

ESTRATEGIA DE ADAPTACIÓN DE MALLAS PARA PROBLEMAS AEROESPACIALES Y AERONÁUTICOS

Gustavo Bono^a, Tales L. Popiolek^b y Armando M. Awruch^c

^aPrograma de Posgraduación en Ingeniería Mecánica (PROMEC), Universidad Federal de Rio Grande do Sul, Av. Sarmiento Leite 425, 90050-170 Porto Alegre, Brasil, gbono@mecanica.ufrgs.br,
<http://www.mecanica.ufrgs.br/promec>

^bFundación Universidad Federal do Rio Grande, Av. Itália km 8, Campus Carreiros, 96201-900 Rio Grande, Brasil, dmttales@furg.br, <http://www.furg.br>

^cCentro de Mecánica Aplicada y Computacional, Universidad Federal de Rio Grande do Sul, Av. Osvaldo Aranha 99, 90035-190 Porto Alegre, Brasil, amawruch@ufrgs.br,
<http://www.ppgec.ufrgs.br/cemacom>

Palabras clave: Flujos compresibles, adaptación de malla, método de los elementos finitos.

Resumen. En este trabajo se presenta una estrategia de adaptación de malla que puede ser explorada para la simulación numérica de problemas aerospaciales y aeronáuticos caracterizados por la presencia de regiones con fuertes gradientes. Para la discretización temporal y espacial de las ecuaciones gobernantes se usa un esquema explícito de Taylor-Galerkin de un paso y un elemento tetraédrico. El algoritmo adaptativo es gobernado por indicadores de errores que mapean las regiones con significativo cambio en las propiedades del flujo. En estas regiones, el esquema adaptativo es aplicado con el objetivo de mejorar la calidad de la solución numérica usando un proceso de refinamiento. Finalmente, algunos ejemplos sobre geometrías simples son presentados con el objetivo de mostrar la precisión y robustez del método adaptativo implementado.

1 INTRODUCCIÓN

En los últimos años la Dinámica de los Fluidos Computacional (DFC) comenzó a destacarse como una importante herramienta para la fase de proyecto en los diferentes campos de la ingeniería y en particular en las industrias aeronáutica y aeroespacial. El rápido y creciente progreso en las técnicas de generación de mallas y en los métodos numéricos permitió incorporar detalles completos de la geometría y la simulación eficiente de las ecuaciones de Euler y de Navier-Stokes con varios esquemas de solución.

Los métodos de adaptación de malla son estrategias eficientes que tienen una importante aplicación en problemas donde se desarrollan algunos fenómenos en determinadas regiones localizadas tales como onda de choque, capa límite, etc.. El análisis numérico de estos problemas puede llevar a la necesidad de utilizar mallas razonablemente refinadas. Sin embargo, la complejidad de la solución no permite que se conozca inicialmente las localizaciones de estas regiones.

En la DFC los métodos adaptativos generalmente se basan en la siguiente idea: cuando el error en la solución es muy grande, el tamaño del elemento y/o la localización de los nodos y/o la orden de la aproximación deben ser cambiadas con la finalidad de disminuir el error. La idea de intentar reducir el error implica que se puede estimar de alguna manera, por lo tanto, el primer paso en adaptación es generar una medida de la calidad de la solución numérica. Esta medida puede variar desde el análisis *ad hoc* de los indicadores de error definidos en función de las principales variables hasta una estimativa rigurosa del error *a posteriori*.

A partir del momento que se tiene la estimativa del error se necesita determinar cómo hacer para reducir sistemáticamente este error hasta el nivel deseado. En general se pueden adoptar diferentes estrategias siendo las principales: (a) refinar/desrefinar el tamaño de la malla; (b) relocación de los nodos y (c) incrementar la orden de la aproximación. Básicamente el método de adaptación de malla tiene como objetivo principal alcanzar una solución numérica de alta precisión con el menor costo computacional.

El propósito de este trabajo es presentar una estrategia de adaptación de malla desarrollada por Popiolek y Awruch (2006) y que puede ser explorada para la simulación numérica de típicos problemas aeroespaciales y aeronáuticos caracterizados por la presencia de fuertes ondas de choque. El algoritmo adaptativo es gobernado por los indicadores de error que mapean las regiones con significativo cambio en las propiedades del flujo. En estas regiones, el esquema adaptativo es aplicado con el objetivo de mejorar la calidad de la solución numérica usando un proceso de refinamiento para elementos tetraédricos. La estrategia de refinamiento se valida con tres aplicaciones en flujos compresibles en régimen supersónico. El primer caso consiste en el problema clásico de la placa plana en flujo viscoso. Los otros dos ejemplos consideran un flujo invíscido sobre una esfera y sobre un cuerpo formado por un cono y cilindro.

2 ECUACIONES GOBERNANTES

Considerando las ecuaciones de Navier-Stokes en forma conservativa y eliminando el término de las fuentes externas se tiene que

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (1)$$

donde $\Omega \subset R^{n_{sd}}$ y $(0, T)$ son los dominios espacial y temporal, respectivamente, donde $n_{sd} = 3$ es el número de dimensiones espaciales y Γ indica el contorno de Ω . Las coordenadas espacial y temporal son dadas por x_i y t . \mathbf{U} es el vector de incógnitas expresado en las

variables conservativas, \mathbf{F}_i y \mathbf{G}_i son, respectivamente, los vectores de flujos no viscosos y difusivos dados por

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho v_i \\ \rho e \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F}_i = \begin{Bmatrix} \rho v_j \\ \rho v_i v_j + p \delta_{ij} \\ v_j (\rho e + p) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{G}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\tau_{ij} \\ -\tau_{ij} v_i - q_j \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

con $i, j = 1, 2, 3$. Donde v_i es la componente de velocidad en la dirección de la coordenada x_i , ρ es la densidad, p es la presión termodinámica, τ_{ij} son las componentes de tensor de tensiones viscosas, q_j es vector de flujo de calor, e es la energía total específica y δ_{ij} es el delta de Kronecker.

Para un gas perfecto, la ecuación de estado y la energía interna i son dadas por las siguientes ecuaciones

$$p = (\gamma - 1) \rho i, \quad i = c_v T = e - \frac{1}{2} v_i v_i, \quad (3)$$

donde T es la temperatura y $\gamma = c_p / c_v$ con c_p y c_v siendo el coeficiente de calor específico a presión constante y volumen constante, respectivamente. El tensor de tensiones viscosas τ_{ij} y el vector de flujo de calor q_j son definidos como

$$\tau_{ij} = \lambda v_{k,k} \delta_{ij} + \mu (v_{i,j} + v_{j,i}), \quad q_j = -k_{ij} T_{,k}, \quad (4)$$

donde $k = 1, 2, 3$. Donde k_{ij} representan las componentes del tensor de conductividad térmica, λ y μ son los coeficientes volumétricos y de viscosidad dinámica, respectivamente. La viscosidad dinámica y el coeficiente de conductividad térmica dependen de la temperatura y por lo tanto son modelados usando la ley de Sutherland (White, 1974).

El problema es completamente definido cuando las condiciones iniciales y de contorno son adicionadas a estas ecuaciones.

3 ESQUEMA DE TAYLOR-GALERKIN

El esquema numérico se obtiene expandiendo en series de Taylor las ecuaciones gobernantes y después aplicando la discretización espacial, usando el Método de los Elementos Finitos (MEF) en el contexto del clásico esquema de Bubnov-Galerkin. Con la integración temporal se obtiene una precisión de segunda orden en la derivada temporal. La formulación usa exclusivamente elementos tetraédricos lo que da una precisión espacial de segunda orden. Este elemento permite una fácil discretización sobre configuraciones complejas y puede ser integrado exactamente sin cuadratura numérica.

3.1 Esquema de Un Paso

El esquema de un paso es similar al propuesto por Donea (1984). Expandiendo en el tiempo las variables de conservación \mathbf{U} en $t = t^{n+1}$ según una serie de Taylor e incluyendo la primera y segunda derivada, obtenemos

$$\Delta \mathbf{U}^{n+1} = \Delta t \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right)^{n+s_1} + \frac{\Delta t^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} \right)^{n+s_2} + O(\Delta t^3) \quad (5)$$

donde $\Delta \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n$. Los superíndices n y $n+1$ indican las posiciones t y $t + \Delta t$ en el dominio del tiempo y Δt es el incremento de tiempo. Las variables s_1 y s_2 definen la forma de avance en el tiempo a través de esquemas implícitos, semi-implícitos y explícitos, de acuerdo con los valores adoptados tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}^{n+s_1}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{U}^n}{\partial t} + s_1 \frac{\partial \Delta \mathbf{U}^{n+1}}{\partial t} & \text{con } 0 \leq s_1 \leq 1 \\ \frac{\partial^2 \mathbf{U}^{n+s_2}}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \mathbf{U}^n}{\partial t^2} + s_2 \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{U}^{n+1}}{\partial t^2} & \text{con } 0 \leq s_2 \leq 1 \end{aligned} \quad (6)$$

Reemplazando las ecuaciones (6) en (5) y adoptando $s_1 = s_2 = 1/2$ se obtiene la siguiente expresión

$$\Delta \mathbf{U}^{n+1} = \Delta t \left(\frac{\partial \mathbf{U}^n}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta \mathbf{U}^{n+1}}{\partial t} \right) + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{U}^n}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{U}^{n+1}}{\partial t^2} \right) \quad (7)$$

Reemplazando la ecuación (1) y las derivadas segunda de \mathbf{U} en la ecuación (7), y eliminando los términos de orden superior se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{U}_{I+1}^{n+1} &= \Delta t \left[-\frac{\partial \mathbf{F}_i^n}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{G}_i^n}{\partial x_i} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mathbf{A}_k^n \frac{\partial \mathbf{F}_i^n}{\partial x_i} \right) \right] + \\ &+ \frac{\Delta t}{2} \left[-\frac{\partial \Delta \mathbf{F}_{iI}^{n+1}}{\partial x_i} - \frac{\partial \Delta \mathbf{G}_{iI}^{n+1}}{\partial x_i} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mathbf{A}_k^n \frac{\partial \Delta \mathbf{F}_{iI}^{n+1}}{\partial x_i} \right) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

donde los índices $I+1$ y I se refieren al paso iterativo actual y anterior, \mathbf{A}_k es el jacobiano convectivo que aparece en la ecuación (1) escrita en forma cuasi-lineal (Hughes y Tezduyar, 1984), $\Delta \mathbf{F}_i^{n+1} = \mathbf{F}_i^{n+1} - \mathbf{F}_i^n$ y $\Delta \mathbf{G}_i^{n+1} = \mathbf{G}_i^{n+1} - \mathbf{G}_i^n$. Las variables en el tiempo $n+1$ deben ser obtenidas a través de un proceso iterativo, una vez que están definidas en ambos miembros de la ecuación, por lo tanto es necesario usar un esquema iterativo.

Aplicando el método clásico de los residuos ponderados de Bubnov-Galerkin en el contexto del MEF en la ecuación (8) se obtiene la discretización espacial. El dominio computacional fue dividido en un número finito de elementos tetraédricos lineales no superpuestos. La matriz de masa consistente es reemplazada por la matriz de masa diagonal o discreta y el sistema de ecuaciones se resuelve con un esquema explícito.

El esquema propuesto es condicionalmente estable y la condición de estabilidad local para el elemento E es dada por

$$\Delta t_E = \eta \frac{L_E}{a + (v_i v_i)^{1/2}} \quad (9)$$

donde, Δt_E es el incremento de tiempo crítico del elemento, L_E es la menor dimensión característica del elemento E , a es la velocidad del sonido y η es un coeficiente de seguridad (en este trabajo fue adoptado $\eta = 0,1$).

Con el objetivo de estabilizar la solución numérica, especialmente en las proximidades de las ondas de choque, es necesario introducir un amortiguamiento numérico. Debido a la simplicidad y eficiencia computacional en términos de tiempo de CPU, es usado el modelo de viscosidad artificial propuesto por Argyris et al. (1990). La viscosidad artificial es adicionada

explícitamente a la solución no amortiguada, resultando en la siguiente expresión

$$\mathbf{U}_s^{n+1} = \mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{M}_L^{-1} \mathbf{D} \quad (10)$$

donde \mathbf{M}_L es la matriz de masa discreta, \mathbf{U}_s^{n+1} y \mathbf{U}^{n+1} son los vectores de las variables de campo amortiguadas y no amortiguadas en el instante de tiempo $t+\Delta t$, respectivamente. El vector de amortiguamiento artificial \mathbf{D} es dado por

$$\mathbf{D} = \sum_{ele} CFL \text{ CAF } S_{ele} [\mathbf{M} - \mathbf{M}_L]_{ele} \mathbf{U}_{ele}^n \quad (11)$$

siendo que el índice *ele* indica que la ecuación es calculada para cada elemento, $CFL = \Delta t / \Delta t_E$ es el número de Courant-Friedrichs-Lewy local, CAF es un coeficiente de amortiguamiento ficticio especificado por el usuario, \mathbf{M} es la matriz de masa consistente, S_{ele} es el sensor de distribución de presión del elemento calculado como la media de los valores nodales S_i y definido para el nodo i como

$$S_i = \sum_{ele} \frac{|(\mathbf{M} - \mathbf{M}_L)_{ele} \mathbf{p}|_i}{[\mathbf{M} - \mathbf{M}_L]_{ele} \mathbf{p}]_i} \quad (12)$$

donde \mathbf{p} es el vector con las presiones nodales del elemento *ele*. El valor del coeficiente de amortiguamiento ficticio (CAF) debe ser ajustada para cada ejemplo, siendo que un excesivo valor de la viscosidad artificial interfiere en la viscosidad física. En este trabajo fue adoptado $CAF = 1,0$.

4 REFINAMIENTO ADAPTATIVO DE MALLAS

La precisión de un esquema numérico puede aumentar notablemente cuando los elementos de la malla son refinados en la región donde suceden grandes variaciones de la solución. Otra ventaja que puede suceder es el aumento de la eficiencia computacional cuando se compara la solución de la malla adaptada con una malla refinada sin una estrategia de adaptación automática de mallas.

El objetivo final del proceso de adaptación de mallas es predecir las características de la malla *óptima*. Esta puede ser definida como la malla en la cual el número de grados de libertad requeridos para alcanzar un nivel específico de error es mínimo. Por lo tanto, la selección del indicador de error es muy importante debido a que este tiene que indicar las regiones donde se debe hacer la adaptación de la malla, o sea, de esta decisión dependerá la mayor o menor eficiencia del método.

Los fenómenos físicos del flujo son determinados con los indicadores de error. En este trabajo, los indicadores de error son semejantes a los propuestos por Argyris et al. (1990) y llevan en consideración las bajas velocidades y los gradientes de velocidad, de presión, de temperatura y de densidad. Los indicadores de error pueden ser usados individual o simultáneamente para detectar regiones donde la malla se debe adaptar. El criterio de adaptación esta fundamentado estadísticamente en el desvío padrón de distribuciones normales, ver trabajos de Kallinderis y Vijayan (1993) y Popiolek (2005).

4.1 Indicadores de error

Los indicadores de error sirven de base para mapear globalmente el comportamiento de la solución en un determinado instante. Sus valores permiten identificar las regiones del dominio computacional donde el proceso de adaptación es necesario a fin de obtener una solución de

mejor calidad.

Los principales fenómenos físicos que se consideran en las simulaciones numéricas presentadas en este trabajo son capturados con los indicadores de errores de bajas velocidades, de gradientes de velocidad, de gradientes de presión, de gradientes de temperatura y de gradientes de densidad.

El indicador de error que identifica la variación de la intensidad de los vectores de velocidades en el elemento es definido por la siguiente expresión

$$\theta_j = \left(\sum_{i=1}^4 |v_i| \right)^{-1} \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, \text{ nele} \quad (13)$$

donde $|v_i|$ es el valor absoluto de la velocidad nodal del j -ésimo elemento de la malla y $nele$ es el número total de elementos en la malla.

El indicador de error función de los gradientes de velocidad es calculado por la expresión

$$\theta_j = \left(\left| \frac{\partial v_l}{\partial l} \right| + \left| \frac{\partial v_t}{\partial l} \right| \right) h_j^2 \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, \text{ nele} \quad (14)$$

donde l es la dirección del vector gradiente de velocidad, v_l y v_t son las componentes de la velocidad media a lo largo de l y de la normal t , respectivamente, y h_j es la distancia característica del j -ésimo elemento.

Finalmente, el indicador de error calculado en función de los gradientes de escalares en el interior del elemento (gradiente de presión, temperatura y densidad) es definido por

$$\theta_j = \left(\sum_{k=1}^4 \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} \right)^{1/2} h_j \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, \text{ nele} \quad (15)$$

donde ϕ_k representa los valores nodales de la variable escalar en el k -ésimo nodo, x_i representa las direcciones cartesianas de cada componente del vector gradiente y h_j es la distancia característica del j -ésimo elemento de la malla.

4.2 Criterio de adaptación de mallas

Varios criterios de adaptación de malla fueron propuestos y entre ellos se puede mencionar los presentados por Oden et al. (1986), Devloo et al. (1987) y Ramakrishnan et al. (1990), entre otros. Normalmente, para la mayoría de los criterios es calculado un valor máximo, o un valor medio, o una norma de los datos generados por el indicador de error. Elementos con un indicador de error θ_j mayor que el valor determinado por el criterio de adaptación deben ser sometidos al proceso adaptativo.

El criterio implementado por Popiolek y Awruch (2006) fue adoptado en este trabajo. De acuerdo con este criterio, se deben refinar los elementos que satisfacen la siguiente condición

$$\theta_j > (\bar{\theta} + \beta \theta_{sd}) \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, \text{ nele} \quad (16)$$

donde $\bar{\theta}$ es la media aritmética, β es un parámetro arbitrario usado para controlar cualitativa y cuantitativamente los refinamientos y θ_{sd} es el desvío padrón del conjunto de datos obtenidos a través del indicador de error, según la siguiente expresión

$$\theta_{sd} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{nele} (\theta_i - \bar{\theta})^2}{nele}} \quad (17)$$

Considerando que los indicadores de error pueden ser representados por distribuciones Gaussianas (o normales), tres grupos de elementos pueden ser identificados. El primer grupo es formado por los elementos cuyos indicadores de error $\theta_j < (\bar{\theta} - \beta \theta_{sd})$ son considerados de alta calidad. En el segundo grupo los elementos de buena calidad se encuentran en la región central de la curva, o sea, $(\bar{\theta} - \beta \theta_{sd}) \leq \theta_j \leq (\bar{\theta} + \beta \theta_{sd})$. El tercer grupo de elementos es formado por los elementos de mala calidad por presentar indicadores de error $\theta_j > (\bar{\theta} + \beta \theta_{sd})$ y deben ser sometidos a un proceso de refinamiento. Se debe notar que a medida que β aumenta, menor es el número de elementos que deberán ser refinados ya que los elementos a ser refinados se encuentran a la derecha de $\bar{\theta} + \beta \theta_{sd}$.

4.3 Refinamiento de elementos tetraédricos

Una de las principales fases de la estrategia de adaptación de la malla es la subdivisión de los elementos. Cuidados especiales deben ser tomados para propiciar la construcción de una malla consistente y cuyos elementos presenten buena calidad geométrica.

Los elementos tetraédricos que fueron identificados para ser refinados son subdivididos en ocho nuevos elementos. Esta subdivisión es llamada de refinamiento regular de tipo 1:8. El elemento a ser refinado es llamado de *padre* y los elementos resultantes de la subdivisión son llamados de *hijos*.

El refinamiento regular es realizado según se muestra en la Figura 1, a través de los siguientes pasos:

- inicialmente las seis aristas del elemento *padre* son subdivididas por el punto medio, generando seis nuevos nodos;
- en seguida, con cada uno de los nodos de los vértices del elemento *padre* y tres nodos (recién creados) referentes a las tres aristas que comparten cada uno de los vértices, se genera un elemento y así son creados los cuatro primeros elementos *hijos*;
- del octaedro restante se determina los dos nodos que originan la menor diagonal;
- determinada la menor diagonal que define una nueva arista, los otros cuatro elementos *hijos* quedan definidos geoméricamente por el arreglo de los nodos del octaedro.

Ejecutados los procedimientos de refinamientos regulares (elementos que poseen 4 o más aristas subdivididas), restan solamente los elementos que poseen como máximo tres aristas subdivididas. En estos elementos son efectuados refinamientos denominados de irregulares, realizados sin la creación de nodos. Los refinamientos irregulares son utilizados para el cierre del proceso de refinamiento, posibilitando construir una malla consistente y al mismo tiempo suavizando la transición entre los elementos refinados y no refinados.

Si un elemento tiene una única arista subdividida entonces él es refinado en dos nuevos elementos, denominado de refinamiento irregular de tipo 1:2. Un ejemplo de este tipo de refinamiento es presentado en la Figura 1. Por otro lado, cuando el elemento posee dos aristas subdivididas, dos situaciones pueden ocurrir, las cuales están dadas en la Figura 1. En la primera situación, si las dos aristas subdivididas pertenecen a una misma face es realizado el refinamiento irregular de tipo 1:3. La segunda situación es cuando las aristas subdivididas son opuestas, en este caso el refinamiento irregular es de tipo 1:4, ver 1:4a en la Figura 1. Finalmente, cuando un elemento posee tres aristas subdivididas el refinamiento irregular es de

tipo 1:4. Tres ejemplos de este tipo de refinamiento son mostrados en la parte inferior de la Figura 1: (i) cuando las tres aristas subdivididas pertenecen a una misma face; (ii) cuando las tres aristas subdivididas poseen un nodo común y (iii) para las demás situaciones.

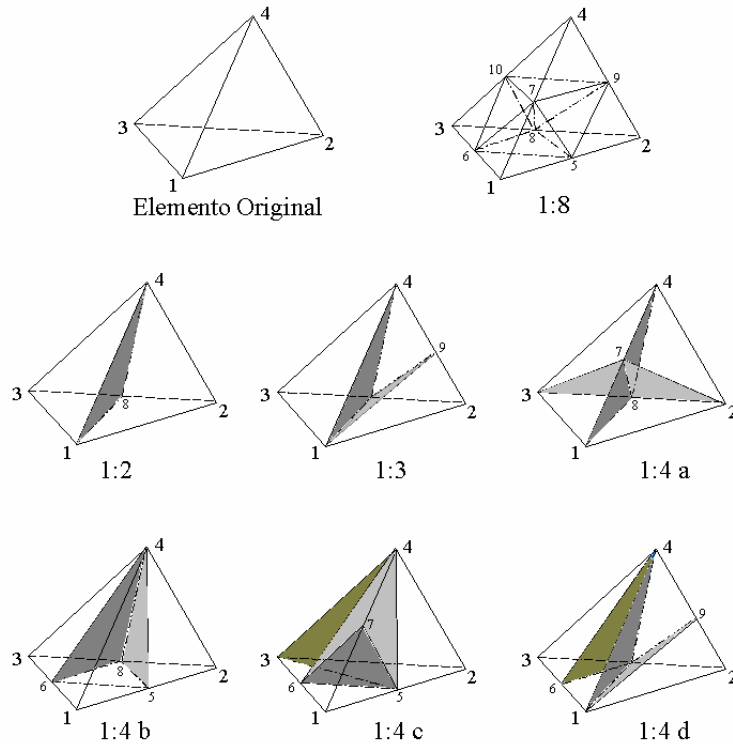


Figura 1: Elemento original y tipos de refinamientos utilizados en el presente trabajo

5 EJEMPLOS NUMÉRICOS

Algunas aplicaciones bidimensionales y tridimensionales sobre geometrías simples son presentadas con el objetivo de validar y analizar el desempeño del esquema de refinamiento adaptativo de mallas. El problema 2-D fue modelado geoméricamente como un problema 3-D siendo adoptadas las condiciones de contorno para simular un flujo bidimensional. Finalmente, se asume que el fluido tiene una relación de calor específico y número de Prandtl igual a 1,40 y 0,72, respectivamente.

5.1 Flujo viscoso sobre una placa plana con $M = 3,0$

En este primer caso es analizado el clásico ejemplo viscoso de una placa plana infinitamente delgada a cero ángulo de ataque en un flujo supersónico con $M = 3,0$ y número de Reynolds, $Re = 1000$. Las condiciones de la corriente libre son: $V_\infty = (3, 0; 0, 0; 0, 0)$, $\rho_\infty = 1,0$, $e_\infty = 6,2857$ y $p_\infty = 0,71428$, sobre la placa plana se imponen la condición de no deslizamiento para la velocidad y la energía interna (temperatura) de estagnación $i_\infty = 5,0$, finalmente, en el plano de salida las condiciones son libres. Se utiliza una malla no estructurada de 8486 elementos tetraédricos e 2824 nodos. Sobre la placa plana se tiene 41 nodos (caso bidimensional) y en la dirección perpendicular fue colocado un elemento.

Debido a las características físicas del problema (onda de choque, capa límite e interacción entre ambas) fueron empleados los siguientes indicadores de error: de baja velocidad (BV),

dado por la ecuación (13), de gradiente de velocidad (GV) dado por la ecuación (14) y de los gradientes de presión (GP) y de energía interna (GT) dados por la ecuación (15). La malla final fue obtenida después de dos procesos de refinamiento. En el primer nivel fueron utilizados los siguientes parámetros en la ecuación (16), $(\beta_{BV}; \beta_{GV}; \beta_{GP}; \beta_{GT}) = (0,7; 0,8; 0,4; 0,7)$. Para el segundo refinamiento se utilizaron $(\beta_{BV}; \beta_{GV}; \beta_{GP}; \beta_{GT}) = (0,9; 0,8; 0,4; 0,9)$.

En la Figura 2 se muestra la malla inicial (M) conjuntamente con las dos mallas obtenidas después de dos procesos de refinamiento, MR1 y MR2. La cantidad de elementos y nodos en las mallas refinadas son: 33990 y 8818 para la malla MR1 y 163275 y 35227 para la malla MR2. Sobre la placa plana el número de nodos en el caso bidimensional es 81 para la malla MR1 e 161 para la malla MR2. El número de elementos y nodos se incrementa considerablemente debido a que el refinamiento también se hace en la dirección transversal.

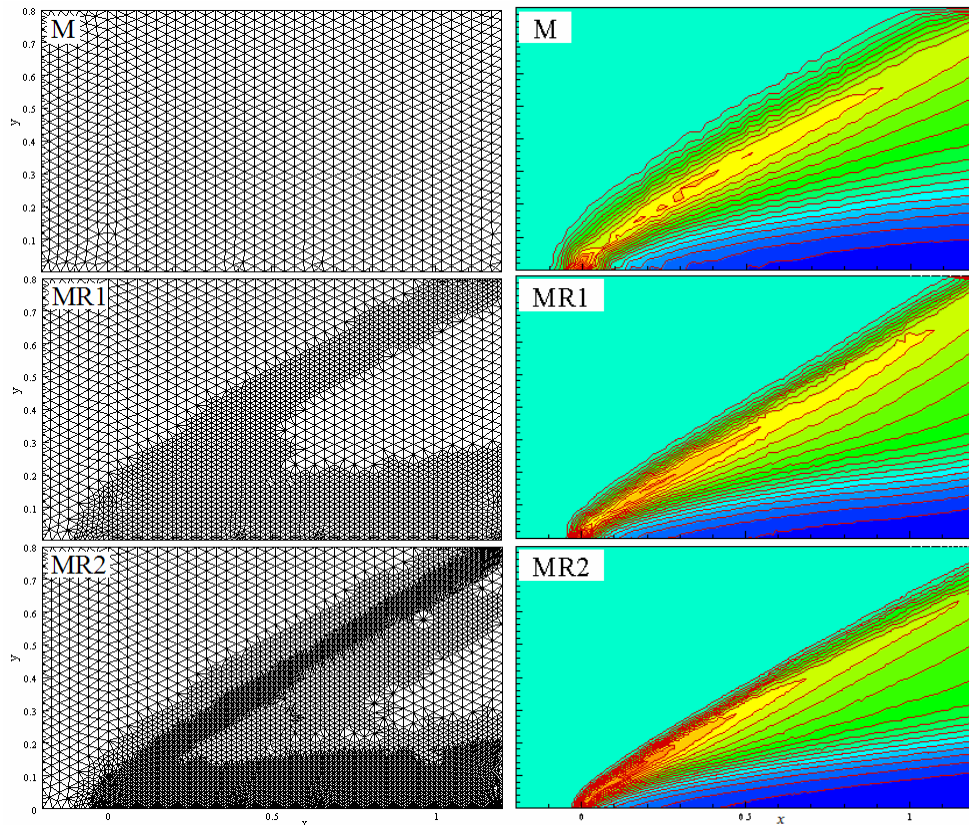


Figura 2: Mallas y distribución de densidad para las malla inicial (M) y mallas refinadas (MR1 y MR2) en el problema de la placa plana

La distribución de la densidad en la malla inicial (M) y en las mallas refinadas (MR1 y MR2) también son mostradas en la Figura 2. Se nota que a medida que la malla es refinada los resultados mejoran notablemente tanto en la espesura como en la posición de la onda de choque.

Finalmente, en la Figura 3 se muestra la relación de presión p/p_{inf} y la distribución del coeficiente de fricción sobre la placa plana para la malla inicial y las mallas refinadas. Como se puede observar en el caso de la malla inicial (M) no existe una buena concordancia con los resultados numéricos obtenidos por Carter (1972), principalmente, en la región de inicio de la placa ($x = 0$) donde existe una fuerte interacción onda de choque / capa límite. Luego con los

sucesivos refinamientos los resultados mejoran como puede verse en el caso de la malla MR2.

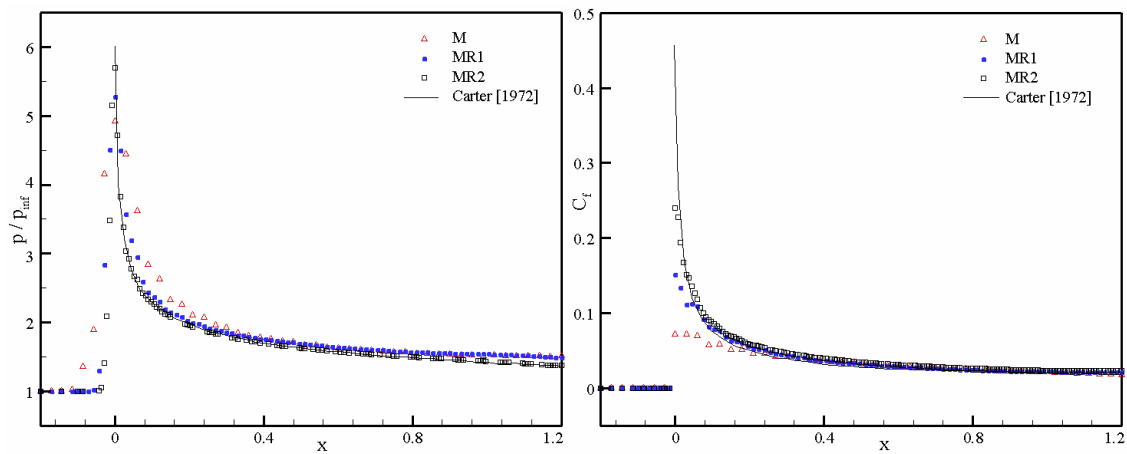


Figura 3: Relación de presión p/p_{inf} y distribución del coeficiente de fricción para el problema de la placa plana

5.2 Flujo invíscido sobre una esfera con $M = 3,0$

Este problema consiste en el pasaje de un flujo compresible y no viscoso en régimen supersónico ($M = 3,0$) sobre una esfera de radio unitario. Para reducir el esfuerzo computacional se emplean dos planos de simetría de manera de analizar un cuarto del dominio. Las condiciones de la corriente libre son: $V_{\infty} = (3,0;0,0;0,0)$, $\rho_{\infty} = 1,0$, $e_{\infty} = 6,2857$ y $p_{\infty} = 0,71428$, sobre la esfera se impone la condición de velocidad normal nula, finalmente, en el plano de salida las condiciones son libres.

La malla final fue obtenida después de tres niveles de refinamiento, siendo utilizados los indicadores de error de baja velocidad (BV), gradientes de velocidad (GV) y gradientes de presión (GP). Solamente para el primer nivel de refinamiento se utilizan todos los indicadores de error, a fin de capturar eficientemente la región próxima al punto de estagnación (bajas velocidades) y los gradientes de la onda de choque. En los refinamientos posteriores únicamente se utiliza como indicador de error el gradiente de presión debido a que nuestro objetivo principal es la onda de choque. En la Tabla 1 se observa la cantidad de elementos (*nele*) y nodos (*nno*) para cada una de las mallas, conjuntamente con el valor del coeficiente adoptado para el criterio de adaptación para cada uno de los indicadores de error.

Malla	<i>nele</i>	<i>nno</i>	β_{BV}	β_{GV}	β_{GP}
M	33696	6470	-	-	-
MR1	159610	28544	0,70	0,60	0,60
MR2	451802	78630	-	-	0,90
MR3	1304306	224689	-	-	0,90

Tabla 1: Características de las mallas y parámetros de control para el refinamiento de la esfera.

Los principales parámetros de las mallas son dados en la Tabla 2, siendo L_{min} y L_{mx} la mínima y máxima longitud de las aristas y el incremento de tiempo máximo adimensional es dado por Δt . El mínimo y máximo volumen de los elementos son dados por V_{min} y V_{mx} , respectivamente.

Malla	L_{min}	L_{mx}	V_{min}	V_{mx}	Δt
M	$1,52 \times 10^{-2}$	0,425	$5,51 \times 10^{-6}$	$7,74 \times 10^{-3}$	$3,0 \times 10^{-4}$
MR1	$7,58 \times 10^{-3}$	0,386	$7,18 \times 10^{-7}$	$7,74 \times 10^{-3}$	$1,0 \times 10^{-4}$
MR2	$5,74 \times 10^{-3}$	0,386	$2,99 \times 10^{-7}$	$7,74 \times 10^{-3}$	$1,0 \times 10^{-4}$
MR3	$2,67 \times 10^{-3}$	0,386	$4,67 \times 10^{-8}$	$7,74 \times 10^{-3}$	$6,0 \times 10^{-5}$

Tabla 2: Parámetros principales de las mallas para el ejemplo de la esfera.

La longitud mínima de las aristas (L_{min}) se reduce con los sucesivos refinamientos, esto hace que el incremento de tiempo máximo adimensional también tenga que ser reducido con la consiguiente desventaja que esto trae aparejado en el tiempo de procesamiento.

En la Figura 4 se observa una comparación de las mallas y de la distribución del número de Mach entre la malla inicial (M) y las tres mallas refinadas (MR1, MR2 y MR3). El espesor de la onda de choque en la malla inicial (M) resulta excesivamente grande y por lo tanto físicamente incorrecto. Con los sucesivos refinamientos el espesor de la onda de choque comienza a disminuir hasta quedar perfectamente definida para la malla final (MR3).

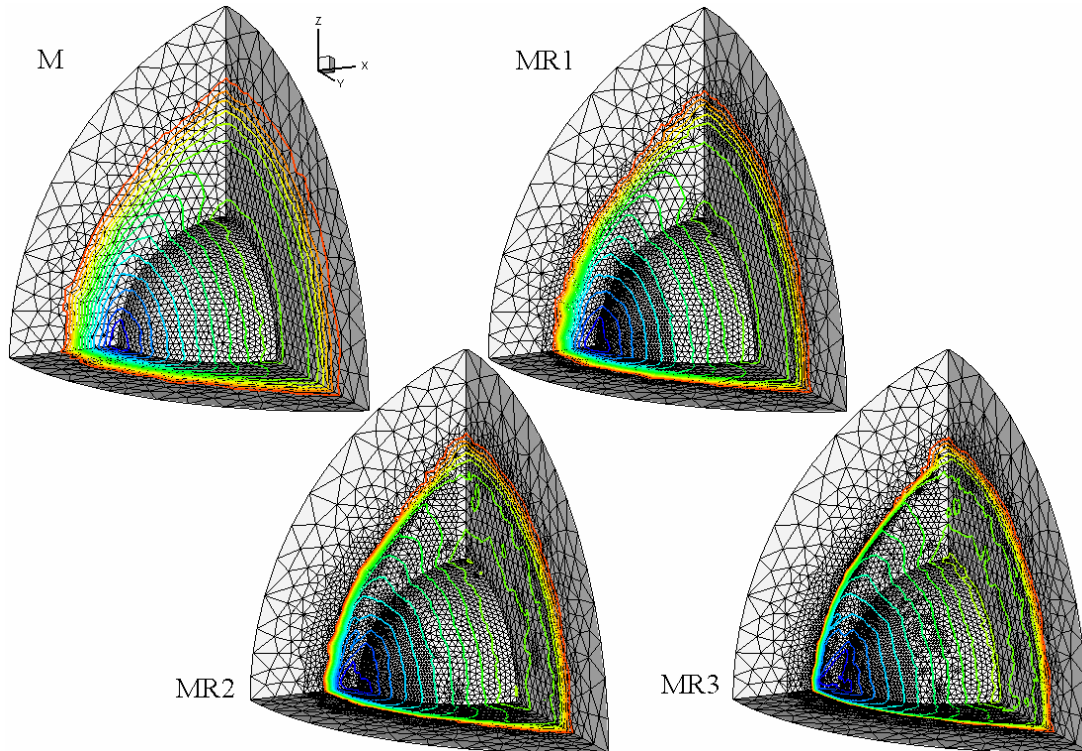


Figura 4: Distribución del número de Mach sobre la esfera con $M = 3,0$ para los diferentes niveles de refinamiento. M_{min} (azul) = 0,20; M_{mx} (rojo) = 2,90

Se muestra en la Figura 5 una comparación de la distribución de presión en el plano de simetría $x-y$ para la malla inicial (M) y las tres mallas refinadas (MR1, MR2 y MR3). Es evidente la mejora que se obtiene en los resultados debido al uso del refinamiento adaptativo de mallas.

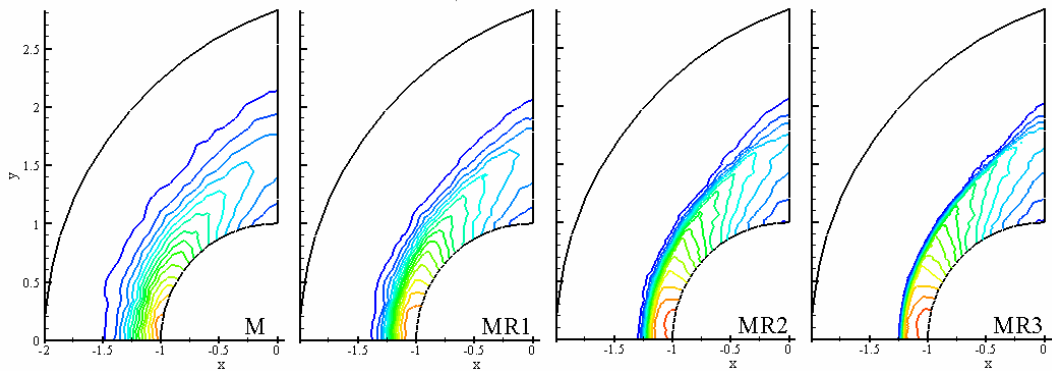


Figura 5: Distribución de la presión sobre la esfera con $M = 3,0$ para los diferentes niveles de refinamiento.
 p_{\min} (azul) = 0,90; p_{\max} (rojo) = 8,0

La distribución de la densidad y del número de Mach sobre la línea de estagnación son mostradas en la Figura 6 para la malla inicial (M) y los tres refinamientos sucesivos. Utilizando las relaciones analíticas de onda de choque recto (Anderson, 1991) se puede llegar a las siguientes relaciones: $p_2/p_1 = 10,33$; $\rho_2/\rho_1 = 3,85$; $p_{02}/p_1 = 12,06$ y $M_2 = 0,475$. Los valores obtenidos con el esquema numérico en la malla MR3 son: 10,25; 3,78; 11,53 y 0,464, respectivamente. Estos valores muestran una buena concordancia con los resultados analíticos.

La distancia sobre la línea de estagnación entre la onda de choque y la esfera (*standoff distance*) determinada a través de las dos fórmulas dadas en Argyris et al. (1990) son: 1,2049 y 1,2106. En la Figura 6 se puede ver que la distancia obtenida numéricamente con la malla MR3 tiene una buena concordancia con estos valores.

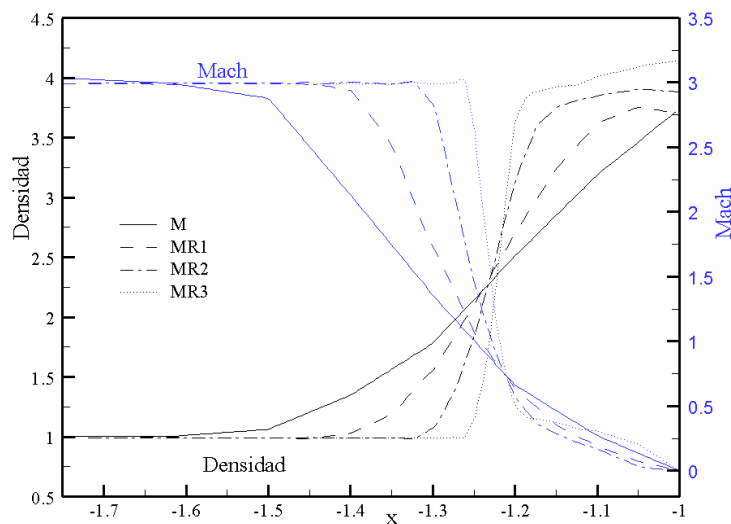


Figura 6: Distribución de la densidad (negro) y número de Mach (azul) sobre la línea de estagnación para las diferentes mallas en el caso de la esfera con $M = 3,0$

5.3 Flujo invíscido sobre una configuración cono-cilindro con $M = 3,12$ y $\alpha = 6^\circ$

En este último caso es analizado un cuerpo con una geometría representada por un conjunto cono-cilindro en un flujo no viscoso en régimen supersónico ($M = 3,12$) con un ángulo de ataque de 6° . Este cuerpo (modelo 1) fue estudiado experimentalmente por Jack y

Gould (1952) para un número de Reynolds de 14×10^6 . A fin de reducir el esfuerzo computacional se considera el plano x - y como plano de simetría de manera de analizar la mitad del dominio. Las condiciones de la corriente libre son: $V_\infty = (3,1029; 0,3261; 0,0)$, $\rho_\infty = 1,0$, $e_\infty = 6,6529$ y $p_\infty = 0,71428$, sobre el cuerpo se impone la condición de velocidad normal nula, finalmente, en el plano de salida las condiciones son libres.

La malla final fue obtenida después de dos niveles de refinamiento, siendo utilizados los indicadores de error de gradientes de velocidad (GV), gradientes de presión (GP) y gradientes de densidad (GR). En la Tabla 3 se observa la cantidad de elementos (*nele*) y nodos (*nno*) para cada una de las mallas conjuntamente con el valor del coeficiente adoptado para el criterio de adaptación para cada uno de los indicadores de error.

Malla	<i>nele</i>	<i>nno</i>	β_{GV}	β_{GP}	β_{GR}
M	21772	4922	-	-	-
MR1	72890	14228	0,40	0,40	0,40
MR2	273347	49187	0,50	0,50	0,50

Tabla 3: Características de las mallas y parámetros de control para el refinamiento del conjunto cono-cilindro.

En la Tabla 4 son dados los principales parámetros de las mallas, siendo L_{min} y L_{mx} la mínima y máxima longitud de las aristas y el incremento de tiempo adimensional máximo es dado por Δt . El mínimo y máximo volumen de los elementos son dados por V_{min} y V_{mx} , respectivamente.

Malla	L_{min}	L_{mx}	V_{min}	V_{mx}	Δt
M	$5,69 \times 10^{-3}$	1,793	$3,24 \times 10^{-7}$	0,612	$1,0 \times 10^{-4}$
MR1	$2,39 \times 10^{-3}$	1,793	$3,13 \times 10^{-8}$	0,578	$5,0 \times 10^{-5}$
MR2	$1,19 \times 10^{-3}$	1,778	$5,06 \times 10^{-9}$	0,578	$2,0 \times 10^{-5}$

Tabla 4: Parámetros principales de las mallas para el ejemplo cono-cilindro.

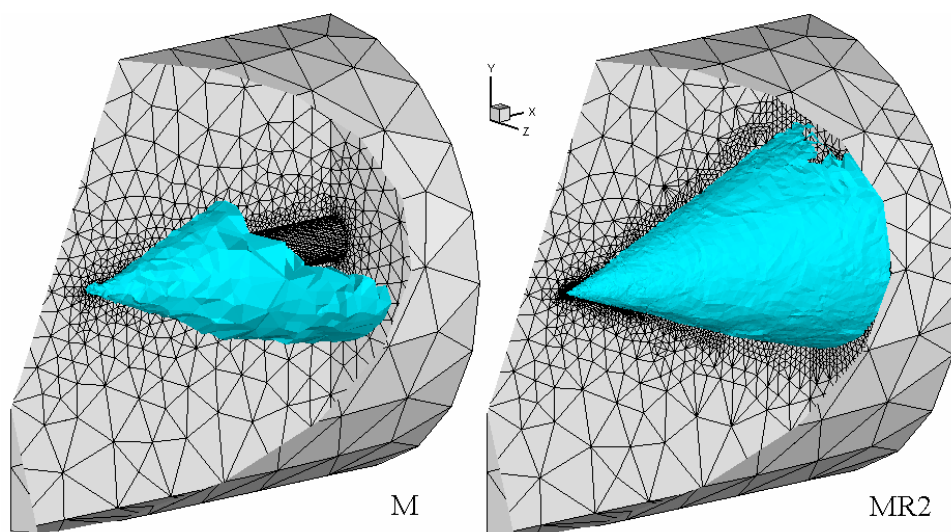


Figura 7: Superficie de presión constante ($p = 0,80$) para las mallas inicial (M) y final (MR2)

Las superficies de presión constante igual a $p = 0,80$ para la malla inicial (M) y la malla

final (MR2) se muestran en la Figura 7. Como se puede deducir al observar esta figura, la malla inicial no es lo suficientemente refinada en la región de la onda de choque, por lo tanto, la superficie de presión constante no es determinada eficientemente. Después de dos procesos de refinamiento la superficie de presión constante aumenta considerablemente quedando perfectamente definida.

En la Figura 8 se presentan comparaciones entre la malla inicial (M) y la malla final (MR2) de las distribuciones de presión y de las mallas usadas. Puede verse que después de los dos procesos de refinamiento las líneas de presión constante quedan bien definidas y libres de oscilaciones, además se obtiene una mejora sustancial en la distribución de presión en la región del cono. La estrategia de adaptación de malla tiene un buen desempeño debido a que refina únicamente los elementos en las regiones de fuertes gradientes.

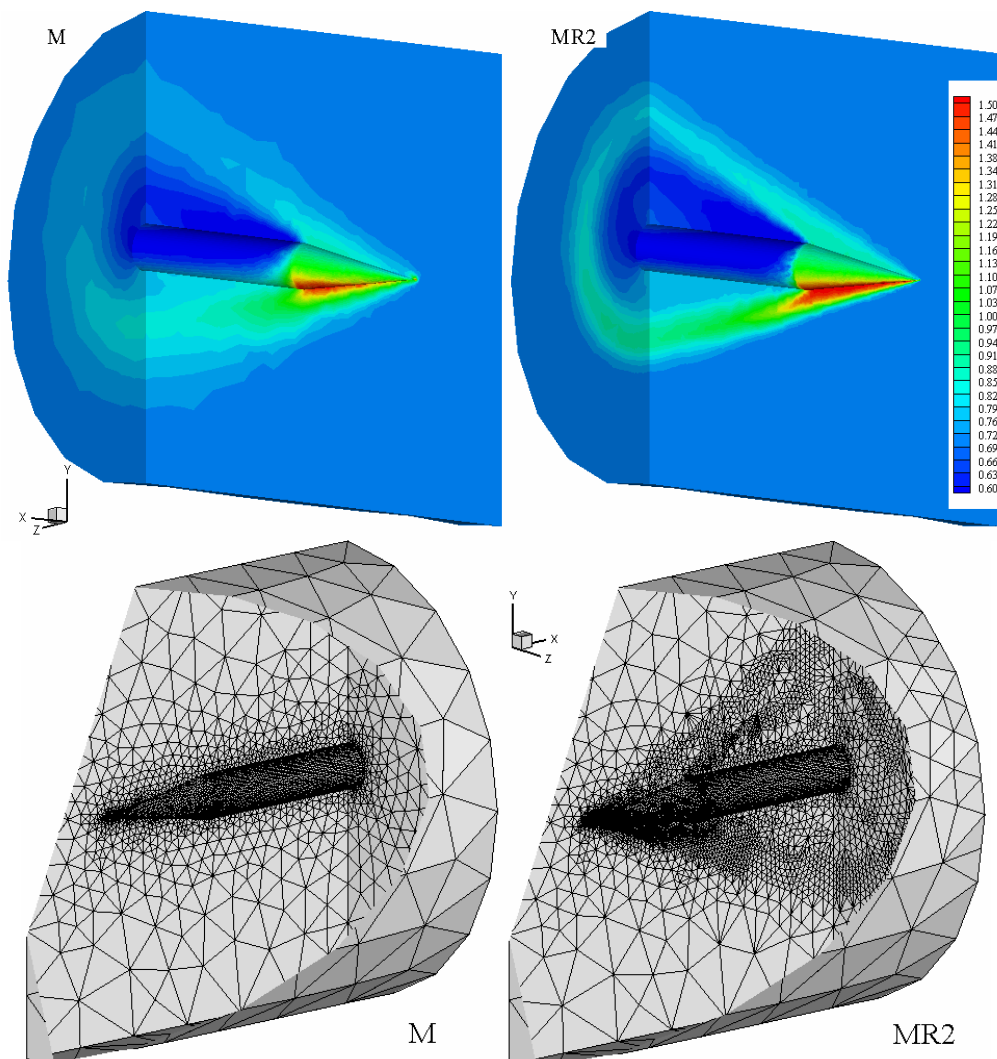


Figura 8: Distribución de presión y mallas empleadas para el conjunto cono-cilindro.

En la Figura 9 se muestran comparaciones entre la malla inicial (M) y la malla final (MR2) para la distribución del número de Mach y de la densidad. La comparación se realiza para el plano $x-z$ con $y = 0,0$ y los planos $y-z$ con $x = 0,0$ (intersección cono-cilindro) y $x = 3,0$. La mejora obtenida en la distribución del número de Mach y de la densidad en la malla MR2 muestran que el refinamiento en el interior del dominio es correcto y consistente.

En la Figura 10 se presentan las líneas de corrientes y la distribución de densidad sobre la

mailla final (MR2). Las líneas de corriente tiene como origen la línea definida por $z = 0, 10$ y $3, 0 \geq y \geq -3, 0$.

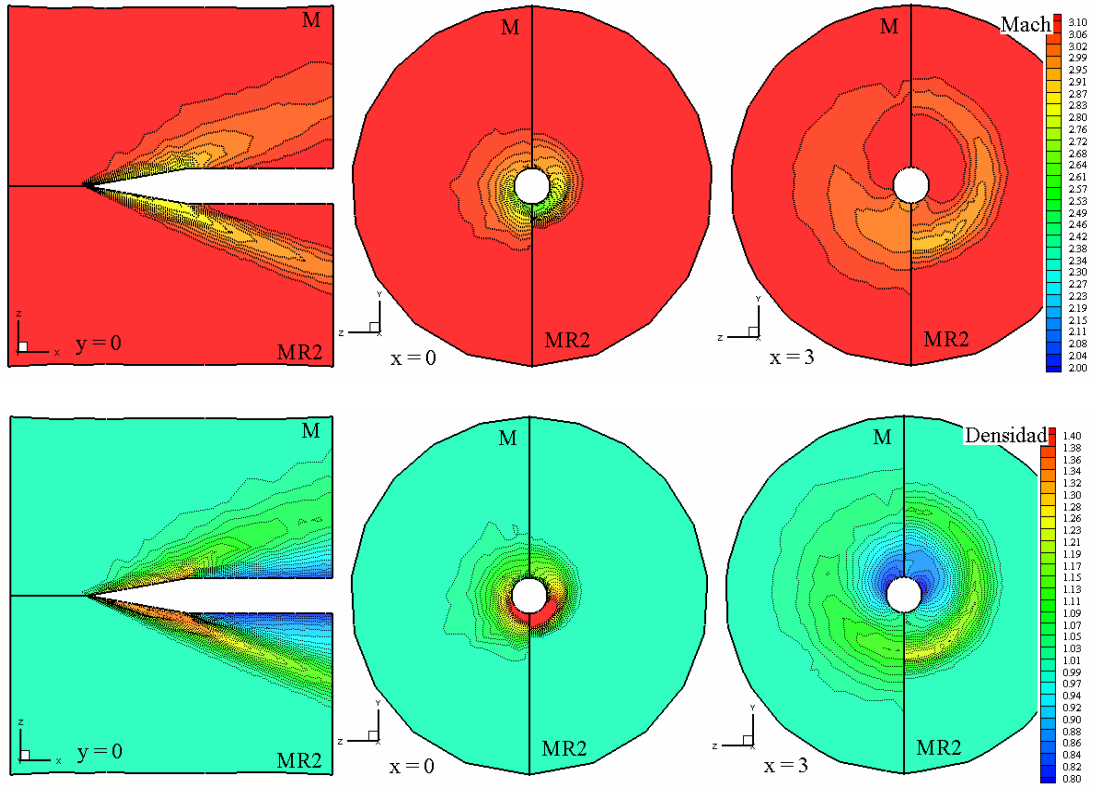


Figura 9: Comparación entre las mallas inicial (M) y final (MR2) de la distribución de número de Mach y densidad para el conjunto cono-cilindro

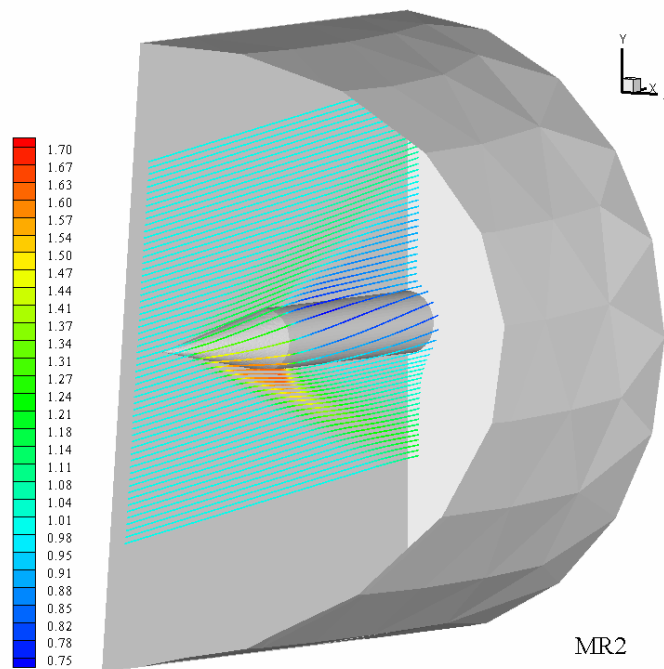


Figura 10: Distribución de densidad y líneas de corriente en la malla final (MR2) para el conjunto cono-cilindro

Finalmente, en la Figura 11 se muestra una comparación del coeficiente de presión sobre el plano de simetría x - y entre los resultados experimentales obtenidos por Jack y Gould (1952) y los resultados numéricos. La línea inferior del cuerpo es definida por 0 deg y la línea superior del cuerpo por 180 deg.

Los resultados numéricos obtenidos con las mallas inicial (M) y final (MR2) tienen una buena concordancia con relación a los resultados experimentales en la región del cilindro ($x \geq 2,835$). En la zona del cono los resultados numéricos obtenidos con la malla M presentan una discrepancia importante con relación a los resultados experimentales, principalmente, en la región del vértice del cono ($x = 0$). Después de dos procesos de refinamiento (malla MR2) los valores del coeficiente de presión obtenidos numéricamente presentan una buena concordancia con los resultados experimentales.

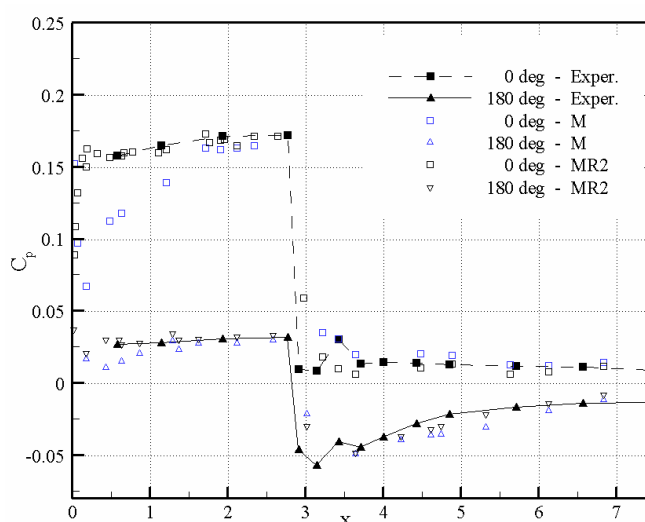


Figura 11: Distribución del coeficiente de presión sobre el plano de simetría x - y para las mallas inicial (M) y final (MR2) en el conjunto cono-cilindro

6 CONCLUSIÓN Y TRABAJOS FUTUROS

Se presenta en este trabajo una estrategia de adaptación de malla para elementos tetraédricos que es explorada para la simulación numérica de problemas en flujo compresible que presentan regiones con fuertes gradientes (onda de choque, capa límite, etc.). Resultados en flujo viscoso y no viscoso mostraron la robustez y utilidad de la estrategia de adaptación implementada.

Los principales fenómenos físicos son capturados eficientemente con los diferentes indicadores de error utilizados, presentando una buena concordancia con los resultados numéricos, analíticos y experimentales presentados por otros autores.

Los futuros trabajos serán focalizados en la aplicación de la estrategia de adaptación de malla en problemas no permanentes y en la implementación de una técnica de suavización (Popielek, 2005) que tiene como objetivo mejorar la calidad de los elementos generados en el proceso de adaptación.

La restricción en el paso de tiempo del esquema explícito se torna crítica cuando se hace la subdivisión de los elementos en el proceso de refinamiento, por lo tanto, se implementará una técnica de avance en el tiempo en subciclos con el objetivo de mejorar la eficiencia del código computacional.

7 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al *Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico* (CNPq, Brasil), por el financiamiento de este trabajo, a través del Edital Universal 2004 N° 472053/2004-3.

REFERENCIAS

- J.D. Anderson. *Fundamentals of aerodynamics*. McGraw Hill, 1991.
- J. Argyris, I.S. Doltsinis y H. Friz. Study on computational reentry aerodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 81:257–289, 1990.
- J.E. Carter. *Numerical solutions of the Navier-Stokes equations for the supersonic laminar flow over a two-dimensional compression corner*. Technical Report TR-385, NASA, 1972.
- P. Devloo, J.T. Oden y T. Strouboulis. Implementation of an adaptive refinement technique for the SPUG algorithm. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 61:339–358, 1987.
- J. Donea. A Taylor-Galerkin for convective transport problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20:101–119, 1984.
- T.J.R. Hughes y T.E. Tezduyar. Finite element methods for first-order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible Euler equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 45:217–284, 1984.
- J.R. Jack y L.I. Gould. *Aerodynamics of slender bodies at Mach number of 3.12 and Reynolds from 2×10^6 to 15×10^6 . II-Aerodynamic load distributions of series of five bodies having conical noses and cylindrical afterbodies*. Research Memorandum RM-E52C10, NACA, 1952.
- Y. Kallinderis y P. Vijayan. Adaptive refinement-coarsening scheme for three-dimensional unstructured meshes. *AIAA Journal*, 31:1440–1447, 1993.
- J.T. Oden, T. Strouboulis y P. Devloo. Adaptive finite element method for the analysis of inviscid compressible flow: Part I. Fast refinement/unrefinement and moving mesh methods for unstructured meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 59:327–362, 1986.
- T.L. Popiolek. *Análise de escoamentos incompressíveis utilizando simulação de grandes escalas e adaptação de malhas (texto en portugues)*. Tesis de Doctorado, PPGEC, UFRGS, Brasil, 2005.
- T.L. Popiolek y A.M. Awruch. Numerical simulation of incompressible flows using adaptive unstructured meshes and the pseudo-compressibility hypothesis. *Advances in Engineering Software*, 37:260–274, 2006.
- R. Ramakrishnan, K.S. Bey y E. Thornton. Adaptive quadrilateral and triangular finite element scheme for compressible flows. *AIAA Journal*, 28:51–59, 1990.
- F.W. White. *Viscous fluid flow*. McGraw Hill, 1974.