

## MODELADO ELÁSTICO Y ANISÓTROPO DE MARMOUSI2

**Jairo A. Torres<sup>a</sup>, Herling Gonzalez<sup>b</sup> y Carlos C. Piedrahita<sup>b</sup>**

<sup>a</sup>*Grupo Petrosísmica, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, Correo:*  
*jatorresp@gmail.com <http://www.xiccg.uis.edu.co/petrosismica/>*

<sup>b</sup>*Grupo de Geofísica UIN, ECOPETROL Instituto Colombiano de Petróleo, Piedecuesta, Colombia,*  
*Correo(s): [herling@tux.uis.edu.co](mailto:herling@tux.uis.edu.co) y [carlos.piedrahita@ecopetrol.com.co](mailto:carlos.piedrahita@ecopetrol.com.co), <http://www.ecopetrol.com.co>*

**Palabras clave:** Diferencias finitas dominio temporal, Ecuación elástica, Anisotropía polar vertical, Marmousi2.

**Resumen.** Se presenta un esquema numérico en diferencias finitas dominio temporal para solucionar la ecuación de onda elástica en dos dimensiones, este esquema utiliza una aproximación de cuarto orden para las derivadas espaciales y segundo orden para las derivadas en el tiempo, basado en una malla discreta similar a la descrita por Levander (1988).

El campo de onda es solucionado en el modelo de Marmousi2 donde se le ha inducido una anisotropía polar vertical. El modelo asume que la anisotropía aumenta en presencia de medios de baja velocidad como lo ocurrido en capas estratificadas de arenisca y arcilla. También asume una variación lateral de la velocidad en función de la profundidad. Para este modelado se tiene en cuenta los parámetros de anisotropía descritos por y la anelpticidad usada por Alkhalifah y Tsvankin (1995).

## 1. INTRODUCCIÓN

La sismica de reflexión son un conjunto de técnicas utilizadas para adquisición, modelado, procesamiento e interpretación sísmica. El uso de esquemas numéricos es importante y valioso para el modelado sísmico de ciertas regiones o estructuras geológicas. Este modelado busca obtener una imagen interna del subsuelo en base a modelos sintéticos con el fin de entender y conocer los rasgos del interior de la tierra con el propósito de encontrar reservas de hidrocarburos, minerales o gas. Durante varias décadas el uso estos esquemas y principalmente los que utilizan diferencias finitas aportaron a la solución de la ecuación de onda expresada en derivadas parciales. En trabajos como los de Madarriaga (1976), Virieux (1984 y 1986) y Levander (1998) se implementaron estos tipos de soluciones numéricas para el medio acústico y elástico Isótropo 2D. Estas aproximaciones son usadas para transformar un conjunto de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales en un conjunto algebraico que evaluá el campo en nodos de una malla discreta y de esta manera encontrar una solución aproximada de las ecuaciones para medios con propiedades y características similares a la del subsuelo.

En este trabajo utilizamos la ecuación elástica considerando anisotropía polar vertical a través de las relaciones constitutivas y de movimiento para el caso bidimensional. Serán discretizadas usando el esquema arriba mencionado, usaremos la relaciones entre los coeficientes elásticos del medio y los parámetros  $\varepsilon$ ,  $\gamma$  y  $\delta$  definidos por Thomsen (1986), la anelpticidad  $\eta$  relacionada con las velocidades horizontal y la velocidad en dirección del eje de simetría de las ondas  $P$  y  $S$ . El modelo de Marmousi2 (Martin, G. R., 2006) es muy conocido y usado en migración e inversión sísmica, el modelo esta compuesto por capas estratificadas, posee variaciones laterales fuertes y fallas. Simularemos las ondas sísmicas  $P$  y la componente vertical de la onda  $S$  observando el comportamiento del campo de onda cuando atraviesa las capas. En ciertas capas de este modelo consideramos que la anisotropía aumenta cuando la velocidad vertical de la onda disminuye y es típico de las capas sedimentarias que poseen arcilla o areniscas. Usaremos la expresión de la variación de la velocidad horizontal  $v_h$  con la profundidad  $z$  usado por Alkhalifah, (1997)

## 2. TEORÍA

La ecuación de movimiento de Cauchy (Slawinsky, 2003) para un medio continuo linealmente elástico tridimensional que no considera fuerzas de cuerpo esta dada por la ecuación (1)

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (1)$$

Donde  $u_i$  es el desplazamiento de una partícula en un tiempo  $t$  y posición  $x_j$ , el  $\sigma_{ij}$  es la tensión. La expresión de la deformación  $\varepsilon_{ij}$  esta dado por la ecuación (2).

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right), \quad k, l \in \{1, 2, 3\} \quad (2)$$

A continuación escribiremos la relación entre el esfuerzo y la tensión para un medio elástico (ley de Hooke).

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (3)$$

El tensor de cuarto orden  $C_{ijkl}$  describe las propiedades del medio, los dos primeros subíndices están relacionados con la tensión y los dos últimos con la deformación, ahora si sustituimos la ecuación (3). en (1) se obtiene.

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_j} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (4)$$

La expresión (4) es la conocida ecuación de onda. No obstante el tensor de cuarto orden es simétrico en los dos primeros índices y en los dos últimos, esta propiedad y la condición de que el medio es elástico hicieron posible a Voigt definir una nueva representación de este tensor como una matriz de seis por seis, que Thomsen describió en el trabajo del 1986.

## 2.1. Medio Isótropo

La representación del tensor de elasticidad para el medio isótropo esta dada por la matriz de Voigt en (5).

$$C_{\text{Iso}} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & & & \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & & & \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & & & \\ & & & C_{44} & & \\ & & & & C_{44} & \\ & & & & & C_{44} \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$C_{11} = \lambda + 2\mu \quad C_{12} = \lambda \quad C_{44} = \mu \quad (6)$$

El conjunto de ecuaciones de conservación del momentum y las de de esfuerzo para el medio isótropo en dos dimensiones son:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \\ \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} &= C_{11} \frac{\partial v_x}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} &= C_{12} \frac{\partial v_x}{\partial x} + C_{11} \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} &= C_{44} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Donde  $(v_x, v_z)$  son las componentes de la velocidad,  $(\sigma_{xx}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz})$  son los esfuerzos principales y de corte,  $\rho$  es la densidad de masa.

## 2.2. Medio con Anisotropía Polar Vertical

Un material con anisotropía polar vertical esta completamente especificado por cinco constantes independientes elásticas, no obstante Thomsen (1986) introdujo tres parámetros anisótropo-

pos,  $\varepsilon$ ,  $\delta$ , y  $\gamma$ , para describir la anisotropía.

$$\varepsilon = \frac{C_{11} - C_{33}}{2C_{33}} \quad (8)$$

$$\gamma = \frac{C_{66} - C_{44}}{2C_{44}} \quad (9)$$

$$\delta = \frac{(C_{13} + C_{44})^2 - (C_{33} - C_{44})^2}{2C_{33}(C_{33} - C_{44})} \quad (10)$$

$$C_{66} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \quad (11)$$

La matriz de Voigt para un medio con anisotropía polar vertical queda dado por la ecuación (12).

$$C_{\text{Polar}} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & & & \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & & 0 & \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & & & \\ & & & C_{44} & & \\ & 0 & & & C_{44} & \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Las ecuaciones de movimiento para un medio con anisotropía polar vertical en términos de las velocidades, esfuerzos y los coeficientes elásticos son:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \\ \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} &= C_{11} \frac{\partial v_x}{\partial x} + C_{13} \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} &= C_{13} \frac{\partial v_x}{\partial x} + C_{33} \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} &= C_{44} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

### 3. ESQUEMA EN DIFERENCIAS FINITAS

Usando una aproximación de segundo orden para las derivadas en el tiempo, la solución de las ecuaciones (7) del medio isótropo puede ser expresada de forma discreta como

$$\begin{aligned}
 v_x|_{i+1/2,j}^{n+1} &= v_x|_{i+1/2,j}^n + b_{i+1/2,j} \delta t (D_x \sigma_{xx} + D_z \sigma_{xz})|_{i+1/2,j}^n \\
 v_z|_{i,j+1/2}^{n+1} &= v_z|_{i,j+1/2}^n + b_{i,j+1/2} \delta t (D_x \sigma_{xz} + D_z \sigma_{zz})|_{i,j+1/2}^n \\
 \sigma_{xx}|_{i,j}^{n+1/2} &= \sigma_{xx}|_{i,j}^{n-1/2} + \delta t (C_{11} D_x v_x + C_{12} D_z v_z)|_{i,j}^n \\
 \sigma_{zz}|_{i,j}^{n+1/2} &= \sigma_{zz}|_{i,j}^{n-1/2} + \delta t (C_{12} D_x v_x + C_{11} D_z v_z)|_{i,j}^n \\
 \sigma_{xz}|_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} &= \sigma_{xz}|_{i+1/2,j+1/2}^{n-1/2} + \delta t (C_{44} D_z v_x + C_{44} D_x v_z)|_{i+1/2,j+1/2}^n
 \end{aligned} \tag{14}$$

y para (13) del medio anisotropía polar vertical es.

$$\begin{aligned}
 v_x|_{i+1/2,j}^{n+1} &= v_x|_{i+1/2,j}^n + b_{i+1/2,j} \delta t (D_x \sigma_{xx} + D_z \sigma_{xz})|_{i+1/2,j}^n \\
 v_z|_{i,j+1/2}^{n+1} &= v_z|_{i,j+1/2}^n + b_{i,j+1/2} \delta t (D_x \sigma_{xz} + D_z \sigma_{zz})|_{i,j+1/2}^n \\
 \sigma_{xx}|_{i,j}^{n+1/2} &= \sigma_{xx}|_{i,j}^{n-1/2} + \delta t (C_{11} D_x v_x + C_{13} D_z v_z)|_{i,j}^n \\
 \sigma_{zz}|_{i,j}^{n+1/2} &= \sigma_{zz}|_{i,j}^{n-1/2} + \delta t (C_{13} D_x v_x + C_{33} D_z v_z)|_{i,j}^n \\
 \sigma_{xz}|_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} &= \sigma_{xz}|_{i+1/2,j+1/2}^{n-1/2} + \delta t (C_{44} D_z v_x + C_{44} D_x v_z)|_{i+1/2,j+1/2}^n
 \end{aligned} \tag{15}$$

En las dos ecuaciones (14) y (15) los subíndices  $i$  y  $j$  representan las componentes espaciales en dirección  $x$  y  $z$  respectivamente,  $n$  es el índice del tiempo,  $\delta t$  el paso del tiempo, el parámetro  $b_{i,j}$  es el inverso de la densidad y  $D_\alpha$  representa el operador centrado de diferencias finitas de la derivada espacial de  $\partial/\partial\alpha$  con respecto a la variable  $\alpha$  y dada por la ecuación (16) según el orden de aproximación.

#### 3.1. Operador de Cuarto Orden

Las derivadas espaciales de las ecuaciones de movimiento de los medios isótropos y anisotropía polar vertical discretizadas están dadas de la forma.

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha} \simeq D_\alpha v_\alpha|_{i,j}^n \tag{16}$$

Donde  $D_\alpha$  representa la forma discreta del operador diferencias  $\frac{\partial}{\partial \alpha}$  actuando en la variable  $v_\alpha$ , y evaluada en los puntos  $(x, z) = (i\delta x, j\delta z)$ , con un espaciado  $\delta h$  uniforme en la malla, el operador de cuarto orden en diferencias finitas puede escribirse como (Levander, 1988)

$$D_x v_x|_{i,j}^n \simeq \frac{1}{\delta h} \left[ \frac{9}{8} (v_x|_{i+1/2,j}^n - v_x|_{i-1/2,j}^n) - \frac{1}{24} (v_x|_{i+3/2,j}^n - v_x|_{i-3/2,j}^n) \right] \tag{17}$$

### 3.2. Condición de Estabilidad y Dispersión

Para los esquemas numéricos dados en las ecuaciones (14) y (15), es indispensable la condición de estabilidad y en el trabajo de Levander (1988), tal condición está dada por la expresión

$$\delta t \leq 0,606 \left( \frac{\delta h}{v_{max}} \right) \quad (18)$$

Donde  $v_{max}$  es el valor de la velocidad máxima del medio y esta se refiere a la velocidad de la onda compresional y la otra condición importante en él esquema, es la de mínima dispersión en la malla (Levander, 1988)

$$f < \left( \frac{v_{min}}{10\delta h} \right) \quad (19)$$

Donde  $f$  es la frecuencia máxima de la onda y  $v_{min}$  la velocidad mínima de la onda. Una buena regla es trabajar para que la longitud de onda sea del orden de 8 a 10 veces el tamaño de la celda.

## 4. MODELO

El modelo de Marmousi, creado inicialmente por el Instituto Francés de Petróleo (IFP), es usado comúnmente en procesamiento de datos sísmicos como migración e inversión. Además los datos utilizados en este trabajo para crear los modelos de velocidad y densidad se basan en una segunda versión del modelo conocido como Marmousi2, que hizo parte de una disertación de maestría en la Universidad de Houston, U.S.A. (Gary Martin, 2004), ver figuras 1 y 2.

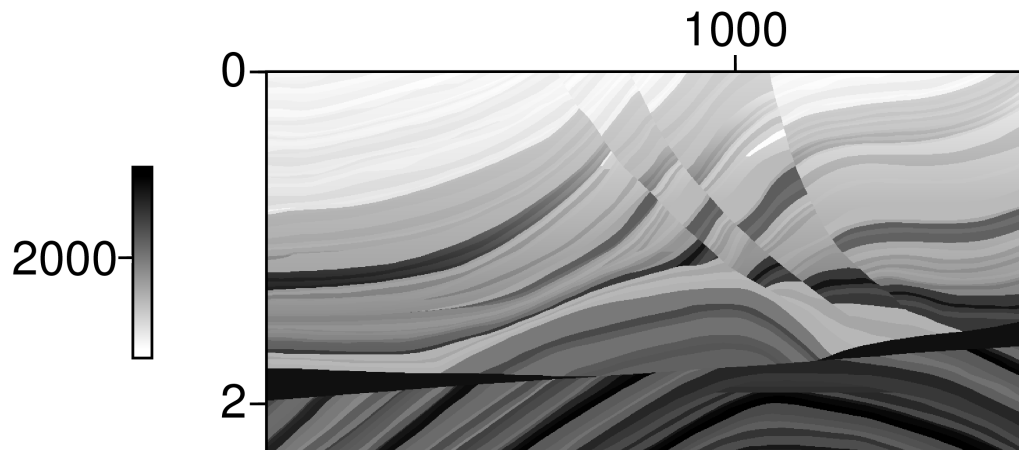
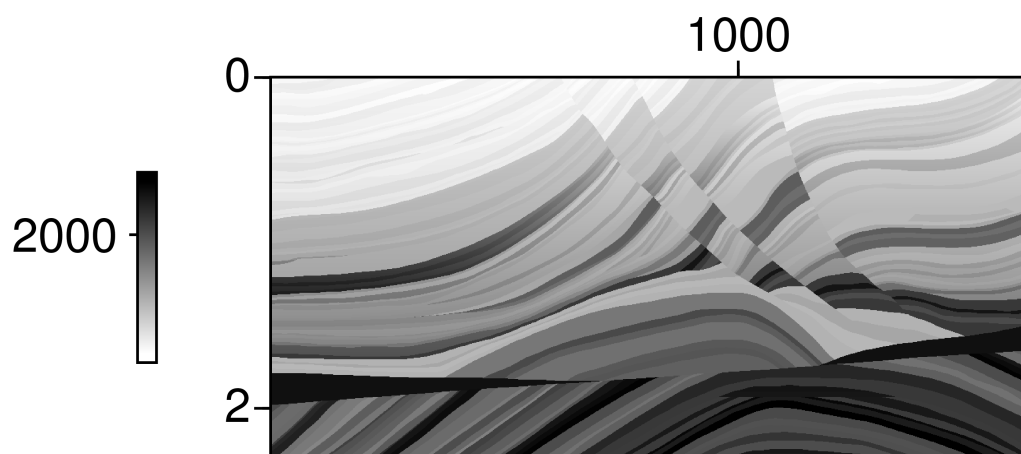


Figura 1: Valores de velocidad de onda  $P$

Según Alkhalifah (1997) se asume en este modelo que:

1. La anisotropía aumenta cuando la velocidad disminuye, esta es una propiedad de los sedimentos con areniscas y arcilla.
2. La velocidad horizontal aumenta gradualmente con la profundidad.

Los parámetros a tener en cuenta son: la anelípticidad  $\eta$ , la velocidad de onda la  $P$  en dirección del eje de simetría  $\alpha$ , la velocidad  $\beta$  de onda  $S$ , el valor de la densidad  $\rho$  y los parámetros

Figura 2: Valores de velocidad de onda  $S$ 

de Thomsen  $\varepsilon$  y  $\delta$ . Ahora bien el cambio de la velocidad horizontal  $v_h$  esta dada por la expresión (20).

$$v_h = 1750 + 0,8z \quad (20)$$

Y la anelipticidad  $\eta$  definida por Alkhalifah y Tsvankin (1997a) en terminos de la velocidad horizontal y la velocidad de apilamiento o velocidad NMO  $v$ .

$$\eta = \frac{1}{2} \left( \frac{v_h^2}{v^2} - 1 \right) \quad (21)$$

En el caso de  $\eta = 0$  el medio se considera con anisotropía elíptica, y los valores de  $\varepsilon$  y  $\delta$  son iguales a razón de la expresión (22)

$$\eta = \frac{\varepsilon - \delta}{1 + 2\delta} \quad (22)$$

Se conoce según Alkhalifah y Tsvankin (1997a) que si  $\alpha = v$  entonces se puede hablar de un medio isótropo.

#### 4.1. Cálculo de Parámetros y coeficientes

En la tabla 1 están los coeficientes elásticos de la representación del tensor de elasticidad  $C_{i,j,k,l}$  para el medio con anisotropía polar vertical. Además estos son calculados a través de la velocidad vertical  $P$ , denotada por  $\alpha$ , la velocidad vertical de la onda  $S$ , denotada por  $\beta$ , la densidad  $\rho$ , la velocidad lateral  $v_h$  y la velocidad de apilamiento  $v$ .

Coefficiente elástico	Parámetros que intervienen	Relación
$C_{33}$	$\alpha, \rho$	$\alpha^2 \rho$
$C_{44}$	$\beta, \rho$	$\beta^2 \rho$
$C_{11}$	$\alpha, \rho, \varepsilon$	$(1 + 2\varepsilon)\alpha^2 \rho$
$C_{13}$	$\alpha, \beta, \rho, \delta$	$(D - \beta^2) \rho$

Tabla 1: Coeficientes elásticos del medio con anisotropía polar vertical

Aquí  $D$  esta dada por la relación siguiente.

$$D = \sqrt{2\alpha^2\delta(\alpha^2 - \beta^2) + (\alpha^2 - \beta^2)^2} \quad (23)$$

Para el caso isótropo los coeficientes quedaran descritos en la tabla 2.

Coeficiente elástico	Parámetros que intervienen	Relación
$C_{11}$	$\alpha, \rho$	$\alpha^2\rho$
$C_{44}$	$\beta, \rho$	$\beta^2\rho$
$C_{12}$	$\alpha, \beta, \rho$	$(\alpha^2 - 2\beta^2)\rho$

Tabla 2: Coeficientes elásticos para el medio isótropo

Para calcular los coeficientes descritos arriba debemos hallar el valor de  $\varepsilon$  usando la ecuación (24)

$$\varepsilon = \frac{v_h - \alpha}{\alpha} \quad (24)$$

Debido a que el parámetro  $\delta$  no se conoce, buscaremos un valor aproximado  $\tilde{\delta}$ , de manera iterativa, usando las ecuaciones (20), (21) y (22) de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \text{Inicio : } \eta &= \frac{1}{2} \left[ \frac{v_h^2}{\alpha^2(1 + 2\tilde{\delta})} - 1 \right] \\ \varepsilon &= \frac{v_h - \alpha}{\alpha} \\ \tilde{\delta} &= \frac{\varepsilon - \eta}{2\eta + 1} \end{aligned} \quad (25)$$

**Si**  $|\tilde{\delta} - \delta| < 0.0001$  **Entonces**

$\delta \leftarrow \tilde{\delta}$  **Salir de la iteración**

**Mientras**  $\tilde{\delta} \leftarrow \delta$  **Y vaya a inicio**

## 5. LA FUENTE

La función que simula una fuente explosiva en nuestro modelo de velocidad, es definida en un nodo de la malla  $(x_s, z_s)$  y asignada a los esfuerzos  $\sigma_{xx}$  y  $\sigma_{zz}$  utilizando la siguiente función de gauss.

$$f_s(t) = \left[ 1 - 2 \left( \frac{w_0(t - t_0)}{2} \right)^2 \right] \exp \left[ - \left( \frac{w_0(t - t_0)}{2} \right)^2 \right] \quad (26)$$

Donde  $w_0$  es la frecuencia angular,  $t_0$  es el tiempo en el cual es activada la fuente y esta dado en términos de la frecuencia de la ondícula  $f$  usando la expresión  $t_0 = 3/(2f)$ .



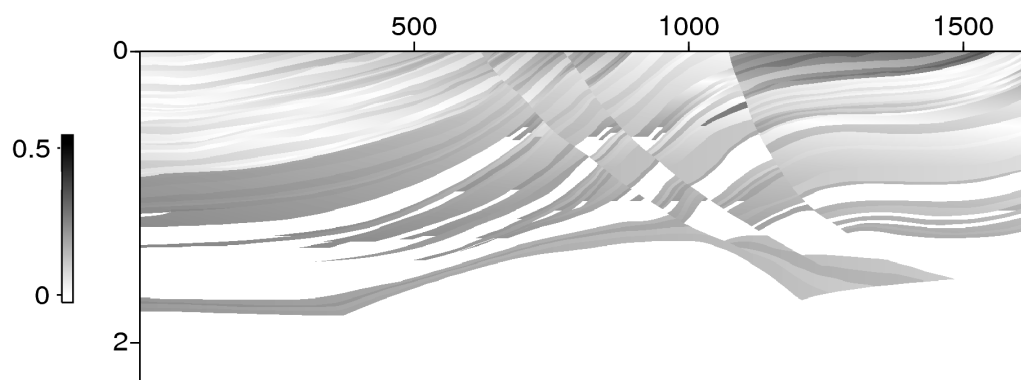


Figura 3: Valores de la anelasticidad  $\eta$

### 6. EL CAMPO DE ONDA EN UN MEDIO CON ANISOTROPÍA POLAR VERTICAL

La propagación de las ondas sísmicas en el modelo de Marmousi2, utilizando diferencias finitas se pueden observar para la componente vertical (ver figura 5) y horizontal (ver figura 4) de las velocidades en 800 pasos de tiempo (0,8 s), la explosión se ubicó en  $(x_s, z_s) = (500m, 50m)$ , el tamaño de la celda  $\delta h = 4m$ , la frecuencia utilizada es de  $60Hz$ .

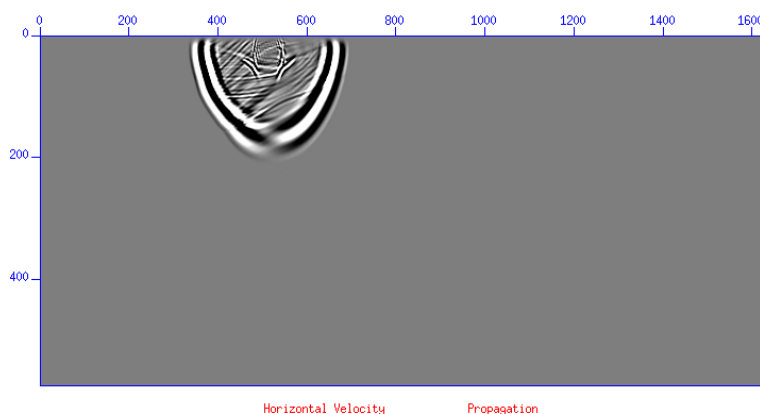


Figura 4: Componente Horizontal de la Velocidad  $v_x$  (anisotropía polar vertical)

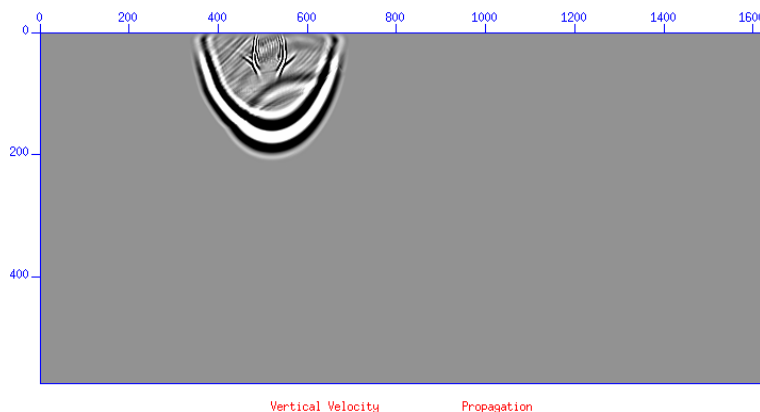


Figura 5: Componente Vertical de la Velocidad  $v_z$  (anisotropía polar vertical)

## 7. EL CAMPO DE ONDA EN UN MEDIO ISÓTROPICO

Para el caso isótropo tenemos las siguientes capturas para las componentes de las velocidades vertical (ver figura 6) y la componente horizontal (ver figura 7)

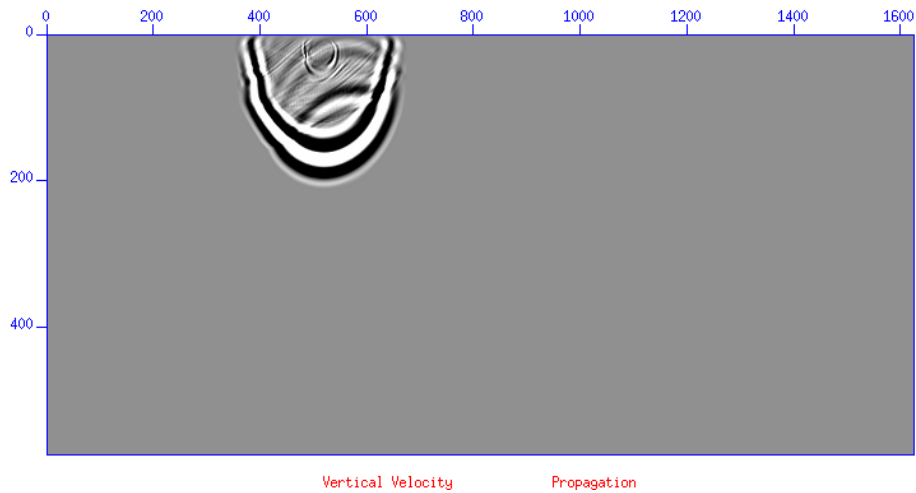


Figura 6: Componente Vertical de la Velocidad  $v_z$  (Isótropo)

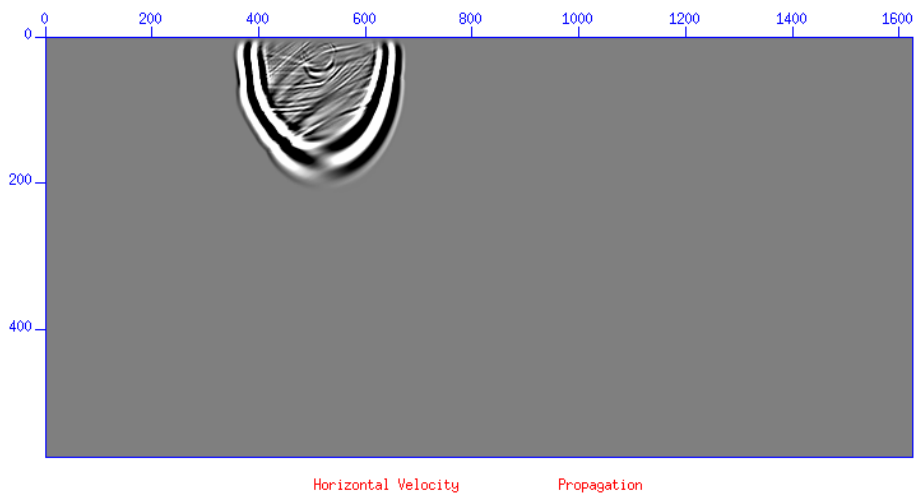


Figura 7: Componente Horizontal de la Velocidad  $v_x$  (Isótropo)

## 8. TRAZAS SÍSMICAS

Las trazas sísmicas para las componentes de las velocidades utilizaron 60 geófonos ubicados a la izquierda y derecha de la fuente ( $x_s, z_s$ ) con las mismas condiciones para el caso anisótropo y el caso isótropo (ver figura 8)

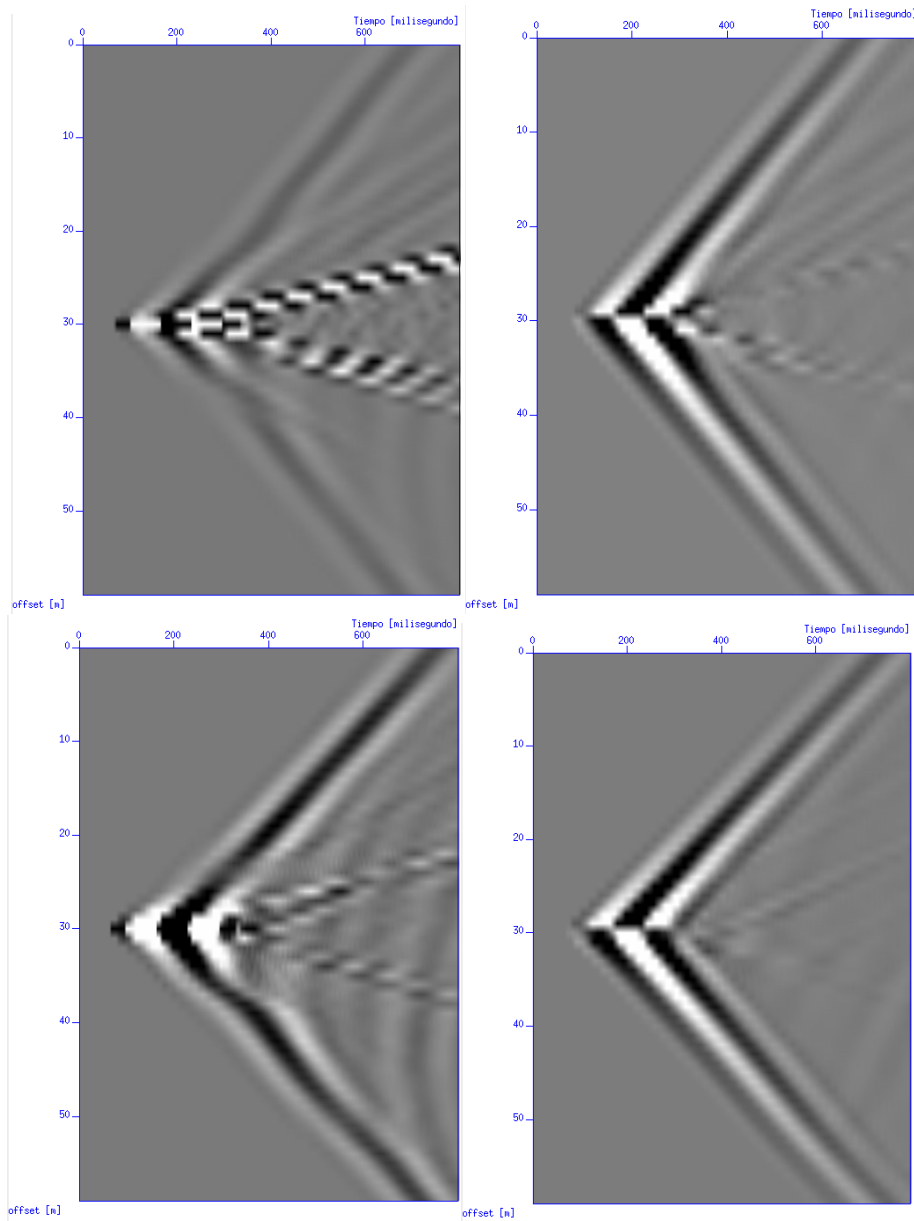


Figura 8: Trazas sísmicas para el medio con anisotropía polar vertical la componente horizontal (lado arriba izquierdo), la componente vertical (lado arriba derecho), y para el medio isótropo, la componente horizontal (lado abajo izquierdo) y la componente vertical (lado abajo derecho)

## 9. CONCLUSIONES

- Se realizó un modelado para el campo de onda en el modelo Marmousi2 usando la ecuación elástica para un medio isótropo y anisótropo polar vertical en dos dimensiones.
- Usamos un esquema en diferencias finitas dominio temporal que aproximó numéricamente la ecuación de onda, con criterios de estabilidad y dispersión.
- Se obtuvieron registros de trazas sísmicas usando 60 geófonos para los dos medios.

## 10. AGRADECIMIENTOS

Agradecemos al Grupo de Geofísica del Instituto Colombiano de Petróleo y al grupo Petrosísmica de la Universidad Industrial de Santander por su respaldo y apoyo para este congreso. También agradecemos al departamento de matemáticas de la Universidad Nacional de San Luis, al Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMEC-INTEC) de la Universidad Nacional del Litoral y el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, por su aceptación para participar en el XVII Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones.

## 11. REFERENCIAS

- Alkhalifah, T., An anisotropic Marmousi model, SEP Report 95, Pag 265-283, 1997.
- Alkhalifah, T. A., Seismic data processing in vertically inhomogeneous TI media, Geophysics, Vol 62, Pag 662-675, 1995.
- Alkhalifah, T. A., y Tsvankin, I., Velocity analysis for transversely isotropic media, Geophysics, Vol 60, Pag 1550-1566, 1995.
- Levander, A., Fourth Order finite difference P-SV seismograms, Geophysics, Vol 53, Pag 1425-1436, 1988.
- Martin, G. S., R. Wiley, and K. J. Marfurt, 2006, Marmousi2: An elastic upgrade for Marmousi: The Leading Edge, Vol.25, Pag. 156-166, 2006.
- Thomsen, L, Weak elastic anisotropy, Geophysics, Vol 51, Pag 1954-1966, 1986.