

PANDEO Y POST-PANDEO DE VIGAS DE PARED DELGADA DE MATERIALES COMPUESTOS CONSIDERANDO IMPERFECCION

Sebastián P. Machado, Víctor H. Cortínez, Cesar M. Saravia.

*Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada, Grupo Análisis de Sistemas Mecánicos,
Facultad Regional Bahía Blanca, Universidad Tecnológica Nacional, 11 de abril 461,
Bahía Blanca, Buenos Aires, Argentina. smachado@frbb.utn.edu.ar
CONICET*

Palabras clave: vigas de pared delgada, materiales compuestos, no linealidad geométrica, imperfección geométrica, post-pandeo.

Resumen. En este trabajo se analiza la influencia de imperfección geométrica sobre la estabilidad de una viga de pared delgada construida con materiales compuestos laminados. El análisis se basa en un modelo viga geoméricamente no lineal que contempla como aspecto distintivo la flexibilidad de corte en forma completa, el cual ha sido previamente presentado por los autores (Mecánica Computacional XXV, 2004). La incorporación de la imperfección geométrica se realiza por medio de un desplazamiento inicial, en el plano vertical. La respuesta de pandeo, pre-pandeo y post-pandeo de la viga es estudiada para diferentes valores de la amplitud de imperfección. La sensibilidad de dicho efecto es analizada para diferentes configuraciones de laminados simétricos y balanceados. Los resultados numéricos muestran el efecto de la imperfección sobre las cargas de pandeo y la respuesta poscrítica.

1 INTRODUCCIÓN

El análisis de estabilidad de estructuras es tradicionalmente limitado a la determinación de la carga de pandeo de un miembro estructural, estableciendo a esta última como su carga límite. En particular, el problema de inestabilidad es de interés corriente (Vlasov, 1961) y existen varios estudios concentrados en la determinación de cargas críticas de pandeo para diferentes configuraciones de uso habitual. Si bien estas magnitudes son de necesidad fundamental desde el punto de vista del diseño, no brindan información sobre el comportamiento de la estructura en el régimen de post-pandeo. Además, las vigas de pared delgada trabajan a menudo en el rango no-lineal. Por ejemplo, estas estructuras son muy utilizadas en la industria aeroespacial, donde son generalmente diseñadas para trabajar bajo condiciones de post-pandeo, Lin y Hsiao (2001). En estas condiciones, dichas estructuras flexibles experimentan grandes desplazamientos y rotaciones sin exceder su límite elástico. El estudio del comportamiento post-crítico permite analizar la estabilidad de la estructura a medida que aumenta la carga más allá de la carga crítica. Por otro lado, los márgenes de capacidad de carga luego del pandeo pueden ser importantes, reconsiderando el valor de la carga límite, y de esta manera, alcanzando un uso óptimo de la estructura. Además, este tipo de estudio (o comportamiento) es más interesante cuando se utilizan materiales compuestos, debido a que tanto las fibras como las resinas de los laminados pueden soportar grandes elongaciones hasta alcanzar la rotura. Las vigas de pared delgada construidas con materiales compuestos laminados son muy utilizadas en el diseño de todo tipo de estructuras como alas de avión, hélices de helicópteros, alabes de turbinas, etc., debido a sus excelentes propiedades mecánicas, tal como la buena relación entre rigidez versus peso y favorables propiedades a la fatiga. Las interesantes posibilidades proporcionadas por los materiales compuestos reforzados con fibras pueden ser utilizadas para mejorar el comportamiento de dichas estructuras que operan en condiciones ambientales complejas. La nueva generación de estas construcciones debe ser diseñada para trabajar de forma segura y experimentar una mejor respuesta que los sistemas convencionales. Esta tendencia ha influenciado los códigos de construcción actuales que rigen las estructuras construidas con materiales convencionales

Por lo tanto, como se describió anteriormente, el concepto de la carga crítica elástica que causa el pandeo torsional y/o flexional de una viga perfecta se usa ampliamente como base en el diseño de vigas de pared delgada (Roberts, 1981; Chan y Kitipornchai, 1987; Rohagh y Bradford, 1996; Qiao y Zou, 2003; Machado y Cortínez, 2005a). Sin embargo, a menudo es importante conocer cómo el comportamiento de la estructura cambia si se varían las especificaciones de diseño o si se introduce un tipo de carga diferente. En particular, se pretende conocer la influencia de pequeñas desviaciones que ocurren en la configuración del diseño en presencia de imperfecciones. La determinación de la sensibilidad a imperfección es un problema importante debido a que las imperfecciones en las estructuras son inevitables y pueden producir una disminución significativa de su límite estable (Godoy, 1996). Por lo tanto, existen varias metodologías para estudiar tales variaciones en el comportamiento estructural. El efecto de imperfecciones (ya sea geométricas o de carga) sobre el comportamiento de post-pandeo ha sido documentado como parte de la teoría de estabilidad elástica por diferentes investigadores (Thompson y Hunt, 1973; Flores y Godoy, 1992; Godoy y Mook, 1996).

Recientemente, Szymczak (2003) y Chróscielewski et al. (2006) investigaron la dinámica y pandeo torsional, respectivamente; ellos consideraron una viga-I de pared delgada bi-simétrica simplemente apoyada sometida a una carga axial. En el primer caso, Szymczak (2003) realizó un análisis de sensibilidad de las primeras tres frecuencias en función de una variación relativa del ancho del ala de la viga. Mientras que Chróscielewski et al. (2006)

analizaron el efecto de imperfección debido a un desplazamiento inicial sobre el comportamiento de pandeo y pre-pandeo de una viga de acero.

En este trabajo se planea incorporar a un modelo previamente desarrollado por los autores (Machado y Cortínez, 2004 y 2005b) una imperfección geométrica debido a un desplazamiento inicial. Por lo tanto, dentro del marco de la teoría de viga compuesta de pared delgada se considera la influencia de un desplazamiento inicial sobre el comportamiento de estabilidad elástico. Como aspecto distintivo dicho modelo contempla, entre otros efectos, la flexibilidad de corte en forma completa, la cual ha demostrado tener una influencia crucial en el comportamiento crítico y post-crítico de las vigas de pared delgada (Machado y Cortínez, 2005a y b). A los efectos de resolver numéricamente las ecuaciones resultantes se utiliza un enfoque tipo Ritz-Galerkin que conduce a un sistema algebraico no lineal. Se utiliza un algoritmo iterativo incremental basado en el método de Newton-Raphson para trazar las curvas de post-pandeo, donde se utiliza a la carga como parámetro de control. La influencia de imperfección geométrica es analizada para una viga simplemente apoyada sometida a una carga axial, considerando diferentes secuencias de un laminado simétrico y balanceado.

2 TEORÍA

2.1 Cinemática

Se considera una viga recta de paredes delgadas construida con material compuesto (Figura 1). Los puntos del elemento estructural son referidos a un sistema cartesiano ortogonal (x, \bar{y}, \bar{z}) donde el eje x es paralelo al eje longitudinal de la viga, mientras que \bar{y} y \bar{z} son los ejes principales de la sección. Por otra parte y y z son paralelos a los principales pero teniendo su origen en el centro de corte. Las coordenadas correspondientes a puntos ubicados sobre la línea media de la sección se denotan mediante letras mayúscula Y y Z (o \bar{Y} y \bar{Z}). También se utilizan las coordenadas curvilíneas s (coordenada circunferencial) y n (coordenada normal) sobre la superficie media de la sección.

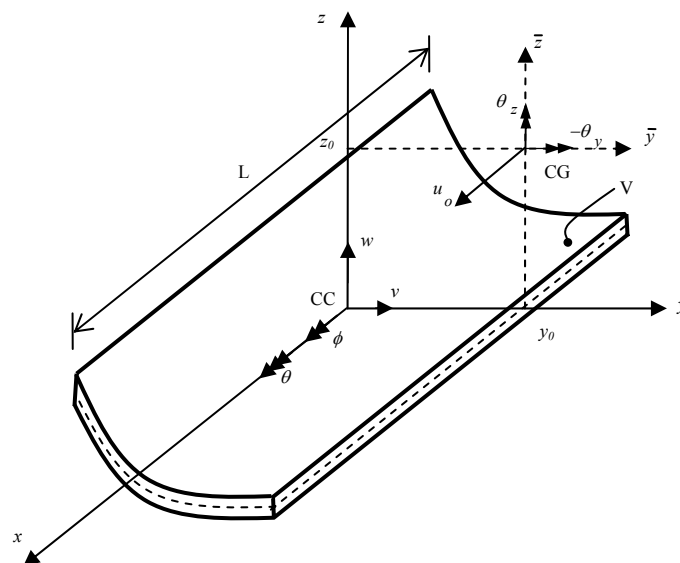


Figura 1. Sistema de coordenadas y notación para las medidas de desplazamientos.

El modelo estructural utilizado en este trabajo está basado en las siguientes hipótesis:

- a) El contorno de la sección transversal es rígida en su propio plano
- b) La distribución de alabeo se representa mediante la función de Saint-Venant de vigas isotrópicas.
- c) Las rotaciones flexionales son moderadas, el giro de la sección transversal pueden ser arbitrariamente grande y las deformaciones son pequeñas.
- d) Los esfuerzos y momentos resultantes sobre el espesor de la pared, correspondientes a la tensión circunferencial σ_{ss} se suponen despreciables. Asimismo se desprecia la fuerza resultante sobre el espesor relacionada con γ_{ns} .
- e) La curvatura de superficie media de la sección transversal es despreciable.
- f) Se idealiza la sección de la viga, formada por una secuencia de placas de espesor constante.
- g) Se considera una imperfección inicial geométrica sobre la base de pequeñas deformaciones.

De acuerdo a las hipótesis enunciadas el campo de desplazamiento adoptado (Machado y Cortínez, 2004), para la condición no deformada de la viga, se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 u_x &= u_0 - \bar{y}(\theta_z \cos \phi + \theta_y \sin \phi) - \bar{z}(\theta_y \cos \phi - \theta_z \sin \phi) + \omega \left[\theta - \frac{1}{2}(\theta_y' \theta_z - \theta_y \theta_z') \right] + (\theta_z z_0 - \theta_y y_0) \sin \phi \\
 u_y &= v - z \sin \phi - y(1 - \cos \phi) - \frac{1}{2}(\theta_z^2 \bar{y} + \theta_z \theta_y \bar{z}) \\
 u_z &= w + y \sin \phi - z(1 - \cos \phi) - \frac{1}{2}(\theta_y^2 \bar{z} + \theta_z \theta_y \bar{y})
 \end{aligned} \tag{1}$$

Así pues, el comportamiento cinemático de una viga puede representarse adecuadamente por medio de siete variables o desplazamientos generalizados. Estos desplazamientos generalizados corresponden a tres corrimientos $\{u_0, v, w\}$ y tres rotaciones como magnitudes vectoriales $\{\theta_z, \theta_y, \phi\}$ y a una magnitud θ que pondera el alabeo no uniforme a lo largo del eje de la viga (Figura 1). Estos desplazamientos generalizados determinan los cuatro movimientos básicos desacoplados de una viga recta: *extensional* (u_0), *flexional lateral* (v, θ_z), *flexional transversal* (w, θ_y) y *torsional* (ϕ, θ). Los casos en que se pueda verificar desacoplamiento de los cuatro movimientos en una viga, son por ejemplo en secciones con doble simetría y con materiales especialmente ortótropos. Por otra parte, ω representa la función de alabeo de la sección transversal y el superíndice “prima” indica derivación con respecto a x . Los desplazamientos con respecto al sistema curvilíneo (x, s, n) pueden ser expresados de la siguiente manera:

$$\bar{U} = u_x(x, s, n) \tag{2}$$

$$\bar{V} = u_y(x, s, n) \frac{dY}{ds} + u_z(x, s, n) \frac{dZ}{ds} \tag{3}$$

$$\bar{W} = -u_y(x, s, n) \frac{dZ}{ds} + u_z(x, s, n) \frac{dY}{ds} \tag{4}$$

2.2 Campo de Deformación

Las tres componentes ε_{xx} , ε_{xs} , ε_{xn} no nulas del tensor de deformación de Green Lagrange se determinan a partir de las siguientes expresiones:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{I}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (5)$$

$$\varepsilon_{xs} = \frac{I}{2} \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial s} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \frac{\partial \bar{U}}{\partial s} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \frac{\partial \bar{V}}{\partial s} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \frac{\partial \bar{W}}{\partial s} \right] \quad (6)$$

$$\varepsilon_{xn} = \frac{I}{2} \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial n} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \frac{\partial \bar{V}}{\partial n} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \frac{\partial \bar{W}}{\partial n} \right] \quad (7)$$

Sustituyendo las expresiones (1) en (2-4) y luego en (5-7), y después de simplificar algunos términos de orden superior, se llega a las siguientes expresiones para el tensor de deformación

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{xx}^{(0)} + n\kappa_{xx}^{(0)} \\ \gamma_{xs} &= 2\varepsilon_{xs} = \gamma_{xs}^{(0)} + n\kappa_{xs}^{(0)} \\ \gamma_{xn} &= 2\varepsilon_{xn} = \gamma_{xn}^{(0)} \end{aligned} \quad (8)$$

donde

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{(0)} &= u'_o + \frac{I}{2} (u_o'^2 + v'^2 + w'^2) + \omega_p \left[\theta' - \frac{I}{2} (\theta_z \theta_y'' - \theta_y \theta_z'') \right] + \bar{Z} \left[(-\theta'_y - u'_o \theta'_y) \cos \phi + (\theta'_z + u'_o \theta'_z) \sin \phi \right] \\ &+ \bar{Y} \left[(-\theta'_z - u'_o \theta'_z) \cos \phi - (\theta'_y + u'_o \theta'_y) \sin \phi \right] + \frac{I}{2} \phi'^2 (Y^2 + Z^2) + (z_o \theta'_z - y_o \theta'_y) \sin \phi \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{xx}^{(0)} &= -\frac{dZ}{ds} \left[-(\theta'_z + u'_o \theta'_z) \cos \phi - (\theta'_y + u'_o \theta'_y) \sin \phi \right] + \frac{dY}{ds} \left[(-\theta'_y - u'_o \theta'_y) \cos \phi + (\theta'_z + u'_o \theta'_z) \sin \phi \right] \\ &- I \left[\theta' - \frac{I}{2} (\theta_z \theta_y'' - \theta_y \theta_z'') \right] - r \phi'^2 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xs}^{(0)} &= \frac{dY}{ds} \left[(v' - \theta_z - u'_o \theta_z) \cos \phi - z_o \frac{I}{2} (\theta_z \theta_y' - \theta_y \theta_z') + (w' - \theta_y - u'_o \theta_y) \sin \phi \right] + (r - \psi) (\phi' - \theta) \\ &+ \frac{dZ}{ds} \left[(w' - \theta_y - u'_o \theta_y) \cos \phi + y_o \frac{I}{2} (\theta_z \theta_y' - \theta_y \theta_z') - (v' - \theta_z - u'_o \theta_z) \sin \phi \right] + \psi \left[\phi' - \frac{I}{2} (\theta_z \theta_y' - \theta_y \theta_z') \right] \end{aligned} \quad (11)$$

$$\kappa_{xs}^{(0)} = -2 \left[\phi' - \frac{I}{2} (\theta_z \theta_y' - \theta_y \theta_z') \right] \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xn}^{(0)} &= \frac{dY}{ds} \left[(w' - \theta_y - u'_o \theta_y) \cos \phi + y_o \frac{I}{2} (\theta_z \theta_y' - \theta_y \theta_z') - (v' - \theta_z - u'_o \theta_z) \sin \phi \right] \\ &- \frac{dZ}{ds} \left[(v' - \theta_z - u'_o \theta_z) \cos \phi - z_o \frac{I}{2} (\theta_z \theta_y' - \theta_y \theta_z') + (w' - \theta_y - u'_o \theta_y) \sin \phi \right] + I (\phi' - \theta) \end{aligned} \quad (13)$$

2.3 Imperfección geométrica

En este caso se considera la imperfección geométrica debida a una función $w_0(x)$, correspondiente a un desplazamiento en el plano vertical. La deformación inicial que resulta del desplazamiento vertical inicial es de la siguiente manera:

$$\bar{\varepsilon}_{xx} = \frac{I}{2} w_0'^2 - \theta'_{y0} \bar{Z} \quad (14)$$

$$\bar{\kappa}_{xx} = -\theta'_{y0} \frac{dY}{ds} \quad (15)$$

$$\bar{\gamma}_{xs} = (w'_0 - \theta_{y0}) \frac{dZ}{ds} \quad (16)$$

$$\bar{\gamma}_{xn} = (w'_0 - \theta_{y0}) \frac{dY}{ds} \quad (17)$$

Finalmente, en el análisis de estabilidad de una viga con imperfecciones se considera la deformación neta debido a la carga, expresada de la siguiente forma:

$$\varepsilon_{xx}^{(l)} = \varepsilon_{xx}^{(0)} - \bar{\varepsilon}_{xx}, \quad \kappa_{xx}^{(l)} = \kappa_{xx}^{(0)} - \bar{\kappa}_{xx}, \quad \gamma_{xs}^{(l)} = \gamma_{xs}^{(0)} - \bar{\gamma}_{xs}, \quad \kappa_{xs}^{(l)} = \kappa_{xs}^{(0)}, \quad \gamma_{xn}^{(l)} = \gamma_{xn}^{(0)} - \bar{\gamma}_{xn} \quad (18)$$

2.4 Formulación Variacional

Teniendo en cuenta las hipótesis adoptadas, el principio de trabajos virtuales para una lámina compuesta puede expresarse en la forma (Washizu, 1968):

$$\begin{aligned} & \iint (N_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^{(l)} + M_{xx} \delta \kappa_{xx}^{(l)} + N_{xs} \delta \gamma_{xs}^{(l)} + M_{xs} \delta \kappa_{xs}^{(l)} + N_{xn} \delta \gamma_{xn}^{(l)}) ds dx \\ & - \iiint \rho (\ddot{u}_x \delta u_x + \ddot{u}_y \delta u_y + \ddot{u}_z \delta u_z) ds dn dx \\ & - \iint (\bar{q}_x \delta \bar{u}_x + \bar{q}_y \delta \bar{u}_y + \bar{q}_z \delta \bar{u}_z) ds dx - \iint (\bar{p}_x \delta u_x + \bar{p}_y \delta u_y + \bar{p}_z \delta u_z) \Big|_{x=0} ds dn \\ & - \iint (\bar{p}_x \delta u_x + \bar{p}_y \delta u_y + \bar{p}_z \delta u_z) \Big|_{x=L} ds dn - \iiint (\bar{f}_x \delta u_x + \bar{f}_y \delta u_y + \bar{f}_z \delta u_z) ds dn dx = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

donde N_{xx} , N_{xs} , M_{xx} , M_{xs} y N_{xn} son las resultantes de tensión definidas mediante las expresiones

$$\begin{aligned} N_{xx} &= \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{xx} dn, & M_{xx} &= \int_{-e/2}^{e/2} (\sigma_{xx} n) dn, & N_{xs} &= \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{xs} dn, \\ M_{xs} &= \int_{-e/2}^{e/2} (\sigma_{xs} n) dn, & N_{xn} &= \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{xn} dn \end{aligned} \quad (20)$$

La viga está sometida a la acción de fuerzas superficiales por unidad de área \bar{q}_x , \bar{q}_y y \bar{q}_z actuando según las direcciones x , y y z respectivamente. De la misma forma \bar{p}_x , \bar{p}_y y \bar{p}_z son fuerzas por unidad de superficie actuando en los extremos de la viga, $x = 0$ y $x = L$, donde L es la longitud de la viga. Por otra parte \bar{f}_x , \bar{f}_y y \bar{f}_z son fuerzas por unidad de volumen, mientras que \bar{u}_x , \bar{u}_y y \bar{u}_z son desplazamientos correspondientes a puntos sobre la línea media de la sección.

2.5 Ecuaciones Constitutivas

Las ecuaciones constitutivas para las resultantes de tensión correspondientes a laminados simétricos balanceados pueden expresarse en la forma:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{xs} \\ N_{xn} \\ M_{xx} \\ M_{xs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{A}_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A}_{55}^{(H)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{D}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{D}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(l)} \\ \gamma_{xs}^{(l)} \\ \gamma_{xn}^{(l)} \\ \kappa_{xx}^{(l)} \\ \kappa_{xs}^{(l)} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

Los coeficientes de rigidez tipo placa A_{ij} , D_{ij} y $A_{ij}^{(H)}$ se definen de acuerdo a la teoría de

laminación presentada por Barbero, 1999. El coeficiente \bar{D}_{16} ha sido despreciado debido a su valor relativamente bajo para la arquitectura de laminación considerada.

2.6 Esfuerzos tipo viga

Sustituyendo las expresiones de las deformaciones generalizadas (18) junto con las relaciones cinemáticas (1) en (19) e integrando con respecto a s , se obtiene la expresión unidimensional del sistema variacional gobernante (Machado y Cortínez, 2005b). En dichas expresiones se definen los esfuerzos tipo viga de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 N &= \int N_{xx} ds, \quad M_Y = \int \left(N_{xx} \bar{Z} + M_{xx} \frac{dY}{ds} \right) ds, \quad M_Z = \int \left(N_{xx} \bar{Y} - M_{xx} \frac{dZ}{ds} \right) ds \\
 B &= \int \left(N_{xx} \omega_p - M_{xx} l \right) ds, \quad Q_Z = \int \left(N_{xs} \frac{dZ}{ds} + N_{xn} \frac{dY}{ds} \right) ds, \quad Q_Y = \int \left(N_{xs} \frac{dY}{ds} - N_{xn} \frac{dZ}{ds} \right) ds \quad (22) \\
 T_w &= \int \left(N_{xs} (r - \psi) + N_{xn} l \right) ds, \quad T_{sv} = \int \left(N_{xs} \psi - 2M_{xs} \right) ds,
 \end{aligned}$$

donde N , Q_y , Q_z , M_y , M_z , B , T_w y T_{sv} corresponden a la fuerza axial, fuerzas de corte, momentos flectores, bimomento, momento flexotorsional y momento torsional de Saint Venant respectivamente.

Adicionalmente se definen cuatro resultantes de tensión de orden superior dadas por las expresiones:

$$\begin{aligned}
 B_l &= \int \left[N_{xx} (Y^2 + Z^2) - 2M_{xx} r \right] ds, \\
 P_{yy} &= \int \left[N_{xx} \bar{Z}^2 + 2M_{xx} \bar{Z} \frac{dY}{ds} \right] ds, \\
 P_{zz} &= \int \left[N_{xx} \bar{Y}^2 - 2M_{xx} \bar{Y} \frac{dZ}{ds} \right] ds, \quad (23) \\
 P_{yz} &= \int \left[N_{xx} \bar{Y} \bar{Z} + M_{xx} \left(\bar{Y} \frac{dY}{ds} - \bar{Z} \frac{dZ}{ds} \right) \right] ds
 \end{aligned}$$

Las deformaciones generalizadas correspondientes a los esfuerzos definidos anteriormente, considerando imperfección geométrica, pueden identificarse de la siguiente manera:

$$\text{Correspondiente a } N: \quad ED_1 = u'_o + \frac{1}{2} (u_o'^2 + v'^2 + w'^2 - w_o'^2) + (z_o \theta'_z - y_o \theta'_y) \text{sen} \phi$$

$$\text{Correspondiente a } M_z: \quad ED_2 = (-\theta'_z - u'_o \theta'_z) \cos \phi - (\theta'_y + u'_o \theta'_y) \text{sen} \phi$$

$$\text{Correspondiente a } M_y: \quad ED_3 = (-\theta'_y - u'_o \theta'_y) \cos \phi + \theta'_{y0} + (\theta'_z + u'_o \theta'_z) \text{sen} \phi$$

$$\text{Correspondiente a } B: \quad ED_4 = \theta' - \frac{1}{2} (\theta_z \theta_y'' - \theta_y \theta_z'')$$

$$\text{Correspondiente a } Q_z: \quad ED_5 = (w' - \theta_y - u'_o \theta_y) \cos \phi - w'_o + \theta_{y0} + y_o \frac{1}{2} (\theta_z \theta_y' - \theta_y \theta_z') - (v' - \theta_z - u'_o \theta_z) \text{sen} \phi$$

$$\begin{aligned}
\text{Correspondiente a } Q_y : \quad ED_6 &= (v' - \theta_z - u'_0 \theta'_z) \cos \phi - z_0 \frac{1}{2} (\theta'_z \theta'_y - \theta'_y \theta'_z) + (w' - \theta_y - u'_0 \theta'_y) \text{sen} \phi \\
\text{Correspondiente a } T_w : \quad ED_7 &= \phi' - \theta \\
\text{Correspondiente a } T_{sv} : \quad ED_8 &= \phi' - \frac{1}{2} (\theta'_z \theta'_y - \theta'_y \theta'_z) \\
\text{Correspondiente a } B_1 : \quad ED_9 &= \frac{\phi'^2}{2} \\
\text{Correspondiente a } P_{yy} : \quad ED_{10} &= \frac{\theta_y'^2}{2} \\
\text{Correspondiente a } P_{zz} : \quad ED_{11} &= \frac{\theta_z'^2}{2} \\
\text{Correspondiente a } P_{yz} : \quad ED_{12} &= \theta'_y \theta'_z
\end{aligned} \tag{24}$$

donde las deformaciones generalizadas corresponden a la deformación normal axial (ED_1), deformaciones normales flexionales (ED_2 y ED_3), deformación normal por alabeo (ED_4), deformación transversal por corte flexional (ED_5 y ED_6), deformación transversal por corte debida al alabeo (ED_7), deformación transversal por torsión pura o de Saint Venant (ED_8) y deformaciones de momentos de segundo orden de la tensión axial σ_{xx} (ED_9 , ED_{10} , ED_{11} y ED_{12}).

3 ANALISIS DE POST-PANDEO DE UNA VIGA I SIMPLEMENTE APOYADA

Con el propósito de analizar el problema de post-pandeo de una viga I bi-simétrica de pared delgada, se considera que la misma se encuentra simplemente apoyada y sometida a una carga axial aplicada en el centroide de la sección (ver figura 2).

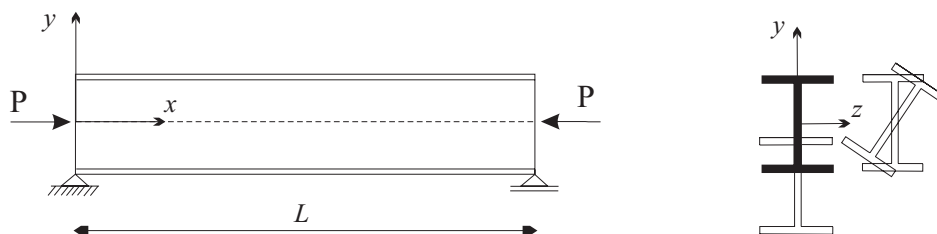


Figura 2: Viga simplemente apoyada sometida a una carga axial y los modos de pandeo.

Las ecuaciones de movimiento son discretizadas para analizar el comportamiento de pandeo, pre-pandeo y post-pandeo de la viga. Los desplazamientos son aproximados por medio de las siguientes funciones, las cuales son compatibles con las condiciones de borde.

$$\begin{aligned}
u_0 &= U \frac{x}{L} \\
v &= V \text{sen} \left(\frac{\pi}{L} x \right) \quad , \quad \theta_z = \varphi_z \cos \left(\frac{\pi}{L} x \right) \\
w &= W \text{sen} \left(\frac{\pi}{L} x \right) \quad , \quad \theta_y = \varphi_y \cos \left(\frac{\pi}{L} x \right) \\
\phi &= \chi \text{sen} \left(\frac{\pi}{L} x \right) \quad , \quad \theta = \varphi \cos \left(\frac{\pi}{L} x \right)
\end{aligned} \tag{25}$$

donde V , φ_z , W , φ_y , χ , φ representan las amplitudes asociadas a los desplazamientos. Además, el desplazamiento inicial debido a la imperfección geométrica es expresado con las siguientes funciones, para una viga simplemente apoyada:

$$w_0 = W_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right), \quad \theta_{y0} = \varphi_{y0} \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \quad (26)$$

Para determinar la estabilidad de la viga se reemplazan las expresiones (25) y (26) en el sistema variacional gobernante y luego se utiliza el método de Ritz para resolver el complejo sistema, cuyas incógnitas corresponden a coordenadas generalizadas del estado incremental. Este procedimiento conduce a un sistema algebraico no-lineal de N ecuaciones f_{qi} , siendo N el número de grados de libertad generalizados q_j utilizados en la discretización. A partir de estas últimas se calcula la matriz tangente de rigidez Kt , Bazant *et al.* (2003):

$$Kt_{ij} = \frac{\partial f_{qi}}{\partial q_j} \quad i = j = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (27)$$

El sistema de ecuaciones resultante se resuelve por medio de un algoritmo iterativo incremental basado en el método de Newton-Raphson, utilizando a la carga como parámetro de control. El incremento del parámetro de carga permanece constante durante el proceso de iteración y el número de ecuaciones de equilibrio es igual al número de amplitudes asociadas a las componentes de desplazamientos desconocidas. El camino correspondiente al estado de pre-pandeo es denominado camino fundamental y el correspondiente al estado post-crítico es denominado camino secundario.

Finalmente, se obtienen las cargas de pandeo mediante la singularidad de la matriz tangente de rigidez evaluada en el estado fundamental (Machado y Cortínez, 2004; Machado y Cortínez, 2005a).

$$\det(Kt) = 0 \quad (28)$$

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta sección se estudia la estabilidad de vigas bi-simétricas simplemente apoyadas y sometidas a una carga axial, ubicada en el centroide de la sección. Las propiedades geométricas de la viga son $h = 0.6$ m, $b = 0.6$ m, $e = 0.03$ m (ver Figura 3). El material es glass-epoxy cuyas propiedades son: $E_1 = 48.3$ GPa, $E_2 = 19.8$ GPa, $G_{12} = 8.96$ GPa, $G_{13} = 8.96$ GPa, $G_{23} = 6.19$ GPa, $\nu_{12} = 0.27$, $\nu_{13} = 0.27$, $\nu_{23} = 0.6$. Las secuencias de laminación consideradas son simétricas y balanceadas $\{0/0/0/0\}$, $\{0/90/90/0\}$, $\{45/-45/-45/45\}$.

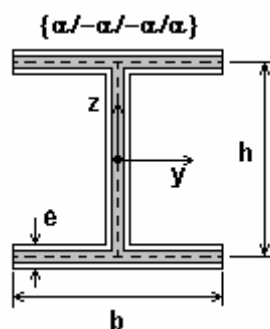


Figura 3. Sección transversal de una viga I compuesta.

4.1 Influencia de imperfecciones sobre el Pandeo

El ejemplo considerado es una viga I simplemente apoyada de 12 m de longitud. Para la sección analizada $y_0 = z_0 = 0$, por lo tanto las ecuaciones de equilibrio están desacopladas. De esta manera, existen tres modos globales de pandeo, dos correspondientes a los modos flexionales (en la dirección de y y z), y otro correspondiente al modo torsional. Las cargas críticas de pandeo para una viga perfecta pueden calcularse fácilmente por medio de las siguientes expresiones (Machado, 2008):

$$P_z = \frac{\widehat{EI}_z \widehat{GS}_y \pi^2}{\widehat{GS}_y L^2 + \widehat{EI}_z \pi^2}, \quad (29)$$

$$P_y = \frac{\widehat{EI}_y \widehat{GS}_z \pi^2}{\widehat{GS}_z L^2 + \widehat{EI}_y \pi^2}, \quad (30)$$

$$P_\phi = \frac{L^2 \widehat{GS}_w \widehat{GJ} + \widehat{EC}_w \pi^2 (\widehat{GJ} + \widehat{GS}_w)}{I_0 (\widehat{GS}_w L^2 + \widehat{EC}_w \pi^2)}, \quad (31)$$

donde \widehat{EI}_y y \widehat{EI}_z representa la rigidez flexional, I_0 es el momento de inercia polar y \widehat{GS}_z , \widehat{GS}_y y \widehat{GS}_w son rigideces de corte. En estas expresiones P_y , P_z , and P_ϕ son las cargas de pandeo flexionales y torsional de una viga bi-simétrica compuesta simplemente apoyada.

Para esta sección, la menor carga de pandeo corresponde para el modo flexional correspondiente al desplazamiento v (en la dirección y). La segunda carga de pandeo corresponde al modo torsional y la tercera al modo flexional vertical. En este caso se analiza la influencia de imperfecciones sobre el modo torsional. En la Figura 4, se muestra la variación de la carga crítica P_ϕ para diferentes laminados y longitudes de viga. Se observa que la carga máxima de pandeo torsional corresponde al laminado $\{0/0/0/0\}$ y la mínima puede ser $\{0/90/90/0\}$ o $\{45/-45/-45/45\}$, dependiendo de la longitud utilizada. Por lo tanto, se observa un comportamiento de pandeo más rígido cuando las fibras están orientadas en la dirección longitudinal.

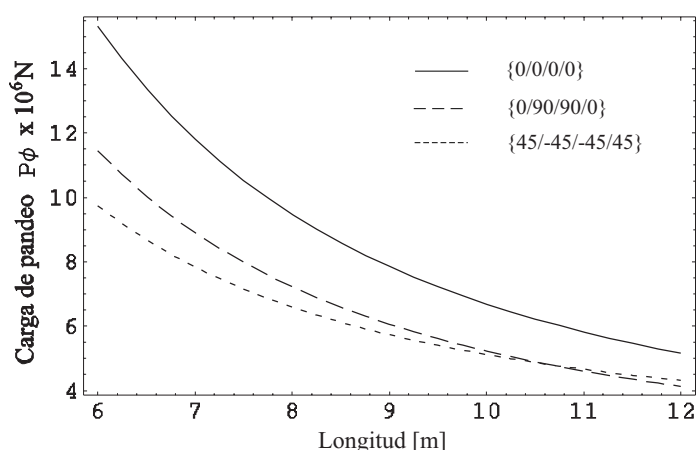


Figura 4. Carga de pandeo torsional para diferentes laminados y longitudes de viga.

La influencia de la imperfección vertical w_0 sobre la carga de pandeo es graficada en las Figuras 5 y 6, para una longitud de viga de 12 y 6 m, respectivamente. Como se observa en las figuras, la carga de pandeo disminuye a medida que aumenta la imperfección flexional

impuesta w_0 . La influencia de la imperfección depende del laminado y de la longitud de la viga. En este ejemplo, la secuencia de laminación $\{45/-45/-45/45\}$ muestra mayor sensibilidad a imperfecciones en comparación con el laminado $\{0/0/0/0\}$. De igual forma se observa que la influencia es mayor a medida que aumenta la longitud de la viga. Por ejemplo, para $L = 12$ m y una laminación $\{45/-45/-45/45\}$ la diferencia porcentual entre la carga de pandeo de una viga con una imperfección de $w_0 = 0.9$ y una viga perfecta es casi del 20%. Sin embargo, para una laminación $\{0/0/0/0\}$ dicha diferencia es prácticamente la mitad, de un 10%. Por lo tanto, la influencia de una imperfección inicial flexional (en la dirección vertical) disminuye a medida que aumenta la rigidez de la viga.

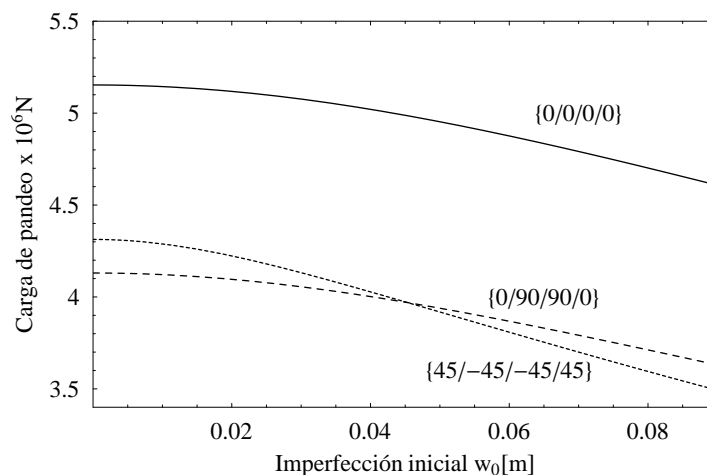


Figura 5. Influencia de la imperfección inicial sobre la carga crítica, $L = 12$ m.

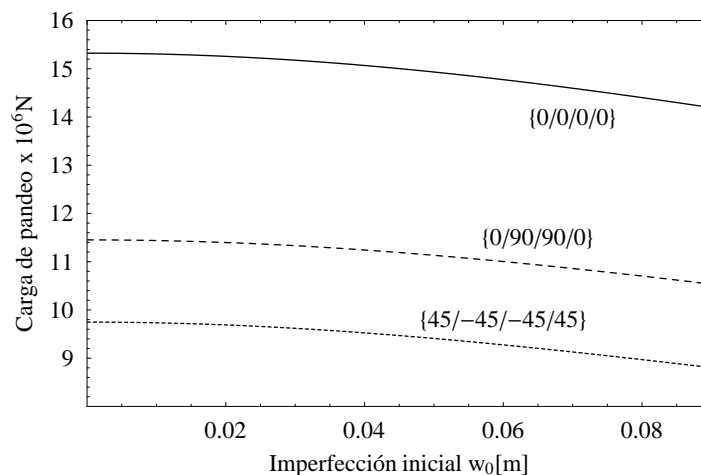


Figura 6. Influencia de la imperfección inicial sobre la carga crítica, $L = 6$ m.

4.2 Camino fundamental o de Pre-Pandeo

En esta sección se analiza la influencia de imperfecciones sobre la respuesta de prepandeo de una viga de 12 m de largo. En las Figuras 7, 8 y 9, se muestra el camino fundamental del desplazamiento vertical w , para diferentes valores de imperfección y considerando una secuencia de laminación $\{0/0/0/0\}$, $\{0/90/90/0\}$ y $\{45/-45/-45/45\}$, respectivamente. En las figuras se observa que la disminución de la carga crítica está asociada a un aumento del desplazamiento vertical hasta el punto de bifurcación. El laminado $\{45/-45/-45/45\}$ presenta

mayor sensibilidad a imperfecciones debido a que los desplazamientos de pre-pandeo son mayores en comparación con las otras secuencias de laminación utilizadas. Los puntos superiores de cada camino fundamental marcan el valor del desplazamiento crítico w_{cr} , previo a la inestabilidad. Estos puntos son conectados por medio de una línea continua para mostrar la tendencia del fenómeno. Por ejemplo, en el caso de una imperfección inicial de $w_0 = 0.09$ m el desplazamiento crítico alcanzado para una laminación de $\{0/0/0/0\}$ es de $w_{cr} = 0.147$ m, mientras que para un laminado $\{45/-45/-45/45\}$ el desplazamiento crítico es de $w_{cr} = 0.2$ m.

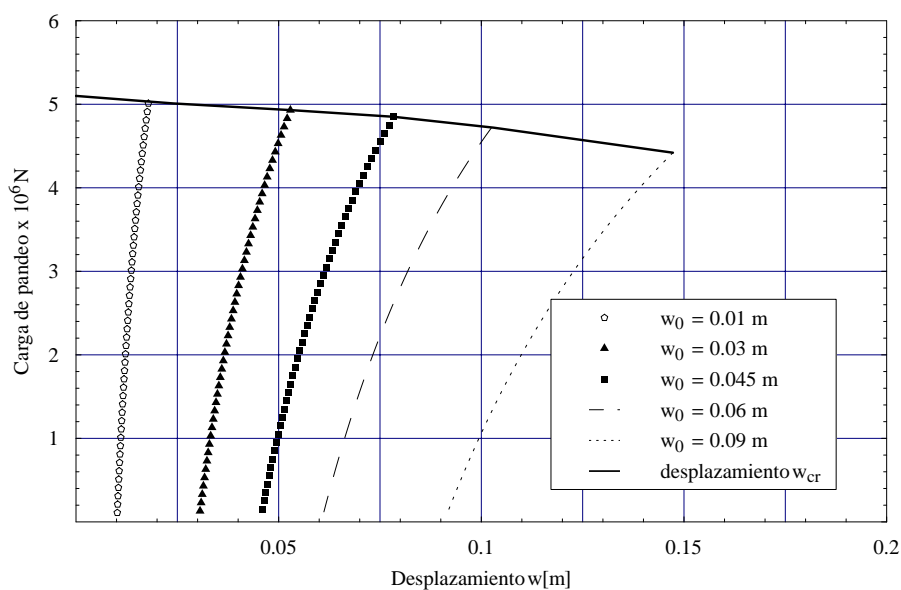


Figura 7. Camino fundamental del desplazamiento vertical, $\{0/0/0/0\}$.

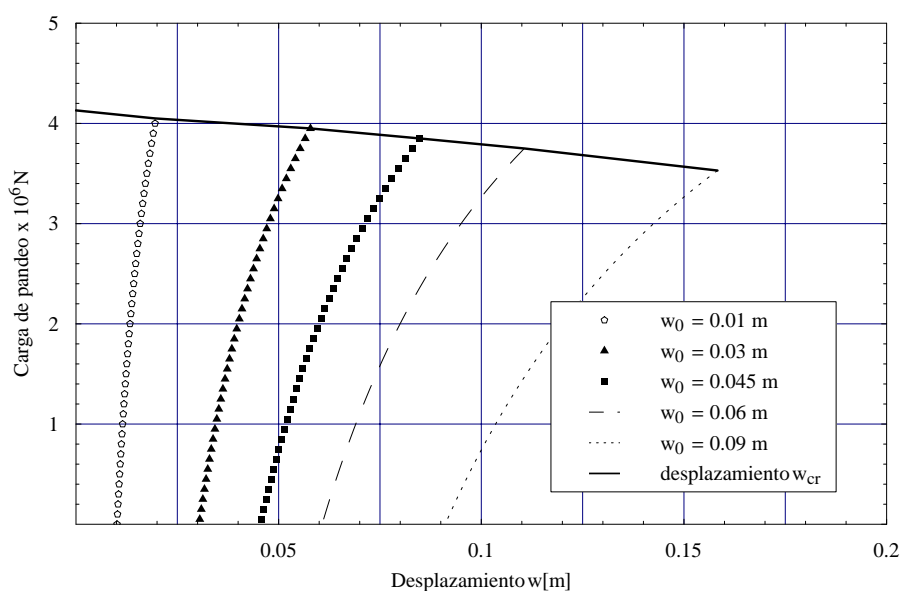


Figura 8. Camino fundamental del desplazamiento vertical, $\{0/90/90/0\}$.

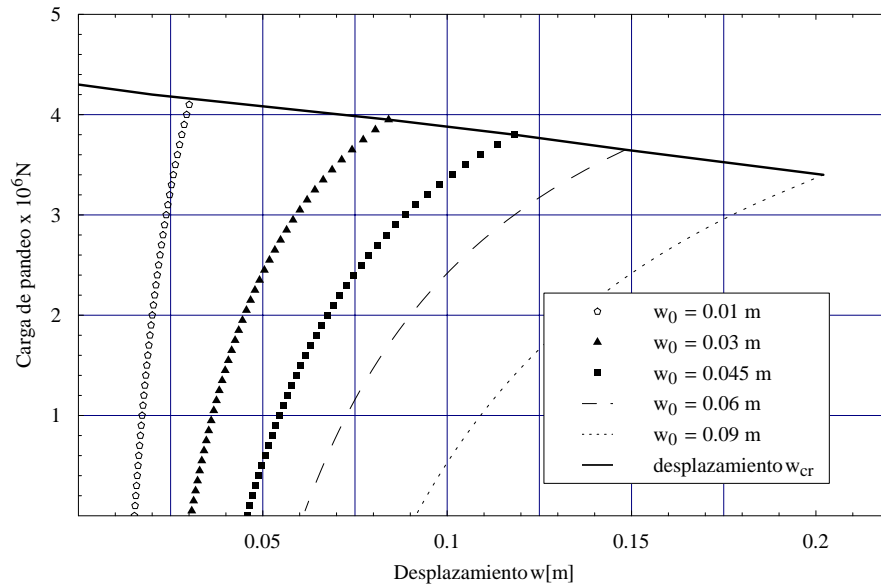


Figura 9. Camino fundamental del desplazamiento vertical, {45/-45/-45/45}.

4.3 Post-Pandeo torsional

En esta sección se estudia la influencia de imperfección geométrica sobre el comportamiento de post-pandeo de una viga compuesta de pared delgada. En las Figuras 10, 11 y 12, se muestran las curvas de post-pandeo para la máxima amplitud del giro torsional ϕ en función de la carga, considerando una longitud de viga de 12 metros y una secuencia de laminación {0/0/0/0}, {0/90/90/0} y {45/-45/-45/45}, respectivamente. Además, en estas figuras se compara el camino de equilibrio considerando diferentes valores de imperfección inicial w_0 .

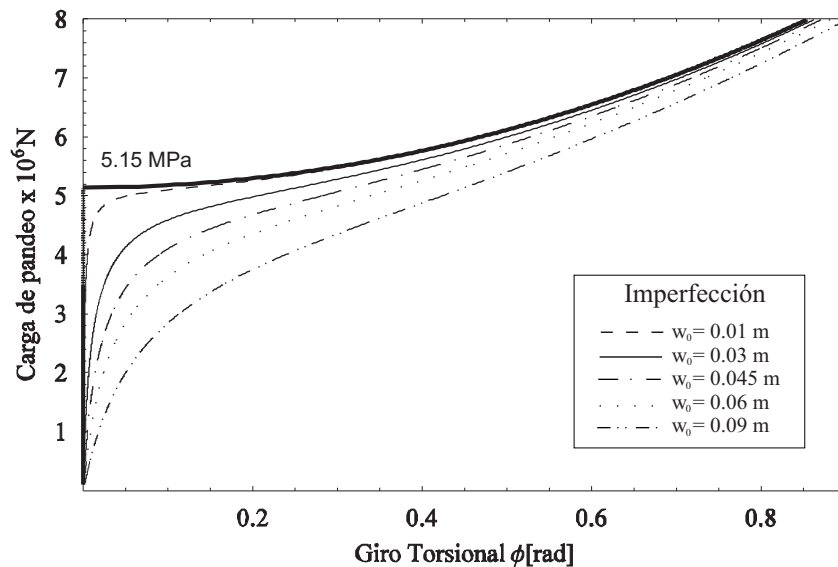


Figura 10. Influencia de imperfección sobre el camino de post-pandeo, {0/0/0/0}.

De las figuras se observa que los caminos de equilibrio de post-pandeo son estables y simétricos. La secuencia de laminación {0/0/0/0} presenta la mayor resistencia al pandeo y

también la mayor capacidad de carga remanente luego del pandeo. Mientras que la secuencia de laminación $\{45/-45/-45/45\}$ presenta la menor capacidad de carga remanente debido a que se observa un desplazamiento mayor para un determinado valor de carga. En presencia de una imperfección inicial la viga pierde estabilidad para valores de carga menores que una viga perfecta, como fue señalado en el análisis de pandeo. A medida que aumenta la amplitud de la imperfección no se diferencia claramente el camino fundamental del de equilibrio. El efecto de la imperfección reduce los valores del camino de equilibrio con respecto al modelo sin imperfecciones. Por último, la estabilidad del camino de post-pandeo no varía por la influencia de imperfección, es decir, las curvas muestran un comportamiento estable en todos los casos analizados. De la comparación para los diferentes laminados se observa que el efecto de la imperfección geométrica es más notable cuando se utiliza la laminación $\{45/-45/-45/45\}$, de igual forma que se ha observado en los análisis anteriores de pandeo y pre-pandeo.

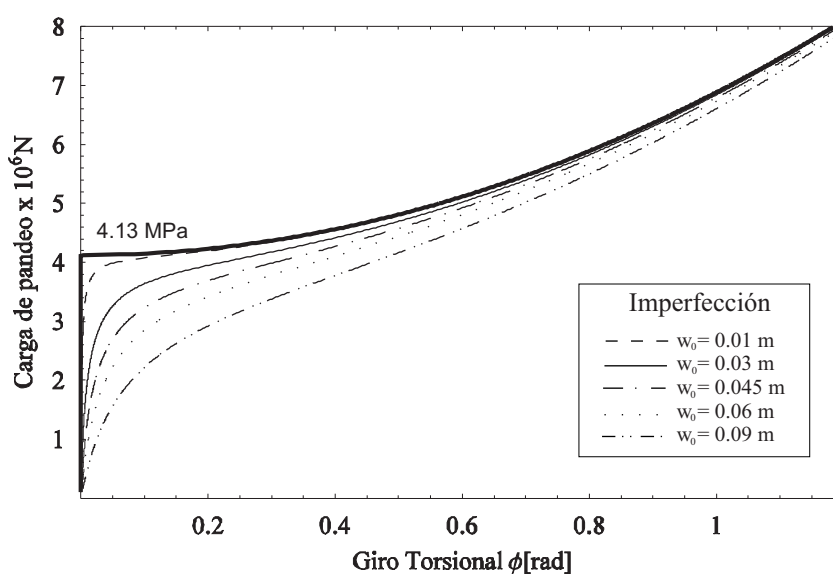


Figura 11. Influencia de imperfección sobre el camino de post-pandeo, $\{0/90/90/0\}$.

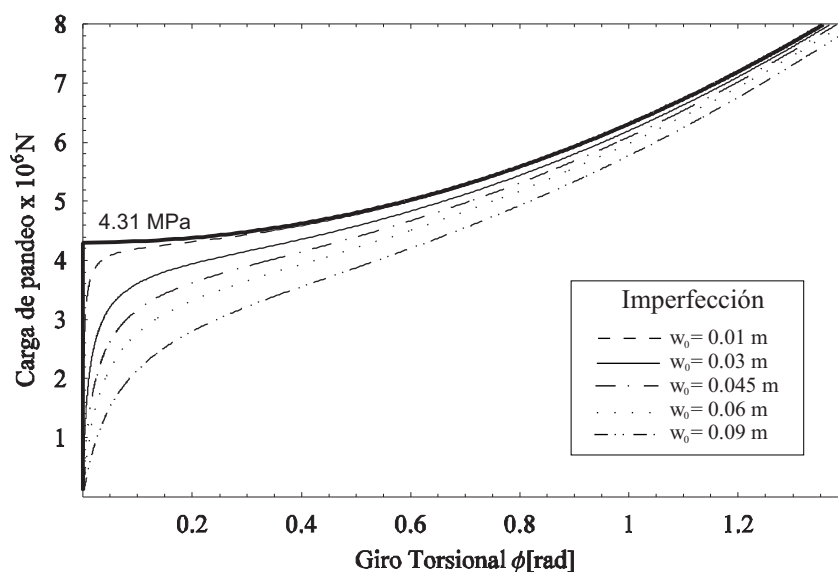


Figura 12. Influencia de imperfección sobre el camino de post-pandeo, $\{45/-45/-45/45\}$.

5 CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó una modificación del modelo geométrico no-lineal previamente desarrollado por los autores, para considerar la influencia de imperfecciones sobre la estabilidad estática de vigas. El modelo corresponde a una formulación geométrica no-lineal tipo viga el cual considera aspectos no convencionales tal como la deformación por corte. La formulación es válida para vigas de pared delgada construidas con materiales compuestos laminados. El aporte nuevo a dicha formulación corresponde a la introducción de imperfección geométrica por medio de una función de desplazamiento inicial en la dirección vertical de la viga. A partir del modelo es posible investigar varios problemas de interés técnico, tal como problemas elásticos no-lineales y problemas de estabilidad bajo la acción de diferentes tipos de carga y condiciones de borde.

De los resultados numéricos se analizó el efecto de imperfecciones sobre la respuesta de pandeo, pre-pandeo y post-pandeo de una viga simplemente apoyada y sometida a una carga axial aplicada en el centroide de la sección. La influencia de imperfecciones fue analizada para diferentes secuencias de laminación simétricas balanceadas. Se determinó que el efecto de imperfección provoca una disminución de la carga de pandeo que depende del laminado y de la longitud de la viga. En el ejemplo considerado se observó que la sensibilidad a imperfecciones disminuye para una configuración de laminado rígida, como es la que se obtiene cuando las fibras están orientadas en la dirección longitudinal $\{0/0/0/0\}$. El efecto contrario se obtuvo para una secuencia de laminación $\{45/-45/-45/45\}$, donde los desplazamientos correspondientes al estado de pre-pandeo aumentan considerablemente cuando aumenta la amplitud de la imperfección. Finalmente, el efecto de imperfección reduce los valores del camino de equilibrio con respecto al modelo sin imperfecciones. Sin embargo, la estabilidad de las curvas de post-pandeo no varía, resultando en todos los casos curvas estables y simétricas.

6 AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo fue realizado gracias a Secretaría de Ciencia y Tecnología, Universidad Tecnológica Nacional y al CONICET.

REFERENCIAS

- Barbero, E.J., *Introduction to Composite Material Design*. Taylor and Francis Inc, 1999.
- Bazant, Z.P., Cedolin, L., *Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture, and Damage Theories*. Dover Publication, Inc. Mineola, New York, 2003.
- Chan, S.L., Kitipornchai, S., Geometric nonlinear analysis of asymmetric thin-walled beam-columns. *Engineering Structures*, 9(4):243–54, 1987.
- Chróscielewski, J., Lubowiecka, I., Szymczak, C., Witkowski, W., On some aspects of torsional buckling of thin-walled I-beam columns. *Computers and Structures*, 84:1946–1957, 2006.
- Flores, F., Godoy, L.A., Elastic Post-buckling analysis via finite element and perturbation techniques, Part I: formulation. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 33:1775-1794, 1992.
- Godoy, L.A., *Thin-walled structures with imperfections: Analysis and Behavior*. Elsevier, London, 1996.
- Godoy, L.A., Mook, D.T., Higher order sensibility to imperfections in bifurcation buckling analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 33:511-520, 1996.

- Lin, W.L., Hsiao, K.M., Co-rotational formulation for geometric nonlinear analysis of doubly symmetric thin-walled beams. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:6023-6052, 2001.
- Machado, S.P., Cortínez, V.H., Análisis geométrico no lineal de vigas compuestas de pared delgada. *Mecánica Computacional (Asociación Argentina de Mecánica Computacional)*, Vol.23, 391-410, 2004.
- Machado, S.P., Cortínez, V.H., Lateral buckling of thin-walled composite bisymmetric beams with prebuckling and shear deformation. *Engineering Structures*, 27:1185-1196, 2005a.
- Machado, S.P., Cortínez V.H., Non-Linear model for stability of thin walled composite beams with shear deformation. *Thin walled Structures*, 43:1615-1645, 2005b.
- Machado, S.P., Non-linear buckling and postbuckling behavior of thin-walled beams considering shear deformation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 43:345 – 365, 2008.
- Qiao, P., Zou, G., Davalos, J.F., Flexural–torsional buckling of fiber-reinforced plastic composite cantilever I-beams. *Composite Structures*, 60:205–217, 2003.
- Roberts, T.M., Second order strains and instability of thin walled bars of open cross-section. *International Journal of Mechanics Science*, 23(5):297–306, 1981.
- Rohagh, H.R., Bradford M.A., A rational model for the distortional buckling of tapered members. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, 130:263–77, 1996.
- Szymczak, C., Sensitivity analysis of thin-walled members, problems and applications. *Thin-Walled Structures*, 41:271–290, 2003.
- Thompson, J.M., Hunt, G.W., *A general theory of elastic stability*, John Wiley, London, 1973.
- Vlasov, V.Z., *Thin Walled Elastic Beams*, Jerusalem: Israel Program for Scientific Translation, 1961.
- Washizu, K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon Press, 1968.