}^2 & C_{x2}^2 & C_{x3}^2 & C_{x4}^2 & C_{x5}^2 & C_{x6}^2 \\ C_{y1}^2 & C_{y2}^2 & C_{y3}^2 & C_{y4}^2 & C_{y5}^2 & C_{y6}^2 \\ 2C_{x1}C_{y1} & 2C_{x2}C_{y2} & 2C_{x3}C_{y3} & 2C_{x4}C_{y4} & 2C_{x5}C_{y5} & 2C_{x6}C_{y6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_n^1 \\ \chi_n^2 \\ \chi_n^3 \\ \chi_n^4 \\ \chi_n^5 \\ \chi_n^6 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

Donde C_{xi} , C_{yi} son los cosenos directores de las normales salientes a cada lado. Los cosenos directores C_{x5} , C_{y5} corresponden a la normal saliente de la diagonal (2-4) del triángulo (2,4,1) y C_{x6} , C_{y6} corresponden con la normal saliente de la diagonal (3,1) del triángulo (3,1,2).

La ecuación (8) puede expresarse en forma matricial como:

$$\{\chi\}_{3 \times 1} = [R]_{3 \times 6} \{\chi_n\}_{6 \times 1} \quad (9)$$

Volviendo a la expresión (7), el vector de giros $\{\theta\}$ puede expresarse suponiendo que

$$\{\theta\}_{12 \times 1} = [C]_{12 \times 12} \{w\}_{12 \times 1} \quad (10)$$

Donde $[C]$ relaciona las rotaciones θ_i con los desplazamientos verticales w_i , luego se tiene:

$$\left(-\frac{\partial w}{\partial n}\right)^i = (\theta)^i = \frac{1}{l_i} \left[\sum_{k=1}^4 \left(2A^e \frac{\partial L_i}{\partial x} \frac{\partial N_k}{\partial x} + 2A^e \frac{\partial L_i}{\partial y} \frac{\partial N_k}{\partial y} \right) w_k \right] \quad (11)$$

Donde por ejemplo $(\partial N / \partial x)$ se puede expresar como:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = s_i + t_{i1}L_i + t_{i2}L_j + t_{i3}L_k + t_{i4}L_m \quad (12)$$

con

$$s_i = \frac{1}{8A} \left(\frac{b_i}{g_j} + \frac{b_j}{g_m} - \frac{b_k + b_m}{g_i} \right) \quad t_{i1} = \frac{g_k}{8Ag_o} (g_i b_j - g_m b_m) \quad (13)$$

$$t_{i2} = \frac{g_k}{8Ag_o} (g_i b_i - g_j b_k) \quad t_{i3} = \frac{g_k}{8Ag_o} (g_k b_m - g_j b_j) \quad t_{i4} = \frac{g_k}{8Ag_o} (g_k b_k - g_m b_i)$$

Expresiones similares se obtiene para la derivada $(\partial N / \partial y)$.

Las cuatro rotaciones internas a lo largo de las diagonales $\theta_{i,j,k}$ de las ecuaciones (6) se

obtienen a través de la parcela de triángulos internos:

$$\theta_{i,j,k} = \frac{w_k}{h_k} - \frac{w_i}{h_i} \cos \beta_j - \frac{w_j}{h_j} \cos \beta_i \quad (14)$$

Las ecuaciones (5), (6) y (8) proveen los términos requeridos que relacionan las curvaturas cartesianas con los desplazamientos normales para formar la matriz [C]. Luego la matriz de flexión [B] (3x12) es obtenida por el producto:

$$[B]_{3 \times 12} = [R]_{3 \times 6} [H]_{6 \times 12} [C]_{12 \times 12} \quad (15)$$

La matriz de rigidez elemental de flexión se obtiene en forma standard a través del siguiente producto matricial:

$$[K]_{12 \times 3}^e = [B]_{12 \times 3}^e D_{3 \times 3} [B]_{3 \times 12} A^e \quad (16)$$

Donde [D] es:

$$[D] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Los esfuerzos de flexión se obtienen simplemente como:

$$[M]_{3 \times 1} = [D]_{3 \times 3} [B]_{3 \times 12} [w]_{12 \times 1} \quad (18)$$

Donde [w] es el vector desplazamientos.

4 CONDICIONES DE BORDE

Para tener en cuenta las condiciones de borde se realiza un ajuste sobre la matriz [C] que relaciona giros con desplazamientos. Por ejemplo si el elemento (3,2,7,8) no existe, ver Figura 1, y si el lado (2-3) es simplemente apoyado o libre se asume que la curvatura normal es cero, luego $\theta_{2,3,4,1} + \theta_{3,2,7,8} = 0$. Suponiendo la existencia de los nudos virtuales (7) y (8), esto implica que $w_2 = -w_7$ y $w_3 = -w_8$ y la fila C(7,j) y C(8,j) para (j)=1,12, debe ser reemplazado por -C(2,j) y -C(3,j) respectivamente.

Si la condición de borde es empotrada, entonces se supone que $\theta_{2,3,4,1} - \theta_{3,2,7,8} = 0$. Si se consideran los nudos virtuales (7) y (8) y que en el borde el desplazamiento virtual es simétrico, entonces $w_2 = w_7$ y $w_3 = w_8$ y la fila C(7,j) y C(8,j) para (j)=1 a 12, debe ser reemplazado por C(2,j) y C(3,j) respectivamente.

5 EJEMPLOS

Para realizar un análisis de la exactitud y eficacia del elemento de placa descrito, se resuelven una serie de ejemplos. Primero, se pone en evidencia el comportamiento del

elemento cuadrilátero en una prueba de parcela con malla regular e irregular. Se compara con los resultados obtenidos con el elemento triangular LBST⁴. Segundo, se obtienen resultados numéricos de una placa cuadrada para diferentes condiciones de borde, para ambos tipos de elementos.

5.1 Prueba de la parcela

Se considera un ejemplo de torsión uniforme sobre una placa cuadrada $L/h=100$ simplemente apoyada en tres de sus vértices y cargado en el vértice libre con una fuerza vertical $F=1$ (ver la Figura 3). La solución analítica para esta placa es $M_x=M_y=0$, $M_{xy}=F/2$, y la deflexión $w=1.10$. Se analizan dos tipos de mallas, una con sus elementos uniformes y la otra con sus elementos distorsionados. En la Figura 3 se muestra la placa con elementos cuadriláteros con un arreglo uniforme. En la Figura 4 se muestran mallas distorsionadas, para el mismo tipo de elemento. Se comparan los resultados con los obtenidos usando elementos triangulares. Se considera en este último caso mallas uniformes y distorsionadas con dos orientaciones distintas, ver Figura 5. Los resultados correspondientes al elemento placa cuadrilátero se muestran en la Tabla 1. En la Tabla 2 se exponen los resultados para el caso de la placa usando elementos triangulares LBST.

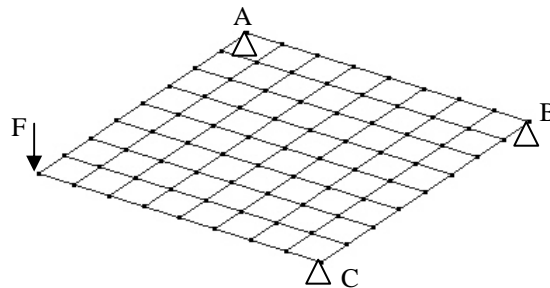


Figura 3: Test de la parcela para torsión uniforme y malla uniforme, $E=10.92E^5$, $\nu=0.30$, $L/h=1000$.

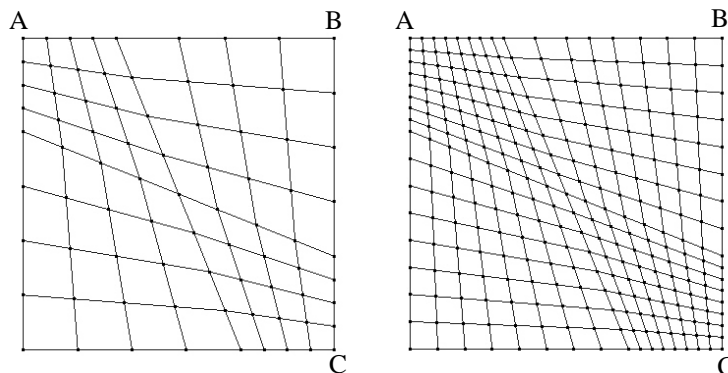


Figura 4: Mallas distorsionadas 8x8 y 16x16.

Grados de Libertad	Elemento Cuadrilátero	
	Malla Regular	Malla Irregular
4	1.0000	1.0650
16	1.0000	0.9945
64	1.0000	0.9969
256	1.0000	0.9990

Tabla 1: Resultados normalizados de una placa simplemente apoyada en sus tres vértices. Elemento placa cuadrilátero.

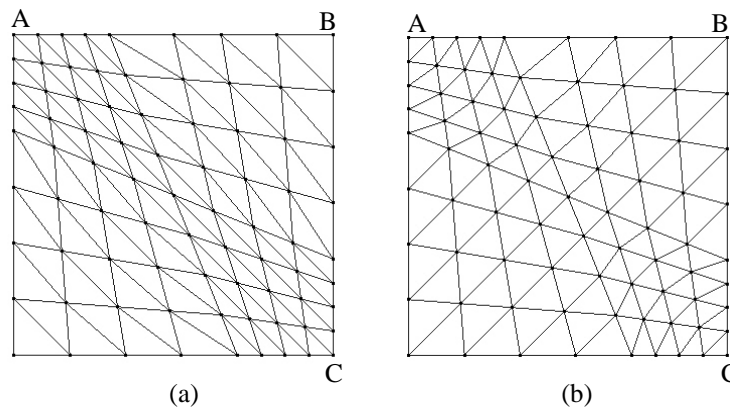


Figura 5: Mallas distorsionadas 8x8, (a) Malla A, (b) Malla B.

Grados de Libertad	Elemento triangular			
	Malla regular		Malla irregular	
	Malla A	Malla B	Malla A	Malla B
4	1.0000	1.0000	0.9554	0.9175
16	1.0000	1.0000	0.9709	0.9618
64	1.0000	1.0000	0.9917	0.9891
256	1.0000	1.0000	0.9991	0.9975

Tabla 2:

normalizados de una placa simplemente apoyada en sus tres vértices. Elemento triangular LBST.

Resultados

Nótese que los resultados para el caso de malla uniforme son exactos para ambos elementos analizados. No sucede lo mismo cuando se distorsiona la malla. El elemento placa y el elemento triangular no pasan estrictamente la prueba de la parcela. Para el elemento triangular los valores dependen de la orientación de la malla y la convergencia es mas rápida para la malla A (ver Figura 5(a)). Nótese que a medida que se aumentan los grados de libertad de la placa se asegura una convergencia hacia la solución analítica para ambos tipo de elementos.

5.2 Placa cuadrada

Se considera un ejemplo de placa rectangular uniformemente cargada, con condiciones de borde simplemente apoyada y empotrada en dos de los bordes contiguos, y condiciones de simetrías en los dos bordes restantes de la placa. En la Figura 6 se muestran dos mallas para el caso del elemento triangular, cada una de ellas posee diferentes orientaciones de los elementos, y en la Tabla 3 se muestran los resultados normalizados respecto a la solución analítica de la placa cargada uniformemente, para el elemento triangular y el elemento cuadrilátero.

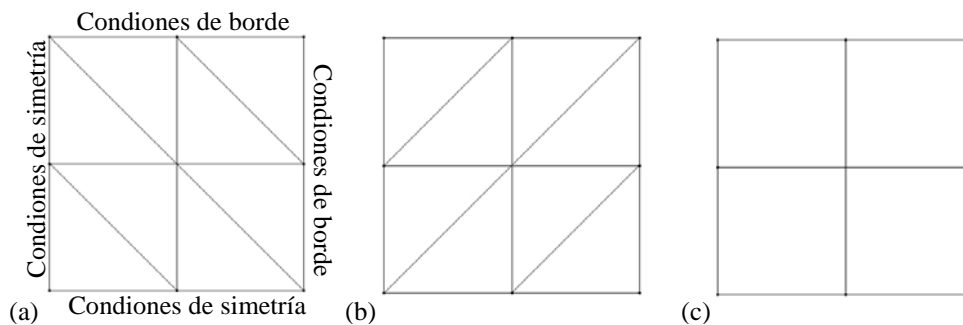


Figura 6: Placa cuadrada bajo carga uniforme, $E=10.92E^5$, $\nu=0.3$, $L/h=1000$: (a) malla de elementos triangulares, orientación A; y (b) malla de elementos triangulares, orientación B; (c) malla de elementos cuadrilátero regular.

Grados de Libertad	Desplazamientos normalizados					
	Malla A		Malla B		Elemento Placa	
	s.a.	Empt.	s.a.	Empt.	s.a.	Empt.
4	1.0050	1.5090	1.2315	2.0531	2.0044	6.4580
16	1.0029	1.1573	1.0486	1.2418	1.2863	1.4815
64	1.0005	1.0432	1.0112	1.0606	1.1892	0.9569
256	1.0000	1.0138	1.0027	1.0179	1.1447	0.9623

Tabla 3: Resultados normalizados para una placa cuadrada, malla regular.

A la vista de los resultados, queda claro que para el caso del elemento triangular la orientación de la malla produce valores distintos para bajos grados de libertad. Nótese que la malla B es mas rígida, sin embargo, a medida que se aumenta el grado de libertad las diferencias tienden a desaparecer. No sucede lo mismo para el caso de malla con elementos cuadriláteros, los resultados obtenidos no dependen de la orientación del elemento. En cuanto a la convergencia de los resultados, para placa simplemente apoyada, y 256 grados de libertad, el elemento triangular presentado tiene un error, en promedio entre ambas mallas, del orden de 0.3 por ciento. Para el elemento cuadrilátero el error es mayor, del orden del 13 por ciento. Para el mismo tipo de malla, pero con bordes empotrados, el elemento triangular presenta en promedio un error de 1.5 por ciento. El elemento cuadrilátero tiene un error de 5 por ciento.

6 CONCLUSIONES

Se ha analizado un elemento placa de cuatro nudos sin grados de libertad rotacional. El elemento tiene un grado de libertad traslacional por nudo, lo que lo hace simple en su formulación. Es posible tratar condiciones de borde simplemente apoyado, libres, y empotrados. El elemento placa cuadrilátero analizado no pasa estrictamente la prueba de la parcela pero converge a la solución correcta. Se han analizado algunos casos de aplicación.

En comparación con el elemento triangular la convergencia en todos los ejemplos analizados es más lenta, en especial si la malla es irregular. Los errores obtenidos son mayores a los del elemento triangular. Sin embargo, los experimentos numéricos abordados con el elemento placa cuadrilátero pueden ser modelados sin mayores problemas para mallas mas finas.

El análisis de exactitud y eficacia del elemento se ha realizado sobre ejemplos lineales elásticos, por lo que su análisis de comportamiento en problemas no lineales es un tema de trabajo futuro. Tratar de lograr una convergencia más rápida sobre todo para mallas no estructuradas, y mejorar el tratamiento de las condiciones de bordes deja abierto posibles desarrollos pendientes.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue posible a través de una beca otorgada por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, CONICET.

REFERENCIAS

- [1] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, *The finite element method*, McGraw Hill, Vol. I., 1989, Vol. II, (1991).
- [2] Timoshenko S. P., *Theory of Plates and Shells*, McGraw Hill, New York, (1979).
- [3] E. Oñate and F. Zarate, *Rotation-free triangular plate and shell elements*, Int. J. Numer. Meth. Engng., **47**, 557-603 (2000).
- [4] F. Cirak, M. Ortiz, *subdivisión surfaces: a new paradigm for thin shell finite element analisis*. IJNME, **47**, 2039-2072 (2000).
- [5] F. G. Flores and E. Oñate, *A basic thin shell triangle with only translational DOFs for large strain plasticity*, Int. J. Numer. Meth. Engng., **51**, 57-83 (2001).
- [6] E. Oñate and F. G. Flores, *Advances in the formulation of the rotation-free basic shell triangle*, Comput. Appl. Mech. Engrg., **194**, 2406-2443 (2005).
- [7] F. Sabourin and M. Brunet, *Analysis of Plates and Shells with a Simplified Three Node Triangular Element*, Thin-Walled Structures, **21**, 209-223 (1995).
- [8] M. Brunet and F.Sabourin, *Analysis of Rotation-Free-4-Node Shell Element*, IJNME, (2005), (enviado para su publicación).
- [9] A. K. Soh, L. Zhifei, C. Song, *Development of a new quadrilateral thin plate element using area coordinates*, Comput. Appl. Mech. Engrg., **190**, 979-987 (2000).