

LÍMITES INFERIORES PARA CÁSCARAS CILÍNDRICAS BAJO CARGAS NO AXILSIMÉTRICAS

Rossana C. Jaca^{*}, Luis A. Godoy[†], y Fernando G. Flores[†]

^{*} Departamento de Construcciones, Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional del Comahue
Buenos Aires 1400, 8300 Neuquén, Argentina
e-mail: rjaca@uncoma.edu.ar

[†] Departamento de Estructuras, F.C.E.F. y N.
Universidad Nacional de Córdoba
Casilla de Correo 916, 5000 Córdoba, Argentina
e-mail: lgodoy@com.uncor.edu

Key words Pandeo, Cáscaras Cilíndricas, Elementos Finitos, Energía Reducida, Carga de Viento, Límites inferiores.

Abstract. *Este trabajo analiza el fenómeno de pandeo de cáscaras cilíndricas frente a cargas de viento mediante la teoría de límites inferiores basada en el modelo de energía reducida de la cáscara, desarrollado originalmente por Croll y colaboradores. El estudio se realiza en base a un programa de propósitos específicos (ALREF) incorporando la evaluación de las componentes de energía membranal y flexional, con una formulación de elemento finito semianalítico para la discretización. En una primera etapa se analizan estas componentes de energía para carga axilsimétrica, evaluando diferentes parámetros geométricos para analizar la influencia de las relaciones longitud-radio, radio-espesor, y diferentes condiciones de apoyo. En una segunda etapa, una vez identificadas las componentes de energía estabilizantes y desestabilizantes, se hace un análisis de autovalores con la energía reducida considerando que se pierden las componentes estabilizantes por la presencia de imperfecciones. Este análisis es realizado para cargas no axilsimétricas, como las de viento, considerando tipologías como las de tanque de almacenamiento de petróleo o derivados. Se obtienen cargas críticas que son límites inferiores a las obtenidas por un análisis no lineal geométrico desde la etapa inicial, comparándose los resultados con los obtenidos mediante trayectorias no lineales e imperfecciones geométricas.*

1 INTRODUCCION

El pandeo de cáscaras es un problema que requiere para su análisis consideraciones de comportamiento no lineal geométrico. Las herramientas más comunes para su estudio son el análisis de bifurcación y análisis no lineal geométrico con seguimiento de trayectorias en estados poscríticos considerando sensibilidad ante imperfecciones. Existen programas de elementos finitos standard que permiten resolver estos procesos pero con un costo computacional alto en cuanto a tiempo empleado y equipamiento sobre todo si se requiere análisis poscrítico. Este procedimiento no es el más conveniente en una etapa de diseño donde resulta imprescindible poder estimar cargas de pandeo seguras. La teoría de rigidez reducida es una alternativa de análisis que permite plantear el problema de pandeo sobre la base del comportamiento físico en el estado poscrítico avanzado, resultando de aplicación computacional más sencilla.

Desde finales de la década del 70, Croll y colaboradores^{1,2,3} comienzan a afianzar los conceptos de esta teoría aplicados a cáscaras, con el objeto de vincular las predicciones teóricas con las observaciones experimentales, confirmar bases teóricas mediante estudios paramétricos sistemáticos y relacionar los conceptos de energía reducida con sensibilidad ante imperfecciones como una forma de justificar cargas críticas menores que las obtenidas por un análisis de autovalores. Trabajos realizados por Batista y Croll² muestran que el método predice adecuadamente las cargas límites inferiores de pandeo para cilindros cargados axial y radialmente con anillos rigidizadores o sin rigidizar. Zintillis y Croll³ plantean estos conceptos en cáscaras de tipo de torre de enfriamiento.

Este trabajo tiene por objeto aplicar la teoría de rigidez reducida a cáscaras con simetría axial para la evaluación de límites inferiores a las cargas críticas de pandeo en base a un modelo de la cáscara discretizado por elementos finitos. La teoría de energía reducida demuestra, desde un análisis de la distribución de los componentes de energía en los modos críticos, que una significativa contribución a la estabilidad de la cáscara está derivada de la rigidez membranal y que el comportamiento poscrítico inestable es el resultado de una pérdida de esa rigidez membranal. Se plantea un análisis teórico simplificado eliminando términos apropiados en el potencial de energía membranal para explicar el efecto combinado del acoplamiento de modos e imperfecciones en la reducción de esta rigidez membranal.

En trabajos anteriores^{2,3,4} se han aplicado estos conceptos en cáscaras sometidas a cargas axilsimétricas mediante formulaciones analíticas, programas de propósitos específicos o códigos de propósitos múltiples¹⁰. Los tanques de grandes dimensiones destinados al almacenamiento de petróleo o derivados están dentro de este tipo de estructuras con problemas de pandeo, sobre todo frente a cargas de viento que no son axilsimétricas. Flores y Godoy^{11,12} han estudiado esta problemática mediante el uso de diferentes programas computacionales considerando trayectorias no lineales con imperfecciones.

En este trabajo se extiende la teoría de rigidez reducida a estructuras cilíndricas sometidas a cargas no axilsimétricas con el propósito de encontrar límites inferiores a las cargas críticas halladas por la metodología tradicional, orientando su uso a tanques de almacenamiento de grandes dimensiones.

2 FORMULACION DEL PROBLEMA

Como marco teórico general es necesario plantear las bases para la expresión de la energía potencial total asociada al sistema estudiado, para evaluar sus diferentes componentes, hacer uso del principio de estacionariedad de la energía potencial total en la formulación de análisis clásico de pandeo y para el planteo con energía reducida.

2.1 Energía Potencial Total.

Sea una cáscara cilíndrica de radio R , longitud L y espesor t , la energía potencial total puede ser escrita como:

$$V = \frac{1}{2} \int (N_{ij} \varepsilon_{ij} + M_{ij} \chi_{ij}) dA - \psi = U_m + U_b - \psi \quad (1)$$

para $i, j = 1, 2$, donde $N_{ij} \varepsilon_{ij}$ está asociado a la energía membranar (U_m), $M_{ij} \chi_{ij}$ está asociado a la energía flexional (U_b) y ψ es el potencial de carga. El campo de esfuerzos membranarales y flexionales (N_{ij} y M_{ij}) y el de deformaciones membranarales y flexionales (ε_{ij} y χ_{ij}) se representa en términos de la trayectoria fundamental $(-)^F$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} N_{ij} &= \lambda N_{ij}^F + N'_{ij} + N''_{ij} & ; & & \varepsilon_{ij} &= \lambda \varepsilon_{ij}^F + \varepsilon'_{ij} + \varepsilon''_{ij} \\ M_{ij} &= \lambda M_{ij}^F + M'_{ij} & ; & & \chi_{ij} &= \lambda \chi_{ij}^F + \chi'_{ij} \end{aligned} \quad (2)$$

donde $(-)'$ representa la contribución lineal a la variable y $(-)''$ es la contribución no lineal. Sustituyendo en la expresión de la energía (1) se plantea la condición necesaria y suficiente de equilibrio indicada en (3) y la condición de punto crítico expresada en (4):

$$\delta V = \frac{1}{2} \int (N^F_{ij} \varepsilon'_{ij} + N'_{ij} \varepsilon^F_{ij} + M^F_{ij} \chi'_{ij} + M'_{ij} \chi^F_{ij}) dA - \psi' = 0 \quad (3)$$

$$\delta^2 V = \frac{1}{2} \int \left[(N'_{ij} \varepsilon'_{ij} + M'_{ij} \chi'_{ij}) + \lambda (N^F_{ij} \varepsilon''_{ij} + N''_{ij} \varepsilon^F_{ij}) \right] dA = 0 \quad (4)$$

Se llega así a un problema de autovalores a través de los requerimientos de la expresión (4), donde el primer paréntesis conduce a la matriz de rigidez del sistema y el segundo a la matriz carga-geometría. Esta última expresión $\delta^2 V$ es de interés, ya que controla estabilidad del equilibrio de la trayectoria fundamental y es desde donde se derivan los estados críticos como un problema de autovalores. En esta componente cuadrática se pueden identificar tres contribuciones separadas: la que surge de la energía membranaral lineal (U_m) que tiene en cuenta la parte lineal de esfuerzos y deformaciones membranarales, la energía flexional lineal (U_b) que considera los momentos flectores y curvaturas lineales y la energía de deformación "linealizada" que incluye la parte no lineal de esfuerzos y deformaciones membranarales (V_2) como se indica en (5).

$$\begin{aligned}
 U_m &= \frac{1}{2} \int N'_{ij} \varepsilon'_{ij} dA \\
 U_b &= \frac{1}{2} \int M'_{ij} \chi'_{ij} dA \\
 \lambda V_2 &= \frac{1}{2} \int (N^F_{ij} \varepsilon''_{ij} + N''_{ij} \varepsilon^F_{ij}) dA
 \end{aligned} \tag{5}$$

El término V_2 contiene las deformaciones y los esfuerzos precríticos (N^F_{ij} y ε^F_{ij}) correspondientes a la trayectoria fundamental. U_m y U_b no dependen del estado de carga considerado pero V_2 sí.

2.2 Análisis de bifurcación clásico

La modelización de la cáscara por Elementos Finitos plantea, a partir de la energía total del sistema, la condición de equilibrio para el cálculo de los estados precríticos:

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{u}^F + \lambda \mathbf{P} = 0 \tag{6}$$

donde \mathbf{K}_0 es la matriz de rigidez lineal de la cáscara, \mathbf{u}^F es el vector desplazamientos nodales, λ el parámetro de carga y \mathbf{P} el vector de cargas escaladas mediante λ . La matriz de rigidez \mathbf{K}_0 , para pequeños desplazamientos, contiene el aporte de la energía membranal \mathbf{K}_m y de la energía flexional \mathbf{K}_b :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_0 &= \mathbf{K}_m + \mathbf{K}_b \\
 \mathbf{K}_0 &= \int (\mathbf{B}_0^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0) dA
 \end{aligned} \tag{7}$$

La matriz de rigidez \mathbf{K}_0 se expresa en función de \mathbf{B}_0 que contiene las funciones de interpolación y la matriz constitutiva \mathbf{D} obtenida a partir de las características del material. El problema de autovalores planteado en (4) se expresa:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{K}_0 - \lambda^C \mathbf{K}_\sigma(N^F)] \Phi &= 0 \\
 \mathbf{K}_\sigma &= \int (\mathbf{G}^T \mathbf{N}^F \mathbf{G}) dA
 \end{aligned} \tag{8}$$

donde λ^C es la carga crítica del problema, y Φ es el autovector que indica la deformada asociada al modo crítico. La matriz \mathbf{K}_σ tiene en cuenta las componentes no lineales del campo de deformaciones a través de la matriz \mathbf{G} que vincula los giros con los desplazamientos y también incluye las tensiones iniciales en la trayectoria fundamental mediante \mathbf{N}^F .

2.3 Análisis de Rigidez Reducida

Croll y colaboradores¹⁻⁶ han mostrado en diferentes trabajos el rol fundamental de la energía membranal en el fenómeno de pandeo de las cáscaras. La teoría de Rigidez Reducida se basa en el hecho que modos de pandeo cuya estabilidad depende de una significativa

contribución de rigidez membranal son susceptibles de sufrir reducciones importantes en las cargas de pandeo. Estas reducciones ocurren cuando las condiciones físicas permiten que imperfecciones iniciales e interacción de modos poscríticos erosionen la energía membranal. Croll⁷ plantea los postulados de esta teoría: a) El primer postulado expresa que *no linealidades significativas geométricas surgen por cambios en la resistencia membranal*. b) El segundo postulado dice que *pérdidas de rigidez poscríticas significativas pueden ocurrir solamente cuando el pandeo inicial tiene una contribución a su resistencia de la energía membranal*. c) El tercer postulado plantea que *los límites inferiores para pandeo en un modo particular están dados por un análisis en el cual la energía membranal es eliminada*.

El planteo de rigidez reducida consiste en eliminar en el problema de autovalores expresado en la ecuación (8), el aporte de las componentes estabilizantes de energía, previo análisis de la distribución de las mismas. Expresando la energía potencial total del sistema e identificando aquellas componentes de energía membranal que puede ser perdida durante el pandeo, el método de límites inferiores consiste en un análisis de autovalores para el mismo sistema pero con las componentes apropiadas de energía membranal eliminadas.

Esta eliminación debe hacerse en el cálculo del punto crítico de manera que la energía potencial total no cuente con el aporte de estas componentes estabilizantes. Así, el nuevo punto crítico hallado representa un límite inferior ya que las componentes que aportaban al equilibrio en forma estabilizante no son tenidas en cuenta. Este planteo afecta al primer término en la ecuación (8), es decir en la matriz K_0 , en lo que corresponde al aporte de la parte lineal del campo de tensiones y deformaciones pero no introduce modificaciones en K_σ que tiene en cuenta las tensiones previas al punto crítico que son evaluadas con la energía potencial con todas sus componentes.

De esta manera la ecuación (6) se resuelve sin modificaciones obteniendo el estado tensional correspondiente al punto crítico para usar en el cálculo de K_σ en la ecuación (8) pero se introducen cambios en el cálculo de K_0 correspondiente a la misma ecuación eliminando los términos correspondientes a las energías membranales estabilizantes. Así la ecuación resulta:

$$\left[(K_b) - \lambda^* K_\sigma(N^F) \right] \Phi^* = 0 \quad (9)$$

donde λ^* y Φ^* son el nuevo autovalor y autovector del problema de rigidez reducida.

3 MODELO NUMÉRICO

La implementación mediante Elementos Finitos se realiza mediante el código ALREF^{8,9} realizando modificaciones para incorporar la evaluación de las diferentes componentes de energía y el cálculo de autovalores con la energía reducida. ALREF es un código orientado al análisis de tensiones y estabilidad de cáscaras de revolución bajo cargas axilsimétricas y no axilsimétricas. Este programa, entre otras capacidades, permite realizar análisis de tensiones considerando no linealidad geométrica y evaluar autovalores para trayectoria fundamental lineal para cáscaras con simetría axial. Se basa en la teoría de cáscaras delgadas y considera el material como lineal elástico. El programa utiliza un elemento curvo unidimensional que

discretiza la cáscara en el sentido del meridiano y representa el comportamiento del paralelo mediante series de Fourier. El elemento tiene tres nodos: uno en cada extremo con cuatro incógnitas (desplazamientos u, v, w y giro $\partial u/\partial s$) y un nudo central con seis incógnitas ($u, \partial u/\partial s, v, \partial v/\partial s, w, \partial w/\partial s$), donde u es el desplazamiento en el sentido del meridiano, v es el desplazamiento en el sentido del paralelo y w es el desplazamiento en el sentido de la normal a la cáscara. La geometría se define por una interpolación cúbica en base a las coordenadas y tangentes en cada nodo, mientras que el campo de desplazamientos se aproxima por funciones cúbicas para el desplazamiento en el plano de la cáscara y quinticas para el desplazamiento fuera del plano.

Para aislar la importancia relativa de las distintas componentes de energía es útil separar la contribución de las componentes de la energía de deformación lineal membranal y flexional, expresada en las ecuaciones (5). Estas componentes son evaluadas con los esfuerzos y deformaciones correspondientes al punto crítico. La energía membranal se separa en la componente meridional (U_{mss}), la componente circunferencial (U_{mtt}) y la componente torsional (U_{mst}) según las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 U_m &= U_{mss} + U_{mtt} + U_{mst} \\
 U_{mss} &= \frac{1}{2} \int N'_{ss} \epsilon'_{ss} dA \\
 U_{mtt} &= \frac{1}{2} \int N'_{tt} \epsilon'_{tt} dA \\
 U_{mst} &= \frac{1}{2} \int N'_{st} \epsilon'_{st} dA
 \end{aligned} \tag{10}$$

La energía flexional también se separa en la componente meridional (U_{bss}), la componente circunferencial (U_{btt}) y la componente torsional (U_{bst}) según las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 U_b &= U_{bss} + U_{btt} + U_{bst} \\
 U_{bss} &= \frac{1}{2} \int M'_{ss} \chi'_{ss} dA \\
 U_{btt} &= \frac{1}{2} \int M'_{tt} \chi'_{tt} dA \\
 U_{bst} &= \frac{1}{2} \int M'_{st} \chi'_{st} dA
 \end{aligned} \tag{11}$$

Para cargas axilsimétricas, el análisis de tensiones planteado en la ecuación (6) y el cálculo de autovalores planteado en la ecuación (8) resulta no acoplado para las diferentes armónicas, lo que permite hacer para cada armónica un análisis de las componentes de energía y hallar el modo crítico con componentes en una sola armónica. De esta manera se puede hallar la distribución de energías para las diferentes armónicas y también hallar la carga crítica con energía reducida para un determinado espectro de armónicas. Para cargas no axilsimétricas,

hay un acoplamiento de modos en el cálculo de autovalores por lo que se hace necesario especificar cuales y cuantas armónicas serán utilizadas en el cálculo de las componentes de energía asociadas al punto crítico y para el planteo del problema de autovalores con energía reducida.

Croll⁶ propone una metodología alternativa para calcular el nuevo autovalor usando un factor de reducción η calculado en función de las energías flexional y membranar:

$$\lambda^* = \eta \lambda^C \quad \text{y} \quad \eta = \frac{U_b}{U_m + U_b} \quad (12)$$

En este trabajo este factor es usado como referencia para el cálculo de autovalores con energía reducida.

La metodología usada plantea, en una primera etapa, calcular el estado de esfuerzos y deformaciones y resolver el problema de autovalores con la energía potencial total completa, sobre la trayectoria fundamental lineal, obteniéndose el autovector Φ y la carga crítica λ^C . Con el estado de tensiones y deformaciones correspondiente al punto crítico se evalúa el aporte de las diferentes componentes de energía, obteniendo el factor de reducción que es usado posteriormente como referencia. Realizando un análisis de las componentes estabilizantes y desestabilizantes de energía, en una segunda etapa se plantea la eliminación de las componentes membranales estabilizantes. Para eliminar las componentes de energía estabilizantes (U_{mss} , U_{mtt} , U_{mst}), en el cálculo de B_0 que relaciona el campo de desplazamientos con el de deformaciones, se anulan los coeficientes que aportan a ε_{ss} , ε_{tt} y ε_{st} , respectivamente, en forma acumulativa para evaluar cómo varían las cargas críticas al eliminar las componentes de energía membranar asociadas a esas deformaciones específicas. El cálculo de K_σ , que relaciona los giros con los desplazamientos, se realiza con la matriz N^F obtenida en base al análisis estático para el estado precrítico. De esta manera se obtiene las cargas críticas con la energía reducida (λ^*) que deben resultar límites inferiores de las cargas de pandeo.

4 ANÁLISIS DE ENERGÍA Y ENERGÍA REDUCIDA

Se presentan diferentes casos estudiados: algunos relacionados con modelos correspondientes a ensayos referidos en la bibliografía y otros referidos a tanques de almacenamiento de petróleo o derivados estudiados con otra metodología. El estudio se plantea en dos etapas, los modelos correspondientes a ensayos son analizados con la teoría de rigidez reducida bajo cargas axilsimétricas y posteriormente el estudio se extiende a tanques reales bajo cargas no axilsimétricas, algunos con evidencia de daño bajo la acción del viento.

4.1 Casos estudiados bajo cargas axilsimétricas

En diferentes trabajos realizados por Croll y colaboradores^{2,3,5} se presentan resultados relacionados con cáscaras cilíndricas en base a modelos sometidos a ensayos. Con el objeto de validar la metodología y los resultados hallados se analizan estos modelos, incorporando en el estudio casos con otras relaciones geométricas para evaluar el comportamiento de las

componentes de energía. Batista y Croll² trabajaron con relaciones $L/r=4.06$ y $r/t= 405$, Yamada y Croll⁵ con $L/r=4.06$ y $r/t=227$ y Sosa y Godoy¹⁰ con $L/r=2$ y $r/t=405$. En todos los casos el cilindro tiene $r= 100$ mm y material caracterizado por módulo de Poisson 0.3, las longitudes usadas fueron $L= 50$ mm, 200 mm y 406 mm para las diferentes relaciones L/r y el espesor varía con valores $t=0.247$ mm , 0.5mm y 1 mm, generando relaciones $r/t= 100, 200$ y 405. Estos casos fueron estudiados con una condición de borde empotrado en un extremo y libre en el otro y uno de ellos, en particular, con los extremos simplemente apoyados. La carga aplicada en todos los casos es radial uniforme de valor unitario.

Para la condición de apoyo empotrado-libre se realizó el estudio de las componentes de energía para las distintas combinaciones L/r y r/t , como se muestra en las Figuras 1 y 2. Estas figuras muestran para relaciones $L/r= 0.5, 2.0$ y 4.06 el comportamiento de las componentes de energía membranal y flexional. También se muestran las cargas críticas para los modos clásicos de pandeo. En particular se exhiben aquellas con relaciones R/t presentadas en la bibliografía y que son representativas del comportamiento para esa relación específica L/r . Para una determinada relación L/r al variar el espesor la forma de la distribución de las diferentes componentes no cambia, solamente se observa un desplazamiento del mínimo de la curva de energía total (U) desde los modos cortos hacia los mas largos al aumentar la relación r/t .

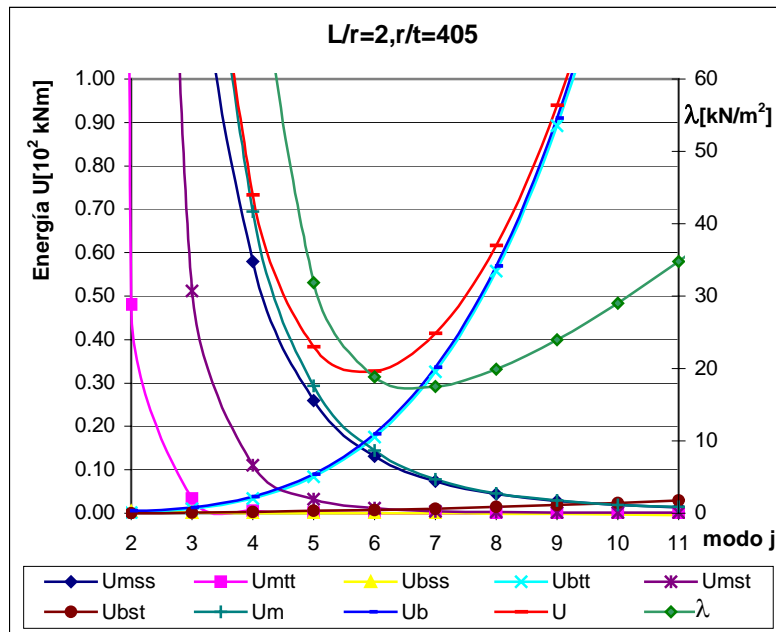


Figure 1: Componentes de energía. Cilindro empotrado en la base.

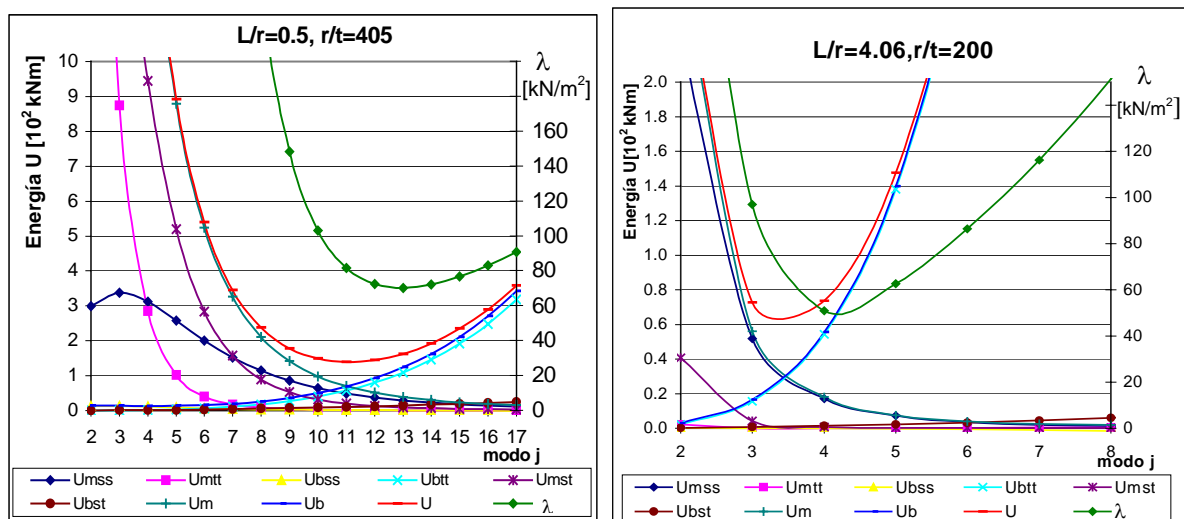


Figure 2: Componentes de energía. Cilindro empotrado en la base.

En base a las distribuciones de componentes de energía obtenidas se pueden hacer las siguientes observaciones:

- Las componentes membranales son todas positivas, es decir, estabilizantes y son significativas para los modos cortos.
- Entre las componentes flexionales, en algunos casos, la componente meridional (U_{bss}) resulta negativa.
- Las componentes flexionales son significativas para los modos largos y la dominante es la componente circunferencial (U_{btt}), las otras componentes tiene valores muy bajos.
- En el punto crítico, la mayor contribución a la energía potencial total está dada por la energía membranar.
- El principal aporte a la energía membranar en el punto crítico está representado por la componente meridional (U_{mss}).
- Si bien para modos cortos la componente membranar circunferencial (U_{mtt}) y la torsional (U_{mst}) tiene valores altos, en el punto crítico su aporte es despreciable en el caso de la circunferencial y muy pequeño en el caso de la torsional.

El examen de la distribución de componentes de energía en los modos asociados al espectro de cargas clásicas es instructivo en la decisión de qué componentes eliminar para el planteo de energía reducida.

Las cargas críticas obtenidas para cada modo presentan un mínimo que se desplaza hacia los modos largos a medida que aumenta la relación r/t , para una relación L/r determinada. La Figura 3 muestra las cargas críticas normalizadas respecto al menor valor para las geometrías correspondientes a $L/r=2$. El número de modo correspondiente a la mínima energía de deformación total es algo menor que el correspondiente a la carga crítica mínima.

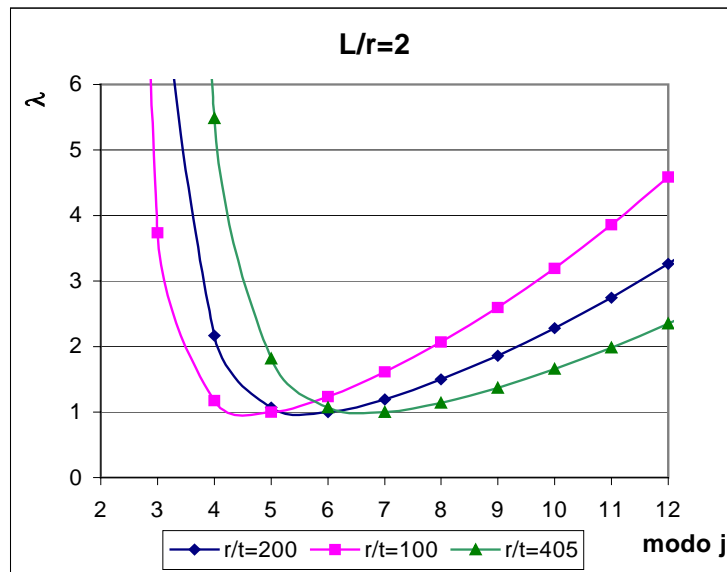
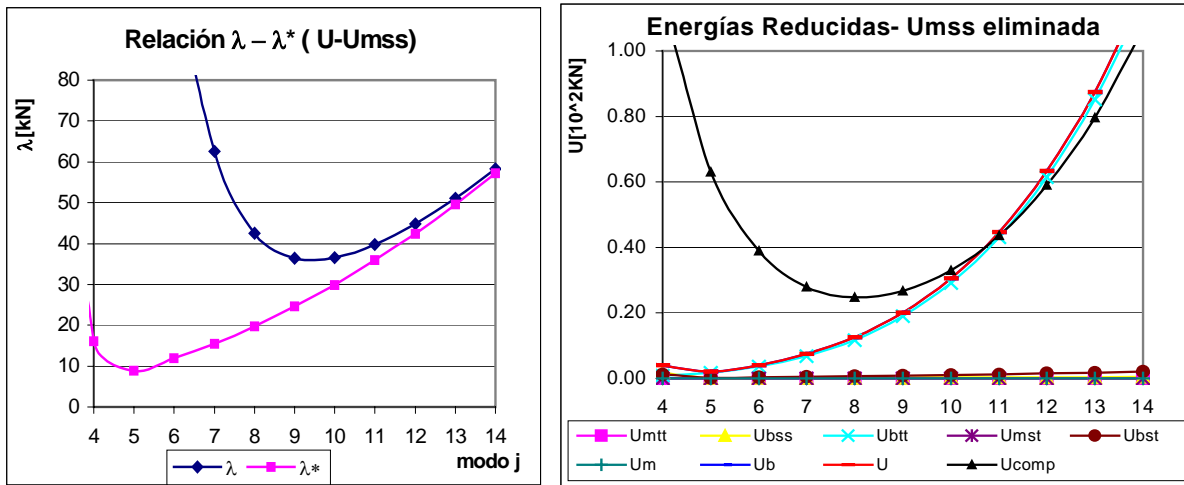


Figure 3: Espectro de cargas críticas con energía potencial completa.

Sosa y Godoy¹⁰ estudiaron un modelo semejante al planteado en la Figura 1 pero con los extremos simplemente apoyados, caso similar al estudiado por Croll y colaboradores^{2,5}. El estudio de esta geometría refleja que la distribución de componentes de energía es parecida a la planteada anteriormente, observándose que la principal componente membranal corresponde a la energía membranal meridional. La carga crítica presenta un mínimo de 36.4 kN para el modo $j=9$, verificándose en este punto que la energía membranal meridional U_{mss} representa aproximadamente el 80 % de la energía membranal.

En base al modelo con $L/r=2$ y $r/t=405$ con apoyos simplemente apoyados en los extremos, se hace el análisis de energía reducida. Debido a la importante contribución de U_{mss} a la energía membranal total en la mínima carga crítica se plantea eliminar en una primera etapa esa componente de energía y realizar el estudio de autovalores con la energía reducida. En la Figura 4(a) se muestran las cargas críticas obtenidas con la energía completa y también la obtenida considerando eliminada la componente U_{mss} , y en la Figura 4(b) la distribución de energías correspondiente con la eliminación de la componente membranal meridional. Se observa que si se eliminan todas las componentes membranales resulta una distribución similar exhibida en la Figura 4(a) con valores levemente inferiores. En general para todos los modos se presenta una reducción de las cargas críticas. En particular para $j=9$, que es el modo asociado a la menor carga crítica con energía completa, se obtiene una carga de 24.9 kN que representa un 68 % del valor hallado con un análisis considerando la energía completa ($U_m + U_b$). En la Figura 4(b) también se presenta la distribución de energía con la contribución de todas las componentes a modo de comparación. Al eliminar U_{mss} se observa que el aporte de las otras componentes membranales es prácticamente despreciable y la cáscara responde con energía flexional, principalmente la circunferencial U_{btt} . Estos resultados muestran buen acuerdo con los hallados en la bibliografía¹⁻¹⁰.



(a)Carga crítica.

(b)Distribución de energía.

Figura 4: Componente de energía membranar Umss eliminada.

Si se realiza un análisis similar con una diferente condición de vínculo, empotrado en la base, se obtienen resultados semejantes con una reducción de las cargas críticas tal como lo hallado por Croll y Batista². En la Figura 5 se muestra una comparación para las diferentes condiciones de vínculo.

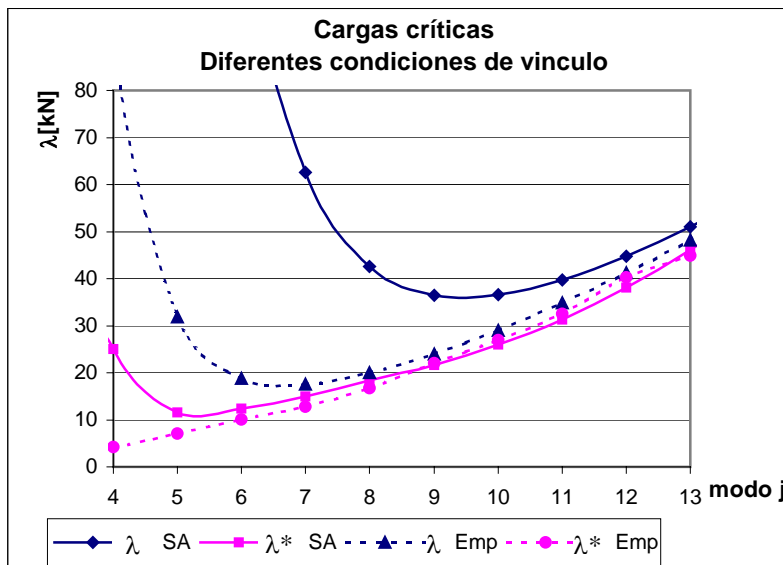


Figure 5: Comparación Cargas críticas en cilindro con diferentes condiciones de vínculo.

En ambos casos se observa que los valores hallados con energía reducida limitan inferiormente las cargas críticas halladas con la energía potencial completa, la reducción obtenida al eliminar todas las componentes membranarales de energía es del orden del 60% para extremos simplemente apoyados y 73% para empotrado en la base y extremo superior

libre. Estos valores son inferiores a los que se obtendrían con el factor de reducción η .

4.2 Casos estudiados bajo cargas no axilimétricas

Las relaciones de aspecto de los modelos sometidos a ensayos evaluados anteriormente varían entre $0.5 \leq L/r \leq 4$ y $100 \leq r/t \leq 400$, mientras que en los tanques de almacenamiento de grandes dimensiones las variaciones son del orden de $0.3 \leq L/r \leq 2.4$ y $1000 \leq r/t \leq 3000$ aproximadamente. Flores y Godoy^{11,12} han estudiado el problema de pandeo de tanques contenedores de petróleo y derivados sometidos a la acción del viento con modelos numéricos considerando no linealidad geométrica e imperfecciones. Estos modelos son estudiados con la metodología de energía reducida a los efectos de comparar resultados.

La distribución de presión de viento adoptada sobre las paredes cilíndricas del tanque fue la correspondiente a la recomendación ACI-ASCE-1991 usada anteriormente^{11,12,13}. La distribución circunferencial aplicada en la cáscara cilíndrica está dada por:

$$p = \lambda \sum_{i=1}^n c_i \cos(i\varphi) \quad (13)$$

con los siguientes coeficientes de Fourier: $C_0=0.2765$, $C_1=-0.3419$, $C_2=-0.5418$, $C_3=-0.3872$, $C_4=-0.0525$, $C_5=0.0771$, $C_6=0.0039$, $C_7=-0.0341$, donde p es la presión externa del viento, λ es el parámetro usado para aumentar la carga y φ es el ángulo con respecto a la dirección del viento. Se considera una distribución de presión constante en la dirección vertical.

Uno de los casos analizado es un tanque de acero cilíndrico de espesor constante sin techo que falló en 1995 estudiado por Flores y Godoy⁹⁻¹¹. El tanque tiene un radio de 19 m, una altura de 7.6m y un espesor constante de 0.01m. El material constitutivo es acero con un módulo de Elasticidad de $2.06 \cdot 10^{11}$ N/m² y coeficiente de Poisson 0.3. En una primera etapa se realiza un análisis de las componentes de energía para los modos clásicos de pandeo sometido a carga radial uniforme constante para observar las características de la distribución de componentes de energía y obtener el rango de armónicas a usar en el cálculo de autovalores. En la Figura 6 se muestra la distribución de las componentes de energía y el espectro de cargas críticas para diferentes armónicas, bajo la acción de una carga radial uniforme. La energía se presenta adimensionalizada a través del factor ω tal que:

$$U = \omega \frac{\pi r L t E}{4(1 - \nu^2)} \quad (14)$$

En este caso se observa una distribución de componentes de energía similar a la obtenida en el punto anterior, es decir predominio de las componentes membranales para modos cortos y de las componentes flexionales para modos largos. La menor carga crítica es de 1817 N/m² correspondiente a la armónica 22, para la cual la energía membranar meridional U_{ms} representa el 84% del total de la energía membranar.

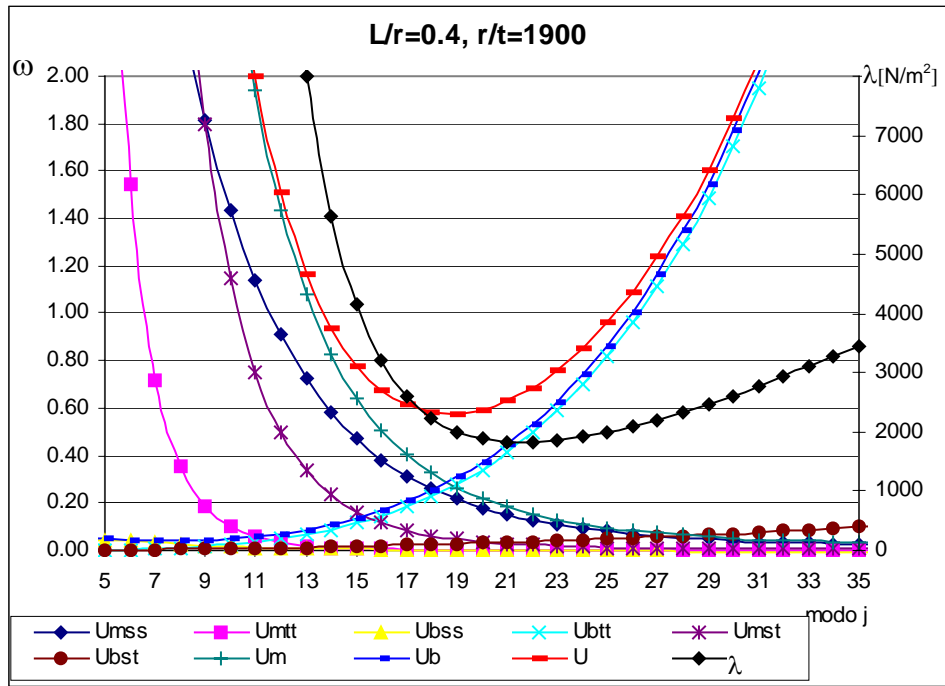


Figure 6: Espectro de componentes de energía y cargas críticas.

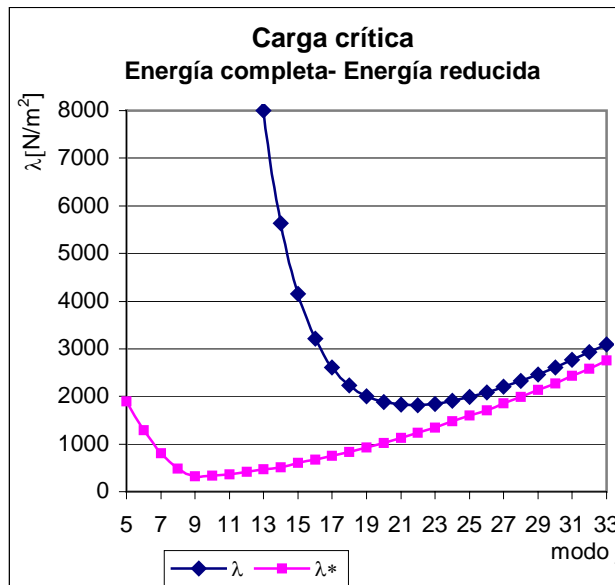


Figure7: Cargas críticas con energía potencial completa y reducida.

Para comprobar la metodología planteada para estas relaciones geométricas, también se hace un análisis de autovalores con energía reducida para esta carga radial uniforme. Las

componentes membranales resultan todas positivas, es decir estabilizantes. Como en el caso anterior se eliminan las diferentes componentes membranales en forma paulatina comenzando con la meridional que es la predominante. En la Figura 7 se muestra la reducción de las cargas críticas obtenida con la eliminación de todas las componentes membranales y en la Tabla 1 se muestran los valores obtenidos para la carga crítica con la energía completa y las sucesivas eliminaciones de componentes membranales. Al anular solamente U_{mss} se obtiene una carga crítica del orden del 77% de la hallada con la energía completa para la armónica 22, mientras que la eliminación de la componente circunferencial no tiene efecto notable. Al suprimir el aporte de todas las componentes membranales se llega a una carga crítica del 68% del valor calculado con toda la energía. Este valor es inferior al calculado con el factor de reducción η planteado por Croll³ como una alternativa más sencilla para obtener límites inferiores de cargas críticas que en este caso era 0.78. Se observa que este porcentaje de reducción corresponde al obtenido eliminando solamente la componente meridional U_{mss} .

Modo j	Carga crítica [kN/m ²]			
	Energía completa	U_{mss} eliminada	U_{mss} y U_{mtt} eliminada	U_{mss} , U_{mtt} y U_{mst} eliminada
22	1817	1396	1390	1234

Tabla 1: Cargas críticas con energía potencial en versión completa y reducida.

Para realizar el estudio con cargas de viento se consideran 17 armónicas ($j=17$ a 35) para tener en cuenta el acoplamiento de modos que se presenta bajo la acción de cargas no axilsimétricas. En el cálculo de autovalores considerando la contribución de todas las componentes de energía se obtiene una carga crítica de 2209 N/m^2 . Del cálculo de las componentes de energía resultan los valores mostrados en la Tabla 2, en este caso no se obtiene una distribución para los distintos modos considerados como en el caso de carga axilsimétrica sino valores únicos correspondientes al acoplamiento de las armónicas consideradas.

Energías [kNm]								
U_{mss}	U_{mtt}	U_{mst}	U_{bss}	U_{btt}	U_{bst}	U_m	U_b	U
2.33	0.029	0.45	-0.023	10.5	0.74	2.81	11.22	14.03

Tabla 2: Componentes de energía en el punto crítico.

Se observa que todas las componentes membranales son estabilizantes y que U_{mss} representa el 84% de toda la energía membranal. En el cálculo de autovalores con la energía reducida se obtienen los valores mostrados en la Tabla 3, con las sucesivas eliminaciones como lo planteado anteriormente. La menor carga crítica obtenida representa un 68% de la obtenida sin eliminar las componentes membranales mientras el factor η es 0.8 en este caso.

Carga crítica [kN/m ²]			
Energía completa	Umss eliminada	Umss y Umstt eliminada	Umss, Umstt y Umst eliminada
2209	1548.5	1548	1493

Tabla 3: Cargas críticas con energía potencial en versión completa y reducida.

Este tanque fue estudiado por Flores y Godoy¹¹ mediante el código ALPHA que permite obtener trayectorias poscríticas no lineales incluyendo imperfecciones geométricas, mediante elementos de cáscara. Con una imperfección de 10mm de amplitud en la forma del modo crítico la presión obtenida fue de 1561 N/m² que corresponde a una velocidad del viento de 51 m/s (183 km/h), del orden de la registrada en la falla del tanque. Con esta metodología se obtiene un valor ligeramente inferior, de valor 1493 N/m². También este caso fue estudiado por Jaca, Godoy y Flores¹³ con el programa de propósitos múltiples ABAQUS, considerando trayectoria no lineal geométrica. En este caso se obtuvieron reducciones mucho menores en la carga crítica, ya que las imperfecciones consideradas eran de un menor valor debido a que el interés principal de estudio era la trayectoria poscrítica.

Flores y Godoy¹² estudiaron otro conjunto de tanques con relaciones $0.5 \leq r/L \leq 2.4$ y $1250 \leq r/t \leq 2000$, considerando trayectorias con no linealidad geométrica e imperfecciones. Las geometrías estudiadas en este trabajo son analizadas con esta metodología de rigidez reducida para verificar resultados. En todos los casos se obtiene una distribución de las componentes de energía similar a los casos estudiados anteriormente, cuando las estructuras están sometidas a carga radial uniforme. Para este estado de carga, al eliminar al componente de energía membranal axial Umss se obtiene una carga crítica del orden del 75% de la obtenida con la energía completa, cuando además se reduce la componente membranal circunferencial no se producen cambios y al anular también la componente asociada a torsión la carga hallada es el 66 % de la correspondiente a energía completa. El comportamiento es similar al obtenido anteriormente.

Al considerar las cáscaras sometidas a la acción del viento la carga crítica con la energía completa y con el análisis de energía reducida, se obtienen cargas críticas que están indicadas en la Tabla 4. Para cada tanque analizado se indican, además, el factor de reducción η , la reducción obtenida como relación de cargas críticas y la relación entre la componente membranal meridional y la torsional respecto a la membranal total en el punto crítico.

		Energía completa	Umss eliminada	Umss y Umstt eliminada	Umss, Umstt y Umst eliminada
r/L=3 y r/t=2000	λ [N/m ²]	2300.20	1644.00	1644.00	1196.30
	η	0.79			
	λ / λ^*		0.71	0.71	0.52
	Umss/Um	0.81			
	Umst/Um	0.18			

r/L=2 y r/t=1750	λ [N/m ²]	2208.70	1302.90	1302.90	1180.90
	η	0.77			
	λ / λ^*		0.59	0.59	0.53
	Umss/Um	0.85			
	Umst/Um	0.15			
r/L=1 y r/t=1500	λ [N/m ²]	1774.80	1046.80	1046.20	1010.20
	η	0.80			
	λ / λ^*		0.59	0.59	0.57
	Umss/Um	0.91			
	Umst/Um	0.09			
r/L=0.5 y r/t=1250	λ [N/m ²]	1586.60	1564.40	1532.90	1527.90
	η	0.80			
	λ / λ^*		0.99	0.97	0.96
	Umss/Um	0.93			
	Umst/Um	0.06			

Tabla 4: Resultados estudio con energía completa y reducida.

El primer caso mostrado en la Tabla 4 es el que presenta una reducción mayor. La carga crítica pasa de $\lambda=2300$ N/m², similar a la indicada en el trabajo anterior, al valor $\lambda^*=1196$ N/m² con las sucesivas eliminaciones de las diferentes componentes la carga. Este valor representa el 52% del obtenido con la energía completa. En el trabajo anterior la carga llegaba al 58% de la correspondiente a la estructura perfecta para la imperfección $\xi=2t$. Es decir que el valor obtenido es, en este caso, efectivamente un límite inferior a la carga de pandeo. El factor de reducción η obtenido por la relación de energías en el punto crítico es 0.79, superior al registrado con la reducción de todas las componentes de energía, lo que indicaría que no es suficiente para evaluar cargas límite inferiores. En la tabla también se indica la relación de la componente membranal axial respecto a la total membranal para el punto crítico, se observa que es predominante respecto a las otras componentes.

En todos los casos los resultados alcanzados muestran que la reducción de la carga crítica hallada es mayor que la indicada en el trabajo de referencia. Es decir que las cargas obtenidas representan límites inferiores a las cargas críticas obtenidas considerando la estructura con diferente orden de imperfecciones. En los casos analizados se observa que cuanto mayor es la componente membranal Umss respecto a Um es menor la reducción de la carga crítica obtenida. El aporte de la componente membranal circunferencial es despreciable y cuanto mayor es la contribución de la componente torsional se observa una reducción mayor.

5 CONCLUSIONES

En este trabajo se aplicó la teoría de rigidez reducida a estructuras cilíndricas con diferentes condiciones de apoyo y relaciones geométricas en base a un modelo de elementos finitos. Para ello se modificó un programa de propósitos específicos (ALREF), incorporando en una primera etapa la evaluación de las componentes de energía potencial que permitió

identificar componentes membranales estabilizantes. Se observó el rol predominante de la energía membranal axial en el estado crítico, fundamental en la capacidad de llevar cargas en la etapa poscrítica que es dominada por la componente flexional circunferencial.

En una segunda etapa se incorporó a ALREF los conceptos de rigidez reducida realizando un análisis de estabilidad sobre un modelo que tiene su rigidez membranal suprimida. De esta manera se pudo evaluar cargas críticas considerando eliminadas las componentes estabilizantes. Esta metodología resultó adecuada para evaluar límites inferiores a cargas de pandeo con sensibilidad ante imperfecciones, para estructuras cilíndricas sometidas a carga axilsimétrica, con resultados provenientes de ensayos, y para tanques de grandes dimensiones bajo la acción de cargas no axilsimétricas como el viento. La metodología de rigidez reducida permite solucionar los problemas de la metodología de energía reducida, que se reportaron recientemente ¹⁴, en la que surgen problemas serios debido a que el modo de pandeo del problema clásico de autovalores no es el mismo que el que surge de un análisis no lineal cinemática con imperfecciones (o del que surgiría en experimentos de túnel de viento). La razón por la que la metodología del presente trabajo no tiene dificultades es porque no supone ninguna forma para el problema de energía reducida, sino que la calcula como parte del análisis de autovalores de rigidez reducida.

Las modificaciones incorporadas en este programa de propósitos específicos se presentan como una alternativa para obtener resultados similares a los obtenidos con seguimiento de trayectoria con imperfecciones, que no involucra requerimientos computacionales sofisticados y con menor tiempo de ejecución. También es una herramienta importante para predecir límites inferiores a cargas con sensibilidad ante imperfecciones.

Este mayor conocimiento de los componentes de energía en el estado crítico permite una mayor comprensión del fenómeno de pandeo en el punto crítico y poscrítico inicial.

Agradecimientos: Los autores agradecen el apoyo de subsidios de la Universidad Nacional del Comahue y CONICET, para llevar a cabo esta investigación. Godoy y Flores son miembros de la carrera del investigador de CONICET.

6 REFERENCIAS

- [1] J.G.A.Croll, "Towards simple estimates of shell buckling loads", *Der Stahlbau*, Part I, Heft, August; Part II Heft, September(1975).
- [2] R.C.Batista and J.G.A.Croll, "A design approach for unstiffened cylindrical shells under external pressure". Int. Conf. on *Thin Walled Structures*, University of Strathclyde, Crosby Lockwood, Glasgow (1979).
- [3] G.Zintillis and J.G.A.Croll, "Pressure buckling of end supported shells of revolution", *Engineering Structures*, vol. 4, pp. 222-232 (1982).
- [4] S.Yamada and J.G.A.Croll, "Nonlinear Buckling Response of Pressure Loaded Cylindrical Panels and its Interpretation for Design". *Technical Reports*, Tohoku University, Vol. 52, N°2, (1988).
- [5] S.Yamada and J.G.A.Croll, "Buckling and Post-buckling Characteristics of Pressure-loaded Cylinders", *Journal of Applied Mechanics*, vol. 60, pp. 290-299 (1993).
- [6] J.G.A.Croll, "Towards a rationally based elastic-plastic shell buckling design

- methodology”, *Thin Walled Structures*, vol. 23, pp. 67-84 (1995).
- [7] J.G.A.Croll, “Shell Buckling: A return to basic mechanics”, *Applied Mechanics in the Americas*, vol. 1, American Academy of Mechanics, pp. 410-417 (1995).
- [8] F.G.Flores, “Análisis no lineal geométrico y estabilidad elástica de láminas de revolución mediante elementos finitos con aplicaciones a recipientes a presión”, Tesis Doctoral, Universidad Nacional de Córdoba, (1990).
- [9] F.G.Flores and L.A.Godoy, “Instability of shells of revolution using ALREF: studies for wind loaded shells”, *Buckling of shells structures, on land, in the sea and in the air*, Elsevier, American Academy of Mechanics, pp. 213-222, (1991).
- [10] E.M.Sosa and L.A.Godoy, “Computation of lower-bound buckling loads using general-purpose Finite Element codes”, submitted to *Computers and Structures*, (2005).
- [11] F.G.Flores and L.A.Godoy, “Buckling of short tanks due to hurricanes”, *Engineering Structures*, Elsevier, Vol.20, N°8, pp. 752-760, (1998).
- [12] L.A.Godoy and F.G.Flores, “Imperfection Sensitivity to elastic buckling of wind loaded open cylindrical tanks”, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol.13, N°5, pp. 533-542, (2002).
- [13] R.C.Jaca, L.A.Godoy and F.G.Flores, “Análisis poscrítico de tanques de pared delgada bajo cargas de viento”, *I South American Congress on Computational Mechanics*, vol. XXI, pp. 1842-1861, (2002).
- [14] E.M.Sosa, “Computacional Buckling Analysis of Cylindrical Thin-Walled Aboveground Tanks”, Tesis doctoral, Universidad de Puerto Rico, Mayagüez, (2005).