MECOM 99
Mendoza
6-10 de septiembre de 1999

SOLUCION NUMERICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS NO LINEALES POR EL METODO DE LOS INCREMENTOS FINITOS(MIF). UNA PROPIEDAD DE LAS SOLUCIONES

Horacio E. Retamales

Grupo LAMA /UTN RM
Rodríguez Nº 273 - Mendoza.

RESUMEN

En los trabajos de referencia se ha presentado una propiedad de las soluciones de ecuaciones diferenciales que vinculada al MIF, permite una versión del mismo de muy bajo costo computacional, basado en la resolución del problema en dos etapas. La primera que consiste en un seal con un mínimo de ecuaciones y la siguiente en la que se concluye el cálculo por un procedimiento recursivo, esto es, no es necesaria la resolución simultanea de un gran seal.
Este trabajo es una continuación del presentado en la referencia [1] que fuera una aplicación del método a edos lineales. Se muestra aquí que, aunque con algo mas de complejidad, la metodología es aplicable a edos no lineales y le corresponden observaciones semejantes en lo referente a ventajas e inconvenientes comentados en la referencia.
La ventaja principal se puede resumir en lo que sigue:

El cálculo de los Taylors en el MIF se puede reducir a la determinación de los valores iniciales de una sucesión recursiva.

Esto representa tres beneficios:
a)Mejores condiciones de precisión en los resultados,
b)Discretizaciónes menos densas, con macroelementos, y
c)Menor costo computacional.

Se plantean operativamente las concetualizaciones pertinentes y se muestra un ejemplo aclaratorio.
Se han realizado extensiones conceptuales a eddp [2],[3].

ABSTRACT

In references papers it is presented a singular attribute of the differential equations solution related to FIM, which allows a very low computational cost version of that methode based upon a two steps problem solving. First step which consists of a small seanl and the second step in which computation is completed by means of recursive procedure, that is, it is not required the simultaneus solution a large seanl.
This paper follows what was presented in reference [1], the FIM application to linear odes. Even with some more complexity it is shown here, that the methode applies also to non linear ode. It is here shown that, even with some more complexity, the methode is appliable to non linear edos with similar observations relative to advantages and disadvantages mentioned in the reference.
The main advantage can be presented as follows:
Taylors computation in MIF can be reduced to the calculation initial values of a recursive sequence.
This have three benefits:
a) Better accuracy conditions of results,
b) Less dense dominium discretization with larger macroelements.
c) Computational lower cost.

Pertinent conceptualizations are operatively presented and an explanatory example is shown.
In references [2,3] conceptual extensions to eddp have been made.

Introducción:

En la solución numérica de problemas diferenciales no lineales se plantea la necesidad de discretizaciones muy densas del dominio de la relación diferencial que describe el problema. En consecuencia, se llega con facilidad a grandes seals y, por lo tanto, aparecen dificultades computacionales asociadas. Los métodos de resolución de tales problemas que minimizan tales dificultades son, naturalmente de gran utilidad.

La propiedad enunciada se refiere a la verificación de relaciones diferenciales por las componentes de un Taylor en un punto del dominio. Tal propiedad aplicada adecuadamente permite la generación de las componentes del Taylor por un procedimiento recursivo ó semejante. En las referencias se han tratado con algún detalle los casos lineales.

<u>ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS NO LINEALES:</u>

Veamos que el caso de resolucion de edos no lineales por el MIF conduce a un seal como el siguiente:

$$\begin{bmatrix} x & x & x & x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x & x & x & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c & c & c & c & c & & & & & \\ c & c & c & c & c & c & & & & \\ c & c & c & c & c & c & c & & & \\ c & c & c & c & c & c & c & c & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c & c & c & c & c & c & c & c & c & c \end{bmatrix} \left[Y_0'\right] = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \cdots \\ f_0 \\ f_0' \\ f_0'' \\ f_0''' \\ \cdots \\ f_0^{(k)} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Las primeras lineas de la matriz de coeficientes del Taylor Y', calculado en el punto del dominio, corresponden a las condiciones de borde del problema (bloques A11 y A12). El bloque inferior de aquella matriz(bloques A21 y A22), que contiene un ordenamiento cuasi triangular de elementos no nulos, corresponde a las relaciones diferenciales y sus derivadas. Estas últimas representan condiciones que cumplen las componentes del Taylor en el punto.

El seal resultante, representado por bloques queda:l

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{10}' \\ Y_{20}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

El procedimiento de solución consiste en los siguientes pasos:

1.Cálculo de los elementos del bloque correspondiente a las condiciones de borde (función de la posición).Bloques A_{11} y A_{12}.

2.Cálculo de los elementos del bloque cuasitriangular. Derivadas de relación diferencial (edo). Bloques A_{21} y A_{22}.

3.Vector de términos independientes: Datos. Vector Y1

4.Por operaciones de filas con los bloques A_{21} ; A_{22} , anular los elementos del bloque A_{12} .

5.Resolver el seal resultante: $A_{11}^{*} . Y_{10}' = Y_1^{*}$

6.Calcular (recursivamente) las componentes de Y_{20}' .

7.Utilizar al Taylor para calcular valores de función o derivadas según exija el problema diferencial.

<u>Ejemplo:</u>

Sea el caso de resolver la siguiente edo no lineal, con adecuadas condiciones de borde,

$$\sum_{i=0}^{2} a_i \, y^{(i)} = 0 \qquad (1)$$

donde,

$$a_i = a_i(x, y, y') \qquad i = 0,1,2 \qquad (2)$$

Observemos que, si D es el operador derivada respecto de x, se tiene:

$$D\left(\sum_{i=0}^{2} a_i \, y^{(i)}\right) = \sum_{i=0}^{2} \left(Da_i\right) y^{(i)} + a_i \, y^{(i+1)} = 0 \qquad (3)$$

Así se tiene:

k=1, $Da_0 y + \left(a_0 + Da_1\right) y' + \left(a_1 + Da_2\right) y'' + a_2 y''' = 0$

k=2, $D^2 a_0 y + \left(2a_0 + D^2 a_1\right) y' + \left(a_0 + 2Da_1 + D^2 a_2\right) y'' + \left(a_1 + 2Da_2\right) y''' + D^2 a_2 y'''' = 0$

Indicando la matriz de coeficientes del seal para un Taylor de más de 7 componentes, se tiene:

$$\begin{bmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
Da_0 & a_0 + Da_1 & a_1 + Da_2 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\
D^2a_0 & 2Da_0 + D^2a_1 & a_0 + 2Da_1 + D^2a_2 & a_1 + 2Da_2 & a_2 & 0 & 0 \\
D^3a_0 & 3D^2a_0 + D^3a_1 & 3Da_0 + 3D^2a_1 + D^3a_2 & a_0 + 3Da_1 + 3D^2a_2 & a_1 + 3Da_2 & a_2 & 0 \\
D^4a_0 & 4D^3a_0 + D^4a & 6D^2a_0 + 4D^3a_1 + D^4a_2 & 4Da_0 + 6D^2a_1 + 4D^3a_2 & a_0 + 4Da_1 + 6D^2a_2 & a_1 + 4Da_2 & a_2 \\
D^5a_0 & 5D^4a_0 + D^5a_1 & 10D^3a_0 + 5D^4a_1 + D^5a_2 & 10D^2a_0 + 10D^3a_1 + 5D^4a_2 & 5Da_0 + 10D^2a_1 + 10D^3a_2 & a_0 + 5Da_1 + 10D^2a_2 & a_1 + 5Da_2 \\
D^6a_0 & 6D^5a_0 + D^6a_1 & 15D^4a_0 + 6D^5a_1 + D^6a_2 & 20D^3a_0 + 15D^4a_1 + 6D^5a_2 & 15D^2a_0 + 20D^3a_1 + 15D^4a_2 & 6Da_0 + 15D^2a_1 + 20D^3a_2 & a_0 + 6Da_1 + 15D^2a_2 \\
D^7a_0 & 7D^6a_0 + D^7a_1 & 21D^5a_0 + 7D^5a_1 + D^7a_2 & 35D^4a_0 + 21D^5a_1 + 7D^6a_2 & 35D^3a_0 + 35D^4a_1 + 21D^5a_2 & 21D^2a_0 + 35D^3a_1 + 35D^4a_2 & 7D\ a_0 + 12D^2a_1 + 35D^3a_2
\end{bmatrix}$$

Esta matriz con sus elementos no nulos en un ordenamiento cuasitriangular nos permite calcular, a partir de las dos primeras componentes del Taylor, las restantes. Este proceso es asemejable a uno recursivo. Para calcular el seal que contiene como únicas incógnitas al las dos primeras componentes del Taylor, debe operarse sobre el seal completo, que incluye las condiciones de borde del problema, por operaciones de filas comenzando por la primera después del triángulo de ceros la matriz de arriba y siguiendo con la inmediata anterior hasta la tercera fila, para anular los elementos de las columnas tercera hasta la última de las dos primeras filas.

Así, se concluye que la no linealidad de la edo no tiene influencia en la aplicación del MIF y utilización de las propiedades enunciadas en la referencia[1],[2] y [3].

Los ejemplos numéricos 1 y 2 presentados en el trabajo LA ECUACION DIFERENCIAL DE ORDEN N CON COEFICIENTES VARIABLES, Casos: NL1-1/2; NL2B-1/2 son de aplicación en este caso

Mza.,octubre 1997

Referencias:

1. H.E.Retamales
 Solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias por el método de los incrementos finitos(MIF). Una propiedad de las soluciones.
 LAMA-UTN.Mendoza, dic.1996.
2. H.E.Retamales
 S OLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES POR EL MéTODO DE LOS INCREMENTOS FINITOS(MIF) .Una propiedad de las soluciones de eddp lineales con coeficientes constantes. PARTE 1
 LAMA-UTN-Mendoza, dic.1996
3. H.E.Retamales
 S OLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES POR EL MéTODO DE LOS INCREMENTOS FINITOS(MIF) .Una propiedad de las soluciones de eddp lineales con coeficientes constantes. PARTE 2
 LAMA-UTN-Mendoza, dic.1996