Asociación Argentina de Mecánica Computacional

Mecánica Computacional Vol XXVI, pp.1997-2004
Sergio A. Elaskar, Elvio A. Pilotta, Germán A. Torres (Eds.)
Córdoba, Argentina, Octubre 2007

UN PROBLEMA DE CAMBIO DE FASE CON CALOR LATENTE VARIABLE

Natalia N. Salva[a], Domingo A. Tarzia[b]

[a]*Departamento de Matemática-CONICET, FCE, Universidad Austral, Paraguay 1950, 52000FZF Rosario, Argentina, Natalia.Salva@fce.austral.edu.ar, http://www.austral.edu.ar*
[b]*Departamento de Matemática-CONICET, FCE, Universidad Austral, Paraguay 1950, 52000FZF Rosario, Argentina, Dmingo.Tarzia@fce.austral.edu.ar, http://www.austral.edu.ar*

Palabras clave: Problema de Frontera Libre, Problema de Stefan, Ecuación del calor, Solución explícita, Solución de similaridad.

Mathematics Subject Classification (2000): 35R35, 80A22, 35C05.

Resumen. Se estudia un problema de frontera libre del tipo Stefan a dos fases para un cuerpo semi-infinito: hallar la temperatura de la fase líquida $h_2(x,t)$ en el dominio $(0<x<s(t), t>0)$, la temperatura de la fase sólida $h_1(x,t)$ en el dominio $(x>s(t), t>0)$, y la frontera libre $x=s(t)$, que separa ambas fases que se encuentra a la temperatura de cambio de fase T_f. Se considera un flujo constante q_2 en la frontera fija $x=0$, y un flujo constante q_1 en el infinito. Además se supone una condición de temperatura inicial lineal en la variable x para la fase sólida inicial y se considera un calor latente de fusión que es una función lineal de la posición.

En este trabajo se determina la solución exacta de dicho problema de frontera libre y se hallan las condiciones necesarias y suficientes sobre los datos y parámetros físicos a los efectos de obtener la solución explícita de tipo de similaridad. Se generaliza al caso de dos fases el problema planteado a una fase en el trabajo (Voller, Swenson y Paola, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 40 (2004), 5387-5390).

1 INTRODUCCIÓN

Los problemas de cambio de fase aparecen frecuentemente en los procesos industriales y en otros problemas de interés tecnológico (Alexiades y Solomon, 1983; Crank, 1984; Lunardini, 1991). Una extensa bibliografía sobre problemas de frontera libre para la ecuación del calor-difusión fue dada en (Tarzia, 2000).

Se estudia un problema de frontera libre para la ecuación del calor, en particular un proceso de conducción de calor con cambio de fase, como por ejemplo de fase sólida a fase líquida (problema de fusión). Dichos procesos se conocen en la literatura como problemas de frontera libre de tipo Stefan. En general, en el problema de Stefan a una fase se trata de hallar dos funciones: $x=s(t)$, la frontera libre, y $h(x,t)$ que representa la temperatura de la fase líquida de un material que inicialmente se encontraba en la fase sólida a la temperatura de fusión. Tales funciones deben satisfacer las siguientes ecuaciones y condiciones:

$$h_t(x,t) = \nu\, h_{xx}(x,t)\,, \quad \text{si } x \in (0, s(t)), \forall t > 0 \tag{1}$$

$$h(s(t),t) = 0 \qquad \forall t > 0 \tag{2}$$

$$h(0,t) = T \qquad \forall t > 0 \tag{3}$$

$$s(0) = 0 \qquad \forall t > 0 \tag{4}$$

$$k\, h_x(s(t),t) = -\rho\, \lambda\, s'(t) \qquad \forall t > 0 \tag{5}$$

donde ν es el coeficiente de difusión, T es la temperatura constante en el borde fijo, k es la conductividad térmica, ρ es la densidad de masa , λ es el calor latente de fusión por unidad de masa; todos los coeficientes son constantes positivas. Por otro lado, $s'(t)$ representa la velocidad de la frontera libre.

El movimiento de las costas marítimas se puede modelar a través de un problema de Stefan a una fase modificado, como aparece descripto en el trabajo de Voller, Swenson y Paola, 2004. En dicho trabajo se estudió el siguiente problema, análogo al problema clásico de Stefan de una fase, pero con algunas modificaciones: en lugar de la condición de Dirichlet (3) se impone la condición $k\, h_x(0,t) = -q$ de flujo constante en la frontera fija $x=0$ del cuerpo semi-infinito. La otra diferencia es que en la condición de Stefan (5), el término del calor latente no es constante sino que resulta ser una función lineal de la posición, es decir: $k\, h_x(s(t),t) = -\rho\, s(t)\, s'(t)$.

En el presente trabajo se plantea un problema similar al de Voller, Swenson y Paola, 2004: un problema de Stefan a dos fases, es decir que se trata de hallar tres funciones: la frontera libre y las dos temperaturas de las fases líquida y sólida respectivamente. El término del calor latente es, como en el problema anterior, una función lineal de la posición. Se plantea también un flujo constante en la frontera fija $x=0$, y se considera un flujo constante en el infinito, es decir: $k_1\, h_x(+\infty,t) = -q_1$. Además se supone una condición de temperatura inicial lineal en la variable x. Se propone determinar la solución explícita. Para ello se da la modelización matemática y se encuentra la solución exacta de dicho problema de frontera libre hallándose las condiciones necesarias y suficientes sobre los datos y parámetros físicos del sistema a los efectos de obtener la solución explícita de tipo de similaridad. Se generaliza al caso de dos fases el problema planteado a una fase en el trabajo (Voller, Swenson y Paola, 2004).

2 PLANTEO DEL PROBLEMA

Se describe primero el problema de Stefan a dos fases clásico. Se considera un material semi-infinito que se encuentra inicialmente en estado sólido, a una temperatura T_i, con $T_i<T_f$, donde T_f es la temperatura de cambio de fase. El borde fijo $x=0$ se calienta a una temperatura T_0, con $T_0>T_f$. Para cada t positivo existirá un valor en la frontera libre $x=s(t)$ que separará la fase líquida, representada en el intervalo $(0,s(t))$, y la fase sólida, representada por el intervalo $(s(t),+\infty)$. Sea $T_1(x,t)$ la temperatura de la fase sólida en el punto x del material y en el tiempo t, y sea $T_2(x,t)$ la temperatura de la fase líquida, en el punto x y en el tiempo t . Se tiene que $T_1(x,t)$ y $T_2(x,t)$ deben verificar las ecuaciones de conducción del calor en los intervalos $(s(t),+\infty)$, $(0,s(t))$ respectivamente, es decir:

$$\rho c_2 T_{2_t}(x,t) - k_2 T_{2_{xx}}(x,t) = 0 \qquad \text{para } x \in (0,s(t)), t > 0.$$
$$\rho c_1 T_{1_t}(x,t) - k_1 T_{1_{xx}}(x,t) = 0 \qquad \text{para } x \in (s(t),+\infty), t > 0.$$

donde ρ ,c, k son constantes y representan la densidad de masa, común en ambas fases, el calor específico y la conductividad térmica respectivamente. La temperatura del borde fijo $x=0$, y de la frontera libre $x=s(t)$ deben ser constantemente T_0 y T_f respectivamente, es decir, $T_2(0,t)=T_0$, $T_1(s(t),t)=T_f$, $T_2(s(t),t)=T_f$, para todo instante de tiempo. Además se debe verificar la condición de Stefan, es decir que la diferencia de los flujos de calor que atraviesan, en un instante de tiempo, la frontera libre $x=s(t)$ es igual a la cantidad de calor necesaria para fundir a la porción de sólido durante dicho lapso de tiempo. Es decir,

$$k_1 T_{1_x}(s(t),t) - k_2 T_{2_x}(s(t),t) = \rho\lambda s'(t) \qquad \text{para todo } t > 0.$$

donde λ es el calor latente de fusión por unidad de masa. Como el material estaba inicialmente a temperatura T_i en su fase sólida entonces se tienen las siguientes condiciones: $T_1(0,t)=T_0$, $s(0)=0$. Este problema se resuelve explícitamente utilizando el método de semejanza y su solución exacta es conocida como solución de Neumann (Alexiades y Solomon, 1983; Lunardini, 1991; Tarzia, 1984).

En este trabajo se considera el siguiente problema de frontera libre de tipo Stefan para un material unidimensional, isótropo, homogéneo y semi-infinito: Dadas las constantes positivas $q_1, q_2, \nu_1, \nu_2, \gamma, k_1, k_2$ se desea hallar las temperaturas $h_1(x,t)$, $h_2(x,t)$ y la frontera libre $s(t)$ tal que se verifiquen las condiciones (6)-(12), a saber:

$$h_{1_t}(x,t) = \nu_1\, h_{1_{xx}}(x,t)\,, \text{si } \; x \in (s(t),+\infty),\, \forall t > 0 \tag{6}$$

$$h_{2_t}(x,t) = \nu_2\, h_{2_{xx}}(x,t)\,, \text{si } \; x \in (0,s(t)),\, \forall t > 0 \tag{7}$$

$$h_1(s(t),t) = 0\,, \forall t > 0 \tag{8}$$

$$h_2(s(t),t) = 0\,, \forall t > 0 \tag{9}$$

$$k_2\, h_{2_x}(0,t) = -q_2\,, \forall t > 0 \tag{10}$$

$$s(0) = 0 \tag{11}$$

$$k_1\, h_{1_x}(s(t),t) - k_2\, h_{2_x}(s(t),t) = \gamma\, s(t)s'(t)\,, \forall t > 0 \tag{12}$$

$$k_1\, h_{1_x}(+\infty,t) = -q_1\,, \forall t > 0 \tag{13}$$

$$\lim_{t\to 0^+} h_1(x,t) = -\frac{q_1}{k_1}x, \quad \forall\, x \in (0,+\infty). \tag{14}$$

Se pretende hallar las condiciones necesarias y suficientes sobre las constantes y parámetros físicos del problema a los efectos de obtener la existencia de la solución explícita.

3 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE FRONTERA LIBRE (6) – (14)

Se propone que la función $s(t)$ sea de la forma: $s(t) = 2\lambda\sqrt{\nu_1 t}$ para todo t positivo, donde λ es una constante adimensional positiva a determinar. Se puede observar que la condición inicial (11) se cumple automáticamente. Para encontrar las soluciones de las ecuaciones diferenciales (6) y (7) se necesita previamente el siguiente lema.

Lema 1:

a) Definiendo $\eta(\xi) = \dfrac{h(x,t)}{2\sqrt{t}}$ y $\xi = \dfrac{x}{2\sqrt{t}}$, se tiene:

$$h_t(x,t) = \nu\, h_{xx}(x,t) \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}\eta''(\xi) + \xi\,\eta'(\xi) - \eta(\xi) = 0 \tag{15}$$

donde ν es una constante positiva.

b) La solución de la ecuación diferencial

$$\frac{\nu}{2}\eta''(\xi) + \xi\,\eta'(\xi) - \eta(\xi) = 0 \tag{16}$$

viene dada por:

$$\eta(\xi) = -c_1\left[e^{-\frac{\xi^2}{\nu}} + \sqrt{\frac{\pi}{\nu}}\,\xi\, erf\left(\frac{\xi}{\sqrt{\nu}}\right)\right] + c_2\xi \tag{17}$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes reales arbitrarias.

Demostración:

a) Se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} &h_x(x,t) = \eta'(\xi) \quad, \\ &h_{xx}(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\eta''(\xi) \quad, \\ &h_t(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\left(\eta(\xi) - \xi\eta'(\xi)\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Reemplazando (18) en (15), se tienen las siguientes equivalencias:

$$h_t(x,t) = \nu\, h_{xx}(x,t) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{t}}\left(\eta(\xi) - \xi\eta'(\xi)\right) = \nu\eta''(\xi).\frac{1}{2\sqrt{t}} \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}\eta''(\xi) = \eta(\xi) - \xi\eta'(\xi).$$

b) Se observa que $\eta(\xi)=\xi$ es solución de la ecuación diferencial equivalente, con lo cual se puede aplicar el método de rebaje de orden. Para ello se propone $\eta(\xi)=\xi\,\mu(\xi)$. Derivando se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}\eta'(\xi) &= \mu(\xi) + \xi\,\mu'(\xi)\\ \eta''(\xi) &= \xi\,\mu''(\xi) + 2\mu'(\xi).\end{aligned} \tag{19}$$

Reemplazando (19) en (16), se tiene:

$$\frac{\nu}{2}\xi\,\mu''(\xi) + (\nu + \xi^2)\mu'(\xi) = 0 \tag{20}$$

Sea $\omega(\xi)=\mu'(\xi)$, entonces la ecuación (20) es esquivalente a:

$$\frac{\nu}{2}\xi\,\omega'(\xi) + (\nu + \xi^2)\,\omega(\xi) = 0 \tag{21}$$

Esta ecuación se resuelve por separación de variables. En efecto, se tiene:

$$\frac{\omega'(\xi)}{\omega(\xi)} = -2\frac{\left(\nu + \xi^2\right)}{\nu\xi} \;\Rightarrow\; \ln\left(\left|\omega(\xi)\right|\right) = -\frac{2}{\nu}\int\left(\frac{\nu}{\xi} + \xi\right)d\xi = -\ln(\xi^2) - \frac{\xi^2}{\nu} + c\ ,$$

donde c es una constante arbitraria, es decir

$$\ln\left(\left|\omega(\xi)\right|\right) + \ln(\xi^2) = -\frac{\xi^2}{\nu} + c \Rightarrow \ln\left(\left|\omega(\xi)\right|\xi^2\right) = -\frac{\xi^2}{\nu} + c \Rightarrow \left|\omega(\xi)\right|\xi^2 = e^c e^{-\frac{\xi^2}{\nu}} \;\Rightarrow\; \left|\omega(\xi)\right| = \frac{e^c}{\xi^2}e^{-\frac{\xi^2}{\nu}}$$

con lo cual $\omega(\xi) = \frac{c_1}{\xi^2}e^{-\frac{\xi^2}{\nu}}$ con c_1 una constate real arbitraria. Integrando $\omega(\xi)$ se obtiene $\mu(\xi)$ que viene dada por la siguiente expresión:

$$\mu(\xi) = \int\omega(\xi)d\xi = c_1\int\frac{e^{-\frac{\xi^2}{\nu}}}{\xi^2}d\xi = -c_1\left[\frac{e^{-\frac{\xi^2}{\nu}}}{\xi} + \sqrt{\frac{\pi}{\nu}}erf\left(\frac{\xi}{\sqrt{\nu}}\right)\right] + c_2 \tag{22}$$

donde c_2 es otra constante real de integración. Multiplicando (22) por ξ se obtiene (17). ■

Continuando con el problema descripto anteriormente, sea $\xi = \frac{x}{2\sqrt{t}}$ la variable de semejanza, entonces se tienen:

$$x \in \left(0, s(t)\right) \Leftrightarrow \xi \in \left(0, \lambda\right)\ \ ;\ \ x \in \left(s(t), +\infty\right) \Leftrightarrow \xi \in \left(\lambda, +\infty\right). \tag{23}$$

Sea $\eta_i(\xi) = \frac{h_i(x,t)}{2\sqrt{t}}$ para $i = 1{,}2$. Utilizando el lema anterior y teniendo en cuenta (23), se tienen las siguientes soluciones para las ecuaciones diferenciales (6) y (7) respectivamente:

$$\eta_1(\xi) = -c_{11}\left[e^{-\frac{\xi^2}{\nu_1}} + \sqrt{\frac{\pi}{\nu_1}}\xi\ erf\left(\frac{\xi}{\sqrt{\nu_1}}\right)\right] + c_{12}\xi \quad ,\qquad \text{si } \xi \in \left(\lambda, +\infty\right) \tag{24}$$

$$\eta_2(\xi) = -c_{21}\left[e^{-\frac{\xi^2}{\nu_2}} + \sqrt{\frac{\pi}{\nu_2}}\xi\ erf\left(\frac{\xi}{\sqrt{\nu_2}}\right)\right] + c_{22}\xi \quad ,\qquad \text{si } \xi \in \left(0, \lambda\right). \tag{25}$$

La condición (8) y (9) se satisface si y sólo si

$$\eta_1\left(\lambda\sqrt{\nu_1}\right)=0\ ,\ \eta_2\left(\lambda\sqrt{\nu_1}\right)=0\,. \tag{26}$$

La condición (10) se satisface si y sólo si

$$c_{22}=-\frac{q_2}{k_2}\,. \tag{27}$$

Utilizando (18) en la condición (13) se tiene:

$$\lim_{x\to+\infty} h_{1x}(x,t)=\lim_{\xi\to+\infty}\eta_1'(\xi)=\lim_{\xi\to+\infty} -c_{11}\sqrt{\frac{\pi}{\nu_1}}erf\left(\frac{\xi}{\sqrt{\nu_1}}\right)+c_{12}=$$

$$-c_{11}\sqrt{\frac{\pi}{\nu_1}}+c_{12}=-\frac{q_1}{k_1}\,. \tag{28}$$

Se puede observar que la condición (14) se satisface pues se tiene que:

$$\lim_{t\to0^+} 2\sqrt{t}\,\eta_1(\xi)=\lim_{\substack{t\to0^+\\ \xi\to+\infty}} -2c_{11}\left[\sqrt{t}e^{-\frac{\xi^2}{\nu_i}}+\sqrt{\frac{\pi}{\nu_i}}x\,erf\left(\frac{\xi}{\sqrt{\nu_i}}\right)\right]+2c_{12}x=-2c_{11}\sqrt{\frac{\pi}{\nu_i}}x+2c_{12}x=-\frac{q_1}{k_1}x\,.$$

Sea $\nu=\sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_2}}$, despejando las constantes c_{11}, c_{12}, c_{21} y c_{22}, de las cuatro condiciones obtenidas, (26), (27) y (28), se obtienen las siguientes expresiones:

$$c_{11}=-\frac{q_1}{k_1}\frac{\lambda\sqrt{\nu_1}}{(e^{-\lambda^2}-\lambda\sqrt{\pi}erfc(\lambda))} \tag{29}$$

$$c_{12}=-\frac{q_1}{k_1}\left[1+\frac{\lambda\sqrt{\pi}}{(e^{-\lambda^2}-\lambda\sqrt{\pi}erfc(\lambda))}\right] \tag{30}$$

$$c_{21}=-\frac{q_2}{k_2}\frac{\lambda\sqrt{\nu_1}}{(e^{-(\nu\lambda)^2}+\lambda\nu\sqrt{\pi}erf(\lambda\nu))} \tag{31}$$

$$c_{22}=-\frac{q_2}{k_2} \tag{32}$$

Sólo resta por determinar la constante λ, que deberá surgir de la condición (12). Teniendo en cuenta que $h_{ix}(s(t),t)=\eta_i'(\lambda\sqrt{\nu_1})$ para $\mathrm{i}=1,2$, la condición (12) se satisface si y sólo si:

$$k_1\eta_1'\left(\lambda\sqrt{\nu_1}\right)-k_2\eta_2'\left(\lambda\sqrt{\nu_1}\right)=2\nu_1\gamma\lambda^2 \qquad \Leftrightarrow$$

$$-c_{11}k_1\sqrt{\frac{\pi}{\nu_1}}erf(\lambda)+c_{12}k_1+c_{21}k_2\sqrt{\frac{\pi}{\nu_2}}erf(\nu\lambda)-c_{22}k_2=2\nu_1\gamma\lambda^2\,. \tag{33}$$

<u>**Teorema 2**</u>**:** La solución del problema (6)-(14) viene dada por

$$h_1(x,t) = -c_{11}\left[2\sqrt{t}e^{-\frac{x^2}{4t\nu_1}} + \sqrt{\frac{\pi}{\nu_1}}\, x\, erf\left(\frac{x}{2\sqrt{\nu_1 t}}\right)\right] + c_{12}x \quad , \quad \text{si } x \in (s(t), +\infty), \quad t > 0, \quad (34)$$

$$h_2(x,t) = -c_{21}\left[2\sqrt{t}e^{-\frac{x^2}{4t\nu_2}} + \sqrt{\frac{\pi}{\nu_2}}\, x\, erf\left(\frac{x}{2\sqrt{\nu_2 t}}\right)\right] + c_{22}x \quad , \quad \text{si } x \in (0, s(t)), \quad t > 0, \quad (35)$$

donde los coeficientes c_{ij} vienen expresados por (29)-(32) y λ debe ser solución positiva de la ecuación (33).

4 ANÁLISIS DE LA EXISTENCIA Y UNICIDAD DEL PARAMETRO λ

Se trata primero de simplificar las expresiones anteriores y por ende la condición sobre λ, definiendo nuevas funciones. Sean las funciones reales:

$$Q(x) = \sqrt{\pi}\, x\, e^{x^2} erfc(x)\,, P(x) = \sqrt{\pi}\, x\, e^{x^2} erf(x)\,. \quad (36)$$

La ecuación (33) se transforma en:

$$q_1\left[\frac{1}{1-Q(\lambda)}\right] + 2\nu_1\gamma\lambda^2 = q_2\left[\frac{1}{1+P(\nu\lambda)}\right], \qquad \lambda > 0\,. \quad (37)$$

Sean las funciones reales:

$$R_2(x) = q_2\,\frac{1}{1+P(\nu x)}\ ;\ R_1(x) = 2\nu_1\gamma x^2 + q_1\,\frac{1}{1-Q(x)}\,. \quad (38)$$

Se busca ahora demostrar que existe una única solución positiva de la ecuación (37), que resulta ser la intersección de las curvas R_1 y R_2. Las propiedades de $Q(x)$ y $P(x)$ son respectivamente:

$$Q(0)=0,\ Q(x)>0\,,\ 0<Q(x)<1\,,\ Q'(x)>0\,,\ \forall x>0,\ Q(+\infty)=1. \quad (39)$$

$$P(0)=0,\ P(x)>0\ ,\ P'(x)>0\,,\ \forall x>0,\ P(+\infty)=+\infty. \quad (40)$$

De las propiedades (39) se tiene que $R_1(0)=q_1\,, R_1(+\infty)=+\infty, R_1'(x)>0, \forall x>0,$ lo cual implica que R_1 es una función estrictamente creciente. De las propiedades (40) se tiene que $R_2(0)=q_2\,, R_2(+\infty)=0\,, R_2'(x)<0\,, \forall x>0,$ lo cual implica que es R_2 es una función estrictamente decreciente. Por lo tanto, si $q_1<q_2$ se deduce que existe una única intersección entre las curvas R_1 y R_2.

5 CONCLUSIÓN

Teorema 3: Si $q_1<q_2$ entonces existe una única solución $\lambda > 0$ de la ecuación (33), y por ende existe una única solución de tipo similaridad del problema de frontera libre (6)-(14) cuya solución está dada por los perfiles de temperaturas (34) y (35) y la frontera libre viene dada por la expresión: $s(t) = 2\lambda\sqrt{\nu_1 t}$.

AGRADECIMIENTOS: Este trabajo ha sido parcialmente financiado por los projectos PIP No. 5379 de CONICET - UA (Rosario, Argentina) y ANPCyT PAV 120-00005 from Agencia (Argentina).

REFERENCIAS

V. Alexiades y A.D. Solomon. *Mathematical modeling of melting and freezing processes*. Hemisphere - Taylor & Francis, Washington (1983).

J. Crank. *Free and moving boundary problems*. Clarendon Press Oxford (1984).

V.J. Lunardini. *Heat transfer with freezing and thawing.* Elsevier, Amsterdam (1991).

D.A. Tarzia. Soluciones exactas del problema de Stefan unidimensional. *Cuadern. Inst. Mat. Beppo Levi*, 12:5-36, 1984. Ver también: *Problemas de conducción de calor, el problema de Stefan.* Curso de Especialización en Matemática Aplicada, Posadas (1996).

D.A. Tarzia. A bibliography on moving-free boundary problems for the heat-diffusion equation. The Stefan and related problems, *MAT-Serie A,* 2:1-297, 2000. (with 5869 titles on the subject). Available from: www.austral.edu.ar/MAT-SerieA/2(2000)/

V.R. Voller, J.B. Swenson, C. Paola. An analytical solution for a Stefan problem with variable latent heat. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47: 5387-5390, 2004.