Asociación Argentina de Mecánica Computacional

Mecánica Computacional Vol XXVI, pp.2093-2105
Sergio A. Elaskar, Elvio A. Pilotta, Germán A. Torres (Eds.)
Córdoba, Argentina, Octubre 2007

CALIFICACIÓN GENERALIZADA Y CONVERGENCIA ÓPTIMA PARA MÉTODOS DE REGULARIZACIÓN ESPECTRALES

Rubén D. Spies[a,b] and Karina G. Temperini[a,c]

[a]*Instituto de Matemática Aplicada del Litoral, IMAL, CONICET-UNL, Güemes 3450, S3000GLN, Santa Fe, Argentina, imal@ceride.gov.ar, http://www.imal.ceride.gov.ar/*

[b]*Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería Química, Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina, http://math.unl.edu.ar/*

[c]*Departamento de Matemática, Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina, http://www.fhuc.unl.edu.ar/*

Palabras Clave. Calificación, método de regularización, problema inverso mal condicionado.

Resumen.

El concepto de calificación de métodos de regularización espectrales (MREs) para problemas inversos mal condicionados está fuertemente asociado con el orden de convergencia óptimo del error de regularización (H. W. Engl et al., *Regularization of inverse problems*, volume 375 of Mathematics and its Applications, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht (1996); P. Mathé and S. V. Pereverzev, Inverse Problems, 19(3):789-803 (2003)). En este trabajo se extiende la definición de calificación y se introducen tres niveles diferentes de este concepto: débil, fuerte y óptimo. Se muestra que la calificación débil extiende la definición introducida por Mathé y Pereverzev en el año 2003, principalmente en el sentido que las funciones asociadas a órdenes de convergencia y conjuntos fuente no necesariamente son las mismas. Se proveen además una condición suficiente que garantiza que un MRE posee calificación en el sentido de esta generalización como así también condiciones necesarias y suficientes para que un orden de convergencia dado sea calificación fuerte u óptima. Se muestra que algunos MREs que tienen calificación clásica infinita, por ejemplo expansión en valores singulares truncada, método de Landweber y método de Showalter, poseen además calificación generalizada, la cual conlleva a un orden de convergencia óptimo del error de regularización. Se presentan varios ejemplos que ilustran los niveles de calificación, las relaciones entre los mismos, como así también con el concepto de calificación clásica y el introducido por Mathé y Pereverzev. Por último, se muestran las implicaciones que tiene esta teoría en el contexto de órdenes de convergencia, resultados recíprocos y conjuntos fuente maximales para problemas inversos mal condicionados concretos.

1 INTRODUCCIÓN Y PRELIMINARES

Sea $T : X \to Y$ un operador lineal y acotado con rango no cerrado, donde X y Y son espacios de Hilbert de dimensión infinita. Bajo estas condiciones la ecuación operacional lineal

$$Tx = y \tag{1}$$

es mal condicionada en el sentido que $T^\dagger$, la inversa generalizada de Moore-Penrose de T, no es acotada (Engl et al. (1996)). Dicha inversa está fuertemente relacionada con las soluciones de mínimos cuadrados debido a que (1) tiene solución de mínimos cuadrados si y sólo si $y \in \mathcal{D}(T^\dagger) \doteq \mathcal{R}(T) \oplus \mathcal{R}(T)^\perp$. En tal caso, $x^\dagger \doteq T^\dagger y$ es la solución de mínimos cuadrados de mínima norma y el conjunto de todas las soluciones de mínimos cuadrados de (1) está dado por $x^\dagger + \mathcal{N}(T)$. Si el problema es mal condicionado entonces $x^\dagger$ no depende continuamente del dato y. Por lo tanto, si en lugar del dato exacto y sólo se dispone de un dato aproximado y^δ, con $\|y - y^\delta\| \leq \delta$, donde $\delta > 0$ es el nivel de ruido, entonces es posible que $T^\dagger y^\delta$ ni siquiera exista y si existe, no necesariamente será una buena aproximación de $x^\dagger$, aún cuando δ sea muy pequeño. Esta inestabilidad se hace evidente cuando se trata de aproximar $x^\dagger$ por métodos y procedimientos numéricos usuales. Así por ejemplo, es posible que la aplicación del procedimiento estándar de aproximaciones de mínimos cuadrados en una sucesión de subespacios finito dimensionales $\{X_n\}$ de X cuya unión sea densa en X, resulte en una sucesión $\{x_n\}$ de soluciones de mínimos cuadrados que no converja a $x^\dagger$ (ver Seidman (1980)) ó, peor aún, que diverja de $x^\dagger$ con velocidad arbitrariamente grande (ver Spies and Temperini (2006)).

Los problemas mal condicionados deben ser regularizados antes de pretender aproximar numéricamente sus soluciones. Regularizar un problema mal condicionado como (1) significa esencialmente aproximar el operador $T^\dagger$ por una familia paramétrica de operadores acotados $\{R_\alpha\}$, donde α se denomina parámetro de regularización. Más precisamente, para $\alpha \in (0, \alpha_0)$ con $\alpha_0 \in (0, +\infty]$, sea $R_\alpha : Y \to X$ un operador continuo (no necesariamente lineal). Se dice que la familia $\{R_\alpha\}_{\alpha \in (0,\alpha_0)}$ es una "familia de operadores de regularización (para $T^\dagger$)", si para todo $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$, existe una regla de elección de parámetros $\alpha = \alpha(\delta, y^\delta)$ tal que

$$\lim_{\delta \to 0^+} \sup_{\substack{y^\delta \in Y \\ \|y^\delta - y\| \leq \delta}} \left\| R_{\alpha(\delta, y^\delta)} y^\delta - T^\dagger y \right\| = 0.$$

La regla de elección de parámetros $\alpha : \mathbb{R}^+ \times Y \to (0, \alpha_0)$ es tal que

$$\lim_{\delta \to 0^+} \sup_{\substack{y^\delta \in Y \\ \|y^\delta - y\| \leq \delta}} \alpha(\delta, y^\delta) = 0.$$

Si $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$, entonces $x^\dagger$ satisface la ecuación normal $(T^*T)x^\dagger = T^*y$ y $x^\dagger$ puede escribirse como

$$x^\dagger \doteq T^\dagger y = \int_0^{\|T\|^2+} \frac{1}{\lambda}\, dE_\lambda T^* y, \tag{2}$$

donde $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ es la familia espectral asociada al operador autoadjunto T^*T (ver Dutray and Lions (1990), Engl et al. (1996)). Sin embargo, como estamos suponiendo que $\mathcal{R}(T)$ no es cerrado (y por lo tanto $\mathcal{D}(T^\dagger)$ es un subconjunto propio de Y), si $y \notin \mathcal{D}(T^\dagger)$ entonces la integral en (2) no existe, pues en tal caso $0 \in \sigma(T^*T)$ y $\frac{1}{\lambda}$ tiene un polo en 0. Además en este caso el operador $T^\dagger$ definido en (2) para $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ no es acotado. De aquí que muchos métodos de regularización se basen en teoría espectral y consistan en definir $R_\alpha \doteq \int_0^{\|T\|^2+} g_\alpha(\lambda)\, dE_\lambda T^*$

donde $\{g_\alpha\}$ es una familia de funciones adecuadamente elegida de modo que para todo $\lambda \in (0, \|T\|^2]$ se tenga $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$.

Sea $\{g_\alpha\}_{\alpha\in(0,\alpha_0)}$ una familia paramétrica de funciones $g_\alpha : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ para $\alpha \in (0, \alpha_0)$. Diremos que $\{g_\alpha\}_{\alpha\in(0,\alpha_0)}$ es un "método de regularización espectral" (MRE), si satisface las siguientes hipótesis:

H1. Para todo $\alpha \in (0, \alpha_0)$ fijo, $g_\alpha(\lambda)$ es continua por tramos con respecto a λ, para $\lambda \in [0, +\infty)$;

H2. Existe una constante $C > 0$ (independiente de α) tal que $|\lambda g_\alpha(\lambda)| \leq C$ para todo $\lambda \in [0, +\infty)$;

H3. Para todo $\lambda \in (0, +\infty)$, $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$.

Se puede probar que si $\{g_\alpha\}_{\alpha\in(0,\alpha_0)}$ es un MRE entonces la familia de operadores $\{R_\alpha\}_{\alpha\in(0,\alpha_0)}$ definida por

$$R_\alpha \doteq \int g_\alpha(\lambda)\, dE_\lambda\, T^* = g_\alpha(T^*T)T^*,$$

es una familia de operadores de regularización para $T^\dagger$ (Engl et al. (1996), Teorema 4.1). En tal caso diremos que $\{R_\alpha\}_{\alpha\in(0,\alpha_0)}$ es una "familia de regularización espectral para $T^\dagger$", en virtud de que cada uno de sus elementos está definido en términos de una integral con respecto a la familia espectral $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ asociada al operador T^*T. Dado el operador T, es suficiente con que $g_\alpha(\lambda)$ esté definida para $\lambda \in [0, \|T\|^2]$, pues E_λ es "constante" fuera de ese intervalo.

Es bien sabido que para problemas mal condicionados no es posible reconstruir la solución exacta $x^\dagger$ con ningún grado de precisión a menos que se disponga de información adicional *a-priori* sobre la misma (Spies and Temperini (2006), Engl et al. (1996) Proposición 3.11). Por otro lado, dada cierta información *a-priori* sobre $x^\dagger$, puede ser deseable conocer el mejor orden de convergencia del error de regularización $\left\|R_\alpha y - x^\dagger\right\|$ como función del parámetro de regularización α que pueda obtenerse con un método de regularización bajo esos supuestos *a-priori*. Recíprocamente, dado un cierto orden de convergencia, se puede estar interesado en determinar la posible existencia de "conjuntos fuente" sobre los cuales un cierto método de regularización alcanza dicho orden de convergencia. En tal caso puede ser además de interés determinar "conjuntos fuente maximales". Estos problemas están fuertemente relacionados con el concepto de calificación de un método de regularización (Engl et al. (1996), Neubauer (1994), Neubauer (1997)).

De aquí en adelante denotaremos con $\{g_\alpha\}$ al MRE $\{g_\alpha\}_{\alpha\in(0,\alpha_0)}$. A continuación recordamos la definición de calificación clásica para métodos de regularización espectral (ver Engl et al. (1996)).

Definición 1.1. *Sea $\{g_\alpha\}$ un MRE. Denotemos con $\mathcal{I}(g_\alpha)$ al conjunto*

$$\mathcal{I}(g_\alpha) \doteq \{\mu \geq 0 : \forall\, \lambda \in [0, +\infty), \exists\, k > 0 \text{ tal que } \lambda^\mu\, |1 - \lambda g_\alpha(\lambda)| \leq k\, \alpha^\mu\,, \forall\, \alpha \in (0, \alpha_0)\}$$

y sea $\mu_0 \doteq \sup\limits_{\mu\in\mathcal{I}(g_\alpha)} \mu$. Si $0 < \mu_0 < +\infty$, decimos que $\{g_\alpha\}$ posee calificación clásica. En tal caso, el número μ_0 se denomina orden de la calificación clásica.

Es oportuno observar aquí que $\mathcal{I}(g_\alpha)$ es siempre no vacío puesto que $0 \in \mathcal{I}(g_\alpha)$ en virtud de *H2*.

Mathé y Pereverzev introdujeron por primera vez la siguiente definición de calificación de un método de regularización espectral, con lo cual formalizaron y extendieron la noción clásica de este concepto (ver Mathé and Pereverzev (2003)).

Definición 1.2. *Sea $\rho : (0, a] \to (0, \infty)$ una función creciente. Se dice que el método de regularización $\{g_\alpha\}$ tiene calificación ρ si existe una constante $\gamma \in (0, \infty)$ tal que*

$$\sup_{\lambda \in (0,a]} |1 - \lambda g_\alpha(\lambda)| \, \rho(\lambda) \leq \gamma \, \rho(\alpha) \quad \forall \, \alpha \in (0, a]. \tag{3}$$

En este trabajo generalizamos el concepto previo, principalmente permitiendo que la función $\rho(\lambda)$ en el primer miembro de (3) se sustituya por una función general $s(\lambda)$ con propiedades similares.

Obs. 1.3. *Es importante señalar que en Engl et al. (1996) la "calificación clásica" se define como el número μ_0 de la Definición 1.1 (aún en el caso $\mu_0 = \infty$). Sin embargo, desde nuestro punto de vista la "calificación generalizada" de un método no será un número sino más bien una función del parámetro de regularización α, como un orden de convergencia en el sentido de la Definición 1.2. En el caso de MREs con calificación clásica de orden finito positivo μ_0, mostraremos que la correspondiente calificación generalizada será la función $\rho(\alpha) = \alpha^{\mu_0}$, coincidiendo con el enfoque clásico. Como en los casos extremos $\mu_0 = 0$ y $\mu_0 = \infty$ dicha función no define un orden de convergencia, hemos decidido excluirlos de la definición de calificación clásica (Definición 1.1) y por ello en estos casos decimos que el método no tiene calificación clásica.*

La organización de este trabajo es como sigue. En la Sección 2 se definen los conceptos de par fuente-orden (débil y fuerte) y par orden-fuente para un MRE y a partir de ellos se introducen tres niveles de calificación: débil, fuerte y óptimo. Se provee además una condición suficiente para la existencia de calificación débil, como así también condiciones necesarias y suficientes para que un orden de convergencia dado sea calificación fuerte u óptima. En la Sección 3 se dan ejemplos de los tres niveles de calificación y se muestran las relaciones existentes entre los mismos, con la calificación clásica y con la introducida por Mathé y Pereverzev. En particular, se presentan MREs que no poseen calificación clásica y sí tienen calificación en alguno de los niveles introducidos. En la Sección 4 se muestran las implicaciones que tiene esta teoría en el contexto de órdenes de convergencia, resultados recíprocos y conjuntos fuente maximales para problemas inversos mal condicionados.

2 RESULTADOS PRINCIPALES

Es bien sabido que hay métodos de regularización espectrales que no poseen calificación clásica, e.g. descomposición en valores singulares truncada, método de Landweber, método de Showalter, debido a que el correspondiente μ_0 dado en la Definición 1.1 es infinito. Sin embargo, es posible observar que el concepto de calificación como orden de convergencia óptimo del error de regularización sigue subyacente en la mayoría de estos métodos. En esta sección generalizamos el concepto de calificación introducido por Mathé y Pereverzev en Mathé and Pereverzev (2003) y por lo tanto la noción de calificación clásica de un MRE. Además definimos tres niveles de calificación: débil, fuerte y óptimo, los cuales introducen una jerarquía natural para los MREs. Mostramos que la calificación generalizada corresponde al nivel más bajo. En particular, daremos una condición suficiente que garantice que un MRE posee calificación en el sentido de esta generalización y condiciones necesarias y suficientes para que un orden de convergencia dado sea calificación fuerte u óptima.

Denotaremos con $\mathcal{O}$ al conjunto de las funciones $\rho : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ no decrecientes tales que $\lim_{\alpha \to 0^+} \rho(\alpha) = 0$, y con $\mathcal{S}$ al conjunto de las funciones $s : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ continuas con $s(0) = 0$ y tales que $s(\lambda) > 0$ para todo $\lambda > 0$.

Definición 2.1. *Sean $\rho, \tilde{\rho} \in \mathcal{O}$. Decimos que "$\rho$ precede a $\tilde{\rho}$ en el origen", y lo denotamos con $\rho \preceq \tilde{\rho}$, si existen constantes positivas c y ε tales que $\rho(\alpha) \leq c\,\tilde{\rho}(\alpha)$ para todo $\alpha \in (0, \varepsilon)$.*

Definición 2.2. *Sean $\rho, \tilde{\rho} \in \mathcal{O}$. Decimos que "$\rho$ y $\tilde{\rho}$ son equivalentes en el origen", y lo denotamos con $\rho \approx \tilde{\rho}$, si se preceden mutuamente en el origen, es decir, si existen constantes ε, c_1, c_2, $\varepsilon > 0$, $0 < c_1 < c_2 < \infty$ tales que $c_1\,\rho(\alpha) \leq \tilde{\rho}(\alpha) \leq c_2\,\rho(\alpha)$ para todo $\alpha \in (0, \varepsilon)$.*

Claramente, "$\approx$" introduce un orden de equivalencia en $\mathcal{O}$. Análogas definiciones se utilizarán para $s, \tilde{s} \in \mathcal{S}$.

Definición 2.3. *Sean $\{g_\alpha\}$ un MRE, $r_\alpha(\lambda) \doteq 1 - \lambda g_\alpha(\lambda)$, $\rho \in \mathcal{O}$ y $s \in \mathcal{S}$.*

i) *Decimos que (s, ρ) es un "par débil fuente-orden para $\{g_\alpha\}$" si satisface*

$$\frac{s(\lambda)\,|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} = O(1) \quad \textit{cuando} \;\; \alpha \to 0^+,\ \forall\, \lambda > 0. \tag{4}$$

ii) *Decimos que (s, ρ) es un "par fuerte fuente-orden para $\{g_\alpha\}$" si es un par débil fuente-orden y no existe $\lambda > 0$ para el cual en (4), $O(1)$ pueda reemplazarse por $o(1)$. Es decir, si vale (4) y además*

$$\limsup_{\alpha \to 0^+} \frac{s(\lambda)\,|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} > 0 \quad \forall\, \lambda > 0. \tag{5}$$

iii) *Decimos que (ρ, s) es un "par orden-fuente para $\{g_\alpha\}$" si existen una constante $\gamma > 0$ y una función $h : (0, \alpha_0) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ con $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} h(\alpha) = 0$, tales que*

$$\frac{s(\lambda)\,|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} \geq \gamma \quad \forall\, \lambda \in [h(\alpha), +\infty). \tag{6}$$

En las definiciones precedentes nos referiremos a la función ρ como "orden de convergencia" y a s como "función fuente". La razón de usar esta terminología quedará clara en la Sección 4 cuando veamos aplicaciones de estos conceptos en el contexto de resultados directos y recíprocos para métodos de regularización.

En la siguiente definición introducimos el concepto de calificación generalizada y tres niveles diferentes del mismo.

Definición 2.4. *Sea $\{g_\alpha\}$ un MRE.*

i) *Decimos que ρ es "calificación generalizada o débil de $\{g_\alpha\}$" si existe una función s tal que (s, ρ) es un par débil fuente-orden para $\{g_\alpha\}$.*

ii) *Decimos que ρ es "calificación fuerte de $\{g_\alpha\}$" si existe una función s tal que (s, ρ) es un par fuerte fuente-orden para $\{g_\alpha\}$.*

iii) *Decimos que ρ es "calificación óptima de $\{g_\alpha\}$" si existe una función s tal que (s, ρ) es un par fuerte fuente-orden para $\{g_\alpha\}$ (es suficiente con que (s, ρ) sea un par débil fuente-orden) y (ρ, s) es un par orden-fuente para $\{g_\alpha\}$.*

Es importante observar que la calificación débil generaliza el concepto de calificación introducido en Mathé and Pereverzev (2003) y por lo tanto, la noción de calificación clásica. En efecto, si $\{g_\alpha\}$ tiene calificación continua $\rho(\alpha)$ en el sentido de la Definición 1.2 y $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \rho(\alpha) = 0$, entonces la función

$$\tilde{\rho}(\alpha) \doteq \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha = 0; \\ \rho(\alpha), & \text{si } 0 < \alpha \leq a; \\ \rho(a), & \text{si } \alpha > a. \end{cases} \tag{7}$$

es calificación débil de $\{g_\alpha\}$. Sin embargo, estas dos nociones no son equivalentes. Veremos luego que es posible que una función sea calificación débil de un MRE y no sea calificación según la Definición 1.2 (ver Ejemplo 8).

Es oportuno señalar que si $\{g_\alpha\}$ tiene calificación clásica de orden μ_0, entonces $\rho(\alpha) = \alpha^\mu$ es calificación débil de $\{g_\alpha\}$ y más aún, $(\lambda^\mu, \alpha^\mu)$ es un par débil fuente-orden para $\{g_\alpha\}$ para todo $\mu \in (0, \mu_0]$. Recíprocamente, si para $\mu > 0$, $(\lambda^\mu, \alpha^\mu)$ es un par débil fuente-orden para $\{g_\alpha\}$, entonces este método tiene calificación clásica (de orden $\mu_0 \geq \mu$) si $\mu_0 \doteq \sup \Big\{\mu : (\lambda^\mu, \alpha^\mu)$ es un par débil fuente-orden para $\{g_\alpha\}\Big\} < +\infty$.

El siguiente resultado provee una condición suficiente para la existencia de calificación débil de un MRE. Por razones de brevedad, no presentamos aquí su demostración. Mayores detalles pueden encontrarse en Spies and Temperini (2007).

Teorema 2.5. *Sea $\{g_\alpha\}$ un MRE tal que para todo $\lambda > 0$, $g_\alpha(\lambda)$ es decreciente para $\alpha \in (0, \alpha_0)$.*

a) *Si existen una función creciente $h : (0, \alpha_0) \to \mathbb{R}^+$ con $\lim_{\alpha \to 0^+} h(\alpha) = 0$, $\rho^* \in \mathcal{O}$ y $\varepsilon > 0$ tales que para todo $\alpha \in (0, \varepsilon)$,*

$$\sup_{\lambda \in [h(\alpha), +\infty)} |r_\alpha(\lambda)| \leq \rho^*(\alpha), \tag{8}$$

entonces $\{g_\alpha\}$ tiene calificación débil, y en tal caso ρ^* es calificación débil del método.

b) *Si para todo $\alpha \in (0, \alpha_0)$, $r_\alpha(\lambda)$ es positiva y monótona decreciente para $\lambda \in (0, +\infty)$, entonces siempre es posible hallar h y ρ^* como en **a)** que satisfagan (8) para todo $\alpha \in (0, \alpha_0)$.*

Se deduce del teorema anterior que los MREs $\{g_\alpha\}$ tales que para todo $\lambda > 0$, $g_\alpha(\lambda)$ es decreciente para $\alpha \in (0, \alpha_0)$ y para todo $\alpha \in (0, \alpha_0)$, $r_\alpha(\lambda)$ es positiva y decreciente para $\lambda > 0$, poseen calificación débil. Es importante observar que la mayoría de los métodos usuales satisfacen estas condiciones. En particular, el método de Landweber y el método de Showalter.

Ahora, dados el MRE $\{g_\alpha\}$ y $\rho \in \mathcal{O}$, definimos

$$s_\rho(\lambda) \doteq \liminf_{\alpha \to 0^+} \frac{\rho(\alpha)}{|r_\alpha(\lambda)|} \quad \text{para} \quad \lambda \geq 0. \tag{9}$$

Notar que $s_\rho(0) = 0$.

En los próximos tres resultados veremos que dada una función $\rho \in \mathcal{O}$, las características de la misma como posible calificación (fuerte u óptima) de un MRE se pueden determinar a partir de propiedades de esta función s_ρ.

Teorema 2.6. *(Condición necesaria y suficiente de calificación fuerte.) Una función $\rho \in \mathcal{O}$ tal que $s_\rho \in \mathcal{S}$ es calificación fuerte de $\{g_\alpha\}$ si y sólo si*

$$0 < s_\rho(\lambda) < +\infty \quad \textit{para todo} \quad \lambda > 0. \tag{10}$$

Demostración. Supongamos que ρ es calificación fuerte de $\{g_\alpha\}$. Entonces existe una función $s \in \mathcal{S}$ tal que (s, ρ) es par fuerte fuente-orden para $\{g_\alpha\}$. Luego, para todo $\lambda > 0$,

$$s_\rho(\lambda) = \liminf_{\alpha \to 0^+} \frac{\rho(\alpha)}{|r_\alpha(\lambda)|} = \frac{1}{\limsup_{\alpha \to 0^+} \frac{|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)}} = \frac{s(\lambda)}{\limsup_{\alpha \to 0^+} \frac{s(\lambda)|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)}}.$$

Así, (10) se sigue entonces de (4) y (5).

Recíprocamente, supongamos ahora que $0 < s_\rho(\lambda) < +\infty$ para todo $\lambda > 0$. Probaremos que ρ es calificación fuerte de $\{g_\alpha\}$. Para ello veamos que (s_ρ, ρ) es un par fuerte fuente-orden para $\{g_\alpha\}$. Como $0 < s_\rho(\lambda) < +\infty$ para todo $\lambda > 0$, se sigue que

$$\limsup_{\alpha\to 0^+} \frac{s_\rho(\lambda)\,|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} = s_\rho(\lambda) \limsup_{\alpha\to 0^+} \frac{|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} = 1 \quad \forall\, \lambda > 0.$$

Luego, s_ρ verifica (4) y (5), lo cual junto al hecho que $s_\rho \in \mathcal{S}$ implica que (s_ρ, ρ) es un par fuerte fuente-orden y así, ρ es calificación fuerte de $\{g_\alpha\}$. □

Teorema 2.7. *Sean $\rho \in \mathcal{O}$ calificación fuerte de $\{g_\alpha\}$ y $s \in \mathcal{S}$. Entonces (s, ρ) es un par fuerte fuente-orden para $\{g_\alpha\}$ si y sólo si existe $k > 0$ tal que $s(\lambda) \leq k\, s_\rho(\lambda)$ para todo $\lambda > 0$.*

Demostración. Como ρ es calificación fuerte, $s_\rho(\lambda) > 0$ para todo $\lambda > 0$ por el Teorema 2.6. Supongamos ahora que (s, ρ) es un par fuerte fuente-orden para $\{g_\alpha\}$. Entonces existen constantes positivas k y ε tales que $\frac{s(\lambda)|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} \leq k$ para todos $\lambda > 0$, $\alpha \in (0, \varepsilon)$. Luego, para todo $\lambda > 0$

$$\frac{s(\lambda)}{s_\rho(\lambda)} = s(\lambda) \limsup_{\alpha\to 0^+} \frac{|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} = \limsup_{\alpha\to 0^+} \frac{s(\lambda)\,|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} \leq k,$$

y por lo tanto $s(\lambda) \leq k\, s_\rho(\lambda)$ para todo $\lambda > 0$.

Recíprocamente, supongamos que existe $k > 0$ tal que $s(\lambda) \leq k\, s_\rho(\lambda)$ para todo $\lambda > 0$. Como $s_\rho(\lambda) > 0$ se sigue entonces que

$$k \geq \frac{s(\lambda)}{s_\rho(\lambda)} = \limsup_{\alpha\to 0^+} \frac{s(\lambda)\,|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} \quad \forall\, \lambda > 0,$$

es decir, (s, ρ) es un par débil fuente-orden para $\{g_\alpha\}$. Además, como $s(\lambda)$ y $s_\rho(\lambda)$ son positivas para todo $\lambda > 0$, se sigue que $s(\lambda)$ verifica (5) y en consecuencia (s, ρ) es, más aún, un par fuerte fuente-orden para $\{g_\alpha\}$. □

Teorema 2.8. *(Condición necesaria y suficiente de calificación óptima.) Una función $\rho \in \mathcal{O}$ tal que $s_\rho \in \mathcal{S}$ es calificación óptima de $\{g_\alpha\}$ si y sólo si s_ρ verifica (6) y (10).*

Demostración. Supongamos que ρ es calificación óptima. Entonces ρ es calificación fuerte y se sigue del Teorema 2.6 que s_ρ verifica (10). Además, como ρ es calificación óptima, existe $s \in \mathcal{S}$ tal que (s, ρ) es par fuerte fuente-orden y (ρ, s) es par orden-fuente. De esto último se sigue que existen una constante $\gamma > 0$ y una función $h : (0, \alpha_0) \to \mathbb{R}^+$ con $\lim_{\alpha\to 0^+} h(\alpha) = 0$, tales que

$$\frac{s(\lambda)\,|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} \geq \gamma \quad \forall\, \lambda \in [h(\alpha), +\infty). \tag{11}$$

Por otro lado, como (s, ρ) es par fuerte fuente-orden para $\{g_\alpha\}$, se sigue del Teorema 2.7 que existe $k > 0$ tal que

$$s(\lambda) \leq k\, s_\rho(\lambda) \quad \text{para todo } \lambda > 0. \tag{12}$$

De (11) y (12) resulta que

$$\frac{s_\rho(\lambda)\,|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} \geq \frac{\gamma}{k} \quad \forall\, \lambda \in [h(\alpha), +\infty),$$

es decir, s_ρ satisface (6) como queríamos probar.

Recíprocamente, supongamos que $s_\rho \in \mathcal{S}$ verifica (6) y (10). Por el Teorema 2.6 se tiene que (s_ρ, ρ) es un par fuerte fuente-orden para $\{g_\alpha\}$ y (6) implica que (ρ, s_ρ) es un par orden-fuente. Luego, ρ es calificación óptima de $\{g_\alpha\}$. □

El siguiente teorema, que presentamos sin demostración, permite afirmar que la función fuente es única. Mayores detalles se pueden encontrar en Spies and Temperini (2007).

Teorema 2.9. *(Unicidad de la función fuente.) Si ρ es calificación óptima de $\{g_\alpha\}$ entonces existe a lo sumo una única función s (en el sentido de la clase de equivalencia inducida por la Definición 2.2) tal que (s, ρ) es un par fuerte fuente-orden y (ρ, s) es un par orden-fuente para $\{g_\alpha\}$. Más aún, si $s_\rho \in \mathcal{S}$, entonces s_ρ es tal única función.*

3 EJEMPLOS

A continuación se presentan varios ejemplos que ilustran los distintos niveles de calificación introducidos en este artículo como así también las relaciones entre los mismos, con el concepto de calificación clásica y con la calificación introducida por Mathé y Pereverzev.

Ejemplo 1. El método de regularización de Tikhonov-Phillips $\{g_\alpha\}$ donde $g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda+\alpha}$ tiene calificación clásica de orden $\mu_0 = 1$ (Engl et al. (1996)). Veremos que $\rho(\alpha) = \alpha$ es calificación óptima en el sentido de la Definición 2.4 ***iii)***. En efecto, para $\lambda > 0$, $r_\alpha(\lambda) = \frac{\alpha}{\alpha+\lambda}$ y si $\rho(\alpha) = \alpha$ entonces $s_\rho(\lambda) = \liminf_{\alpha\to 0^+} \frac{\rho(\alpha)}{|r_\alpha(\lambda)|} = \lim_{\alpha\to 0}(\lambda + \alpha) = \lambda > 0$, es decir, s_ρ verifica (10). Además, puesto que

$$\frac{s_\rho(\lambda)\,|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} = \frac{\lambda}{\lambda+\alpha} \geq \frac{1}{2} \quad \forall\, \lambda \in [\alpha, +\infty),$$

se tiene que s_ρ verifica (6). Del Teorema 2.8 se sigue entonces que $\rho(\alpha) = \alpha$ es calificación óptima de $\{g_\alpha\}$.

Ejemplo 2. Sea $\{g_\alpha\}$ la familia de funciones asociada a la descomposición en valores singulares truncada (TSVD),

$$g_\alpha(\lambda) \doteq \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & \text{si } \lambda \in [\alpha, +\infty) \\ 0, & \text{si } \lambda \in [0, \alpha). \end{cases}$$

Se sigue que $\mu_0 = +\infty$, donde μ_0 es como en la Definición 1.1. Por lo tanto, TSVD no tiene calificación clásica. En este caso, se tiene que

$$r_\alpha(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{si } \lambda \in [\alpha, +\infty) \\ 1, & \text{si } \lambda \in [0, \alpha). \end{cases}$$

Sean $h(\alpha) = \alpha$ y $\rho \in \mathcal{O}$. Entonces

$$\sup_{\lambda\in[h(\alpha),+\infty)} |r_\alpha(\lambda)| = \sup_{\lambda\geq\alpha} |r_\alpha(\lambda)| = 0 \leq \rho(\alpha) \quad \text{para todo } \alpha \in (0, \alpha_0).$$

Luego, se sigue del Teorema 2.5.a) que cualquier función $\rho \in \mathcal{O}$ es calificación débil del método. Sin embargo, TSVD no tiene calificación fuerte. En efecto, para cualquier función $\rho \in \mathcal{O}$ se tiene que $s_\rho(\lambda) = \liminf_{\alpha\to 0^+} \frac{\rho(\alpha)}{|r_\alpha(\lambda)|} = +\infty$ para todo $\lambda > 0$. Por lo tanto, el Teorema 2.6 implica que ρ no es calificación fuerte del método. En Mathé and Pereverzev (2003) se observó que TSVD tiene calificación arbitraria en el sentido de la Definición 1.2.

Ejemplo 3. Para $\alpha \in (0, \alpha_0)$ con $\alpha_0 < e^{-1}$, definimos

$$g_\alpha(\lambda) \doteq \frac{1 + (\ln\alpha)^{-1}}{\lambda - (\ln\alpha)^{-1}}, \quad \text{para todo } \lambda \in [0, +\infty).$$

Claramente, $\{g_\alpha\}$ satisface las hipótesis *H1-H3* y por lo tanto es un MRE. Como $r_\alpha(\lambda) = \frac{1+\lambda}{1-\lambda\ln\alpha}$ para todo $\lambda \in [0,+\infty)$, resulta que para todo $\mu > 0$,

$$\frac{|r_\alpha(\lambda)|\,\lambda^\mu}{\alpha^\mu} = \frac{(1+\lambda)\lambda^\mu}{\alpha^\mu - \lambda\,\alpha^\mu \ln\alpha} \to +\infty \text{ cuando } \alpha \to 0^+ \text{ para todo } \lambda \in [0,+\infty).$$

Luego, $\mu_0 = 0$ y por lo tanto $\{g_\alpha\}$ no tiene calificación clásica.

Sin embargo, veremos que $\rho(\alpha) = -(\ln\alpha)^{-1}$ es calificación óptima de $\{g_\alpha\}$. En efecto, como $s_\rho(\lambda) = \liminf\limits_{\alpha\to 0^+} \frac{\rho(\alpha)}{|r_\alpha(\lambda)|} = \lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\lambda-(\ln\alpha)^{-1}}{1+\lambda} = \frac{\lambda}{1+\lambda} \in (0,+\infty)$ para todo $\lambda > 0$ y

$$\frac{s_\rho(\lambda)\,|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} = \frac{\lambda}{\lambda - (\ln\alpha)^{-1}} \geq \frac{1}{2} \quad \forall\, \lambda \in [-(\ln\alpha)^{-1}, +\infty),$$

se sigue del Teorema 2.8 que $\rho(\alpha) = -(\ln\alpha)^{-1}$ es calificación óptima de $\{g_\alpha\}$.

Ejemplo 4. Sea $\{g_\alpha\}$ el MRE definido en el Ejemplo 3, el cual no tiene calificación clásica debido a que $\mu_0 = 0$. En dicho ejemplo probamos que $-(\ln\alpha)^{-1}$ es calificación óptima y en consecuencia, débil. Como $-(\ln\alpha)^{-1} \preceq (-\ln\alpha)^{-\frac{1}{2}}$, se deduce inmediatamente que $\rho(\alpha) = (-\ln\alpha)^{-\frac{1}{2}}$ es calificación débil. Veamos que ρ no es calificación fuerte del método. Para cualquier $s \in \mathcal{S}$, se tiene que

$$\limsup_{\alpha\to 0^+} \frac{s(\lambda)\,|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} = \limsup_{\alpha\to 0^+} \frac{s(\lambda)\,(1+\lambda)}{(1-\lambda\ln\alpha)\,(-\ln\alpha)^{-\frac{1}{2}}} = 0 \quad \forall\, \lambda > 0.$$

Es importante observar que si $\rho(\alpha) = \alpha^\mu$ es calificación fuerte de un MRE entonces se sigue inmediatamente de la definición de par fuerte fuente-orden que el método tiene calificación clásica de orden μ. En el siguiente ejemplo veremos que el recíproco no es cierto. Luego, es la calificación débil y no la fuerte la que generaliza la noción clásica de este concepto.

Ejemplo 5. Para $\alpha \in (0,\alpha_0)$ con $\alpha_0 < 1/2$ definimos

$$h_\alpha(\lambda) \doteq \frac{\alpha}{\alpha + \ln(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda})}$$

y

$$g_\alpha(\lambda) \doteq \begin{cases} \frac{1-h_\alpha(\lambda)}{\lambda+h_\alpha(\lambda)}, & \text{si } \lambda \in [2\alpha,+\infty) \\ \frac{1-h_\alpha(2\alpha)}{2\alpha+h_\alpha(2\alpha)} = \left(2\alpha - \frac{\alpha+2\alpha^2}{\ln 3}\right)^{-1}, & \text{si } \lambda \in [0,2\alpha). \end{cases}$$

En este caso,

$$r_\alpha(\lambda) \doteq \begin{cases} \frac{\alpha(1+\lambda)}{\lambda\ln(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda})+\alpha(1+\lambda)}, & \text{si } \lambda \in [2\alpha,+\infty) \\ 1 - \lambda\left(2\alpha - \frac{\alpha+2\alpha^2}{\ln 3}\right)^{-1}, & \text{si } \lambda \in [0,2\alpha). \end{cases}$$

Es inmediato probar que $\{g_\alpha\}$ es un MRE con calificación clásica de orden $\mu_0 = 1$. Sin embargo, $\rho(\alpha) = \alpha$ no es calificación fuerte del método. En efecto, para cualquier $s \in \mathcal{S}$, se puede ver que

$$\frac{s(\lambda)\,|r_\alpha(\lambda)|}{\alpha} = o(1) \quad \text{cuando } \alpha \to 0^+,\ \forall\, \lambda \geq 0$$

y por lo tanto no se satisface (5).

Los MREs que poseen calificación fuerte que no es óptima tienen propiedades muy particulares. Por ejemplo, es posible probar que si ρ es calificación fuerte no óptima, entonces para todo $\lambda > 0$, la función $\frac{s_\rho(\lambda)|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)}$ no es de variación acotada como función de α en ningún entorno de $\alpha = 0$. Aún así, el siguiente ejemplo prueba la existencia de un MRE con calificación fuerte no óptima y muestra que calificación fuerte no implica calificación óptima.

Ejemplo 6. Para $\alpha, \lambda > 0$ definimos $g_\alpha(\lambda)$ mediante

$$g_\alpha(\lambda) \doteq \lambda^{-1}(1 - e^{-\frac{\lambda}{\alpha}}) - e^{-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}\lambda^{-3/2}\left|\sin(\lambda^{\frac{3}{2}}/\alpha)\right|,$$

de modo que

$$r_\alpha(\lambda) = e^{-\frac{\lambda}{\alpha}} + e^{-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}\lambda^{-1/2}\left|\sin(\lambda^{\frac{3}{2}}/\alpha)\right|.$$

Se puede verificar inmediatamente que $\{g_\alpha\}$ es un MRE que no posee calificación clásica ($\mu_0 = \infty$). Sin embargo, con $\rho(\alpha) \doteq e^{-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
s_\rho(\lambda) &= \liminf_{\alpha\to 0^+} \frac{\rho(\alpha)}{r_\alpha(\lambda)} \\
&= \frac{1}{\limsup\limits_{\alpha\to 0^+}\left[e^{-\frac{\lambda}{\alpha}+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} + \lambda^{-1/2}|\sin(\lambda^{\frac{3}{2}}/\alpha)|\right]} \\
&= \lambda^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Como $s_\rho(\lambda) = \lambda^{1/2} \in \mathcal{S}$, por el Teorema 2.6 (s_ρ, ρ) es un par fuerte fuente-orden y $\rho(\alpha) = e^{-1/\sqrt{\alpha}}$ es calificación fuerte del método. Sin embargo, $\forall\, \lambda > 0$ se tiene que

$$\liminf_{\alpha\to 0^+} \frac{s_\rho(\lambda)|r_\alpha(\lambda)|}{\rho(\alpha)} = \liminf_{\alpha\to 0^+}\left(\lambda^{1/2}e^{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}-\frac{\lambda}{\alpha}} + |\sin(\lambda^{\frac{3}{2}}/\alpha)|\right) = 0,$$

por lo tanto no vale (6) y $\rho(\alpha) = e^{-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}$ no es calificación óptima del método.

Ejemplo 7. Consideremos el método de Showalter donde $g_\alpha(\lambda) \doteq \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\frac{\lambda}{\alpha}})$. Este método no tiene calificación clásica pues $\mu_0 = \infty$. Se sigue del Teorema 2.5 que $\rho(\alpha) = e^{-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}$ es calificación débil de este método. Sin embargo, se puede ver fácilmente que dicha función no satisface la condición (3) y por lo tanto $\rho(\alpha)$ no es calificación en el sentido de la Definición 1.2.

Ejemplo 8. Como mencionamos anteriormente, el método de Landweber $\{g_\alpha\}$ donde $g_\alpha(\lambda) \doteq \frac{1}{\lambda}(1 - (1 - \mu\lambda)^{\frac{1}{\alpha}})$, para $\alpha \leq 1$ y $\mu < \frac{1}{\|T\|^2}$, no tiene calificación clásica debido a que $\mu_0 = \infty$. Se puede probar fácilmente usando el Teorema 2.5 que $\rho(\alpha) = (1 - \mu\alpha^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{\alpha}}$ es calificación débil de este método.

Observar que los Ejemplos 2, 3, 4, 6, 7 y 8 corresponden a métodos de regularización espectral que no poseen calificación clásica, y sin embargo sí poseen calificación en alguno de los sentidos en que este concepto ha sido extendido en el presente artículo en la Definición 2.4.

En la Figura 1 se visualizan los distintos niveles de calificación introducidos en este artículo y la relación entre los mismos como así también con la calificación clásica y la calificación introducida por Mathé y Pereverzev.

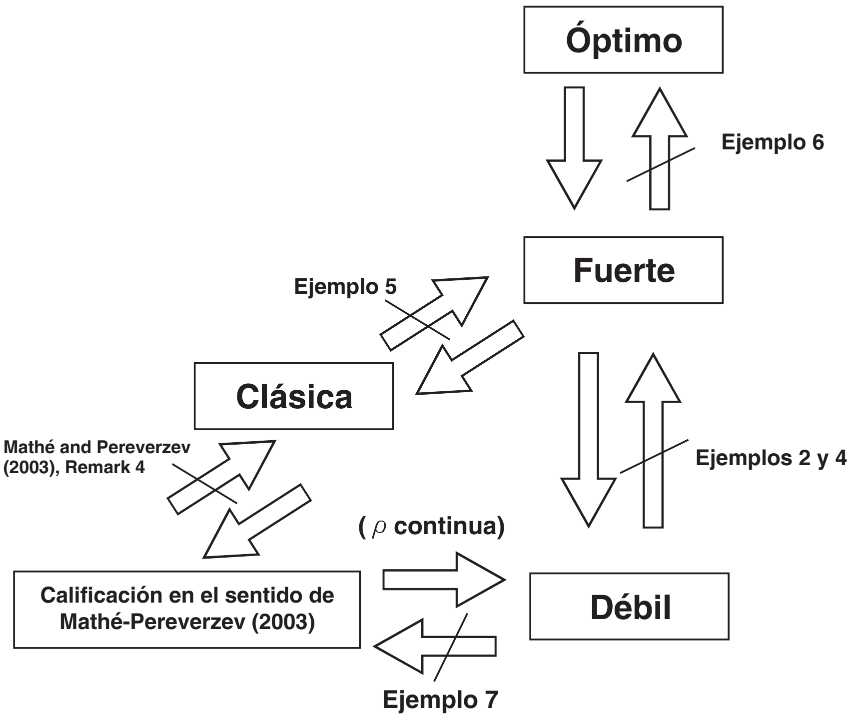

Figura 1. Relación entre los diferentes niveles de calificación, la calificación clásica y la calificación definida en Mathé and Pereverzev (2003).

4 ÓRDENES DE CONVERGENCIA, RESULTADOS RECÍPROCOS Y CONJUNTOS FUENTE MAXIMALES

En esta sección presentamos algunas implicaciones que tiene la generalización del concepto de calificación en el contexto de órdenes de convergencia, resultados recíprocos y conjuntos fuente maximales para problemas inversos mal condicionados.

Sean X, Y espacios de Hilbert de dimensión infinita y $T : X \to Y$ un operador lineal, acotado, inversible con $\mathcal{R}(T)$ no cerrado. Para $s \in \mathcal{S}$, entenderemos por "conjunto fuente asociado a la función s y al operador T" al conjunto $\mathcal{R}(s(T^*T))$.

El siguiente resultado directo, cuya demostración se sigue inmediatamente del concepto de par débil fuente-orden, afirma que si la solución exacta $x^\dagger$ del problema $Tx = y$ pertenece al conjunto fuente $\mathcal{R}(s(T^*T))$ y (s, ρ) es un par débil fuente-orden para $\{g_\alpha\}$, entonces el error de regularización $\left\|R_\alpha y - x^\dagger\right\|$ tiene orden de convergencia $\rho(\alpha)$. Por razones de brevedad no damos la demostración aquí.

Teorema 4.1. *Sean ρ calificación débil de $\{g_\alpha\}$ y $s \in \mathcal{S}$ tal que (s, ρ) es un par débil fuente-orden para $\{g_\alpha\}$. Si $x^\dagger \doteq T^\dagger y \in \mathcal{R}(s(T^*T))$ entonces $\left\|(R_\alpha - T^\dagger)y\right\| = O(\rho(\alpha))$ cuando $\alpha \to 0^+$.*

El resultado anterior es una generalización del Teorema 4.3 de Engl et al. (1996) al caso de MRE con calificación débil y conjuntos fuente generales. En efecto, este corresponde al caso particular en que $\{g_\alpha\}$ tiene calificación clásica de orden μ.

El siguiente resultado recíproco afirma que si el error de regularización tiene orden de convergencia $\rho(\alpha)$ y (ρ, s) es un par orden-fuente entonces la solución exacta pertenece al rango del operador $s(T^*T)$.

Teorema 4.2. *Si (ρ, s) es un par orden-fuente para $\{g_\alpha\}$ y $\left\|(R_\alpha - T^\dagger)y\right\| = O(\rho(\alpha))$ cuando $\alpha \to 0^+$, entonces $x^\dagger \in \mathcal{R}(s(T^*T))$.*

Demostración. Se sigue inmediatamente de la definición de par orden-fuente para $\{g_\alpha\}$. $\square$

Es oportuno observar que el Teorema 4.2 es una generalización del Teorema 4.11 de Engl et al. (1996). En efecto, este último corresponde al caso particular en que $s(\lambda) \doteq \lambda^\mu$ y $\rho(\alpha) \doteq \alpha^\mu$. Si además ρ es calificación óptima entonces también vale el recíproco del Teorema 4.2, como se prueba a continuación.

Teorema 4.3. *Si ρ es calificación óptima de $\{g_\alpha\}$ y $s_\rho \in \mathcal{S}$, entonces $\left\|(R_\alpha - T^\dagger)y\right\| = O(\rho(\alpha))$ cuando $\alpha \to 0^+$ si y sólo si $x^\dagger \in \mathcal{R}(s_\rho(T^*T))$.*

Demostración. Sean ρ calificación óptima de $\{g_\alpha\}$ y $s_\rho \in \mathcal{S}$. Entonces por el Teorema 2.9, (ρ, s_ρ) es par orden-fuente para $\{g_\alpha\}$ y como $\left\|(R_\alpha - T^\dagger)y\right\| = O(\rho(\alpha))$ cuando $\alpha \to 0^+$, se sigue del Teorema 4.2 que $x^\dagger \in \mathcal{R}(s_\rho(T^*T))$.

Recíprocamente, si $x^\dagger \in \mathcal{R}(s_\rho(T^*T))$, como en virtud del Teorema 2.9 (s_ρ, ρ) es par fuerte fuente-orden, el Teorema 4.1 implica que $\left\|(R_\alpha - T^\dagger)y\right\| = O(\rho(\alpha))$ cuando $\alpha \to 0^+$. $\square$

Un resultado importante en lo que respecta a la existencia y maximalidad de conjuntos fuente es el siguiente: si ρ es calificación fuerte de un MRE y $s_\rho \in \mathcal{S}$ se sigue inmediatamente del Teorema 2.7 que $\mathcal{R}(s_\rho(T^*T))$ es un conjunto fuente maximal donde ρ es orden de convergencia del error de regularización. Más precisamente, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 4.4. *Sean $\rho \in \mathcal{O}$ calificación fuerte de $\{g_\alpha\}$ tal que $s_\rho \in \mathcal{S}$ y $s \in \mathcal{S}$. Si (s, ρ) es un par fuerte fuente-orden para $\{g_\alpha\}$ y $\mathcal{R}(s(T^*T)) \supset \mathcal{R}(s_\rho(T^*T))$ entonces $\mathcal{R}(s(T^*T)) = \mathcal{R}(s_\rho(T^*T))$.*

Demostración. Bajo las hipótesis del Teorema 2.7, existe $k > 0$ tal que $s(\lambda) \leq k\, s_\rho(\lambda)$ para todo $\lambda > 0$, lo cual implica que $\mathcal{R}(s(T^*T)) \subset \mathcal{R}(s_\rho(T^*T))$. $\square$

Si además ρ es calificación óptima se obtiene el siguiente resultado más fuerte.

Teorema 4.5. *Si $\rho \in \mathcal{O}$ es calificación óptima de $\{g_\alpha\}$ y $s_\rho \in \mathcal{S}$, entonces $\mathcal{R}(s_\rho(T^*T))$ es el único conjunto fuente donde ρ es calificación óptima de $\{g_\alpha\}$.*

Demostración. Este resultado se sigue inmediatamente del Teorema 2.9. $\square$

Ejemplos:

1. Para la regularización de Tikhonov-Phillips el único conjunto fuente donde $\rho(\alpha) = \alpha$ es calificación óptima es $\mathcal{R}(s_\rho(T^*T)) = \mathcal{R}(T^*T)$, puesto que en este caso $s_\rho(\lambda) = \lambda$.

2. En el Ejemplo 3 de la Sección 3 vimos que $\rho(\alpha) = -(\ln\alpha)^{-1}$ es calificación óptima de $\{g_\alpha\}$ y $s_\rho(\lambda) = \frac{\lambda}{1+\lambda}$. Puesto que $\frac{\lambda}{1+\lambda} \approx \lambda$ se tiene que $\mathcal{R}(s_\rho(T^*T)) = \mathcal{R}(T^*T)$ es el único conjunto fuente donde ρ es calificación óptima.

3. En el Ejemplo 6 de la sección anterior para $\rho(\alpha) \doteq e^{-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}$ se tiene que $s_\rho(\lambda) = \lambda^{1/2}$. Como ρ es calificación fuerte del MRE, se sigue que $\mathcal{R}(s_\rho(T^*T)) = (T^*T)^{1/2}$ es un conjunto fuente maximal donde ρ es orden de convergencia del error de regularización.

4. Como vimos en el Ejemplo 7, $\rho(\alpha) = e^{-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}$ es calificación débil del método de Showalter. Se puede ver fácilmente que para cada $s \in \mathcal{S}$, (s, ρ) es un par débil fuente-orden para el método. Por lo tanto, se sigue del Teorema 4.1 que el error de regularización $\left\|R_\alpha y - x^\dagger\right\|$ tiene orden de convergencia $\rho(\alpha) = e^{-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}$ siempre que $x^\dagger \in \bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} \mathcal{R}(s(T^*T))$.

5. Para el método de Landweber dado en el Ejemplo 8 y la función $\rho(\alpha) = (1 - \mu\sqrt{\alpha}\,)^{\frac{1}{\alpha}}$ sucede lo mismo que en 4.

5 CONCLUSIONES

En este trabajo se extendió la definición de calificación introducida en Mathé and Pereverzev (2003), principalmente permitiendo que las funciones asociadas a órdenes de convergencia y conjuntos fuente no necesariamente sean las mismas. Se introdujeron tres niveles de calificación generalizada: débil, fuerte y óptimo. Se mostró que el primero de estos niveles extiende la definición de calificación dada por Mathé y Pereverzev y se presentó un ejemplo de un MRE que tiene calificación débil que no es calificación en el sentido de la Definición 1.2. Se dio una condición suficiente que garantiza que un MRE posee calificación en el sentido de esta generalización. También se probaron condiciones necesarias y suficientes para que un orden de convergencia dado sea calificación fuerte u óptima. Se presentaron varios ejemplos de MREs que no tienen calificación clásica y sí poseen calificación generalizada en alguno de los niveles definidos en este trabajo. Por último, se mostraron brevemente algunas implicaciones de esta teoría en el contexto de órdenes de convergencia, resultados recíprocos y conjuntos fuente maximales para problemas inversos mal condicionados.

REFERENCES

Dutray R. and Lions J.L. *Spectral Theory and Applications*, volume 3 of *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*. Springer, 1990.

Engl H.W., Hanke M., and Neubauer A. *Regularization of inverse problems*, volume 375 of *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers Group, 1996.

Mathé P. and Pereverzev S.V. Geometry of linear ill-posed problems in variable Hilbert scales. *Inverse Problems*, 19(3):789–803, 2003.

Neubauer A. On converse and saturation results for regularization methods. In *Beiträge zur angewandten Analysis und Informatik*, pages 262–270. Shaker, Aachen, 1994.

Neubauer A. On converse and saturation results for tikhonov regularization of linear ill-posed problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 34:517–527, 1997.

Seidman T.I. Nonconvergence results for the application of least-squares estimation to ill-posed problems. *J. Optim. Theory Appl.*, 30(4):535–547, 1980.

Spies R.D. and Temperini K.G. Arbitrary divergence speed of the least-squares method in infinite-dimensional inverse ill-posed problems. *Inverse Problems*, 22(2):611–626, 2006.

Spies R.D. and Temperini K.G. Generalized qualification and qualification levels for spectral regularization methods. *preprint, enviado a publicar*, 2007.