Mecánica Computacional Vol. XXIV
A. Larreteguy (Editor)
Buenos Aires, Argentina, Noviembre 2005

TEORIA DE CÁSCARAS AFINES: ESTIMATIVAS DE LA TENSION Y LA DEFORMACION

Salvador GIGENA [1), 2)], Daniel ABUD [2), 3)], Moisés BINIA [2), 3)]

[1)] Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura - Universidad Nacional de Rosario
Avda. Pellegrini 250 - 2000 Rosario
e-mail: sgigena@fceia.unr.edu.ar

[2)] Departamento de Matemáticas
Facultad. de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales - Universidad Nacional de Córdoba
Avda. Velez Sarsfield 299 - 5000 Córdoba
e-mail: dabud@efn.uncor.edu - mbinia@arnet.com.ar

[3)] Departamento de Ingeniería Civil y de Ingeniería Mecánica
Facultad. Regional Córdoba - Universidad Tecnológica Nacional
Avda. Vladislao Frias s/n - 5000 Córdoba
e-mail: dabud@efn.uncor.edu

Palabras clave. *Teoría de cáscaras afines - cáscara afín - geometría afín de superficies*

Resumen. *Esta es una de las etapas más importantes de la consecución de la Teoría de cáscaras afines. En trabajos anteriores hemos definido y utilizado los conceptos de "cáscara afín", "normal unimodular afín" y "geometría afín de superficies". Se establecieron, entre otros conceptos, las condiciones de compatibilidad afín, con fundamento en las condiciones de integrabilidad de la geometría unimodular afín de superficies. También, las ecuaciones de equilibrio de una cáscara sólida en el sentido afín, reduciendo luego estas ecuaciones tridimensionales a las correspondientes ecuaciones bidimensionales en la superficie media, en términos de invariantes geométricos, unimodulares afines de tal superficie. Hemos obtenido, expresiones de las desigualdades básicas. Como base para la implementación de métodos numéricos de aproximación, que serán necesarios en la fase experimental, tendremos que buscar expresiones aproximadas. En esta parte seguimos, exclusivamente, el razonamiento utilizado en los trabajos de Fritz John, y no, el de W. T. Koiter que, en el armado de su teoría, aproximó desde un principio. En el presente trabajo, se mostrarán expresiones de las estimativas de orden superior de los tensores de tensión y deformación. Estas estimativas serán imprescindibles para la aplicación práctica de esta teoría en la Ingeniería, para la determinación de las constantes que aparecen en el sentido afín.*

1 INTRODUCCION

En esta etapa de la Teoría de Cáscaras Afines, buscaremos estimativas numéricas o acotaciones numéricas para los tensores de tensión y deformación, como así también para las derivadas de orden superior de los mismos. En trabajos anteriores hemos definido y utilizado los conceptos de *cáscara afín*, *normal unimodular afín* y *geometría afín de superficies*,[iv],[v],[vi]. Se establecieron, entre otros conceptos, las condiciones de compatibilidad afín, las ecuaciones de equilibrio de una cáscara sólida en el sentido afín. Hemos obtenido, a la vez, expresiones de las desigualdades básicas para cáscaras afines.

Como base para la implementación de métodos numéricos de aproximación, que serán necesarios en una posterior fase experimental, buscaremos expresiones aproximadas de los tensores de tensión y de deformación. En esta parte hemos seguido, exclusivamente, el tratamiento del tema utilizado en los trabajos de Fritz John [vi], en contraposición con los de W. T. Koiter [ix], quien en el armado de su teoría de cáscaras prescribe el uso de aproximaciones numéricas desde un primer momento.

Recordemos, además, que ocurrió un interesante intercambio de ideas entre estos dos autores y que el segundo reconoció la rigurosidad y valor de aplicabilidad del método del primero. Todo esto ha quedado documentado en publicaciones posteriores de ambos.

En el presente trabajo, comenzaremos definiendo relaciones tensión-deformación en el sentido afín; luego, se mostrarán expresiones de las estimativas numéricas de las derivadas de orden superior de los tensores de tensión y deformación y de estos tensores mismos. Estas estimativas numéricas serán imprescindibles para la aplicación práctica de esta teoría en el campo de la Ingeniería, por ejemplo, para la determinación, estudio y acotación de las constantes que aparecen en el desarrollo, siempre considerándolas en el sentido afín.

2 RELACIONES DE TENSIÓN-DEFORMACIÓN EN CÁSCARAS AFINES

Recordemos que hemos seguido, para el tratamiento de nuestra propia teoría de cáscaras afines, el correspondiente programa establecido en la teoría de Fritz John [vi], para cáscaras euclidianas. Algunas definiciones previas se pueden ver desarrolladas detalladamente en nuestros propios artículos anteriores referidos al tema. Comenzaremos el presente artículo definiendo las componentes contravariantes del tensor de tensiones t^{mk} referidas al sistema original o no deformado con una fuerza actuando en un elemento de área dA , y con referencia a un cierto sistema normal afín de coordenadas.

Para tal fín, también recordemos que, en nuestro artículoanterior [v], hemos definido la métrica para la cáscara no-deformada C por la expresión

$$G = \sum_{ij} G_{ij} du^i du^j \tag{1}$$

Además, también denotamos con G al determinante de los coeficientes métricos G_{ik}, en el estado original de la cáscara sin deformar, G^* el de los G^*_{ik}, que al estar con asterisco significa que está referido al estado deformado, y W es la función densidad de energía de deformación. Para la conexión de Levi-Civita, la diferencia entre el estado deformado y no deformado se presenta según la expresión:

$$\Gamma^{*\,i}_{jk} = c^{\,i}_{jk} + \Gamma^{\,i}_{jk} \tag{2}$$

Para el presente caso de cáscaras afines, las componentes contravariantes del tensor de tensión, t^{mk}, están conectadas con las componentes del tensor de deformación, e_{mk}, a través de las relaciones tensión-deformación que se definen a continuación, tal cual las definió F. John:

$$t^{mk} := \sqrt{\frac{G}{G^*}}\,\frac{\partial W}{\partial e_{mk}} \tag{3}$$

donde W es la *función de densidad de energía de deformación*. A su vez, la misma expresión en términos del correspondiente tensor de tipo (1,1), toma la forma:

$$t^m_i = \sum_k G_{ik} t^{mk} = \sqrt{\frac{G}{G^*}}\,\frac{\partial W}{\partial e^{\,i}_{m}} \tag{4}$$

Ambas expresiones, son similares a las (13) y (14) usadas por Fritz John [vi]. Entonces, también desarrollando la derivada de W como una función compuesta, nos queda

$$t^m_i = \sqrt{\frac{G}{G^*}}\,\left(W_{s_1} d^{\,m}_i + 2W_{s_2} e^{\,m}_i + 3W_{s_3} e^{\,m}_j e^{\,j}_i\right), \tag{5}$$

donde cada W_{s_i} denota a la derivada parcial $W_{s_i} := \dfrac{\partial W}{\partial s_i}$, con $i = 1, 2, 3$.

Estas relaciones se pueden expresar a través de lo que F. John denomina el tensor de *pseudotensión* cuyas componentes están definidas por

$$T^m_j := \sqrt{\frac{G^*}{G}}\; t^m_j - d^{\,m}_j W\ , \tag{6}$$

resultando, al usar la ecuación anterior

$$T^m_i = \left(W_{s_1} - W\right) d^{\,m}_i + \left(2W_{s_1} + 2W_{s_2}\right) e^{\,m}_i + \left(4W_{s_2} + 3W_{s_3}\right) \sum_k e^{\,k}_i e^{\,m}_k + 6W_{s_3} \sum_{s,k} e^{\,s}_i e^{\,k}_s e^{\,m}_k \tag{7}$$

Una vez que la cáscara llega al estado deformado, donde se supone que está en equilibrio, por aplicación del principio de Cauchy se obtienen las ecuaciones expuestas en nuestro trabajo anterior [v] , (23). Tales ecuaciones de equilibrio, a la vez, pueden ser expresadas en la forma simplificada, sugerida por F. John, dada por las ecuaciones que se describen a continuación, de forma que, si denotamos por

$$T_{i;m}^{p} := \frac{\partial T_i^p}{\partial u^m} + \sum T_i^k \Gamma_{km}^p - \sum T_l^p \Gamma_{im}^l \qquad (8)$$

a la derivada covariante del tensor de pseudo-tensiones, resulta contrayendo índices

$$\sum_m T_{i;m}^m = 0 \qquad (9)$$

y, puesto que:

$$\sum_m T_{i;m}^m = \sum_m \left(\sqrt{\frac{G^*}{G}} \sum_s t^{ms} G_{si}^* - W d_i^m \right)_{;m} = 0 \qquad (10)$$

resulta por cálculo directo

$$\sum_m T_{i;m}^m = \left(\sqrt{\frac{G^*}{G}} \right)_{;m} \sum_s t^{ms} G_{si}^* + \left(\sqrt{\frac{G^*}{G}} \right) \left(\sum_s t_{;m}^{ms} G_{si}^* + \sum_s t^{ms} G_{si;m}^* \right) - W_{;i} = 0 \qquad (11)$$

que en términos del tensor diferencia, del tensor de tensiones y de los coeficientes de la métrica deformada, nos da

$$\sum_m T_{i;m}^m = \left(\sqrt{\frac{G^*}{G}} \right) \sum_{m,r,s} \left(c_{mr}^r t^{ms} G_{si}^* - t^{rs} c_{rm}^m G_{si}^* - t^{mr} c_{rm}^s G_{si}^* + t^{ms} G_{si;m}^* - \tfrac{1}{2} t^{ms} G_{sm;i}^* \right) = 0 \qquad (12)$$

3 NOTACIÓN ADICIONAL Y PRIMERAS ESTIMATIVAS NUMÉRICAS PARA LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO Y COMPATIBILIDAD

Con el propósito de estimar derivadas, será necesario comparar componentes de los tensores de tensión y deformación pertenecientes a diferentes espacios de definición. Por ejemplo, y muy particularmente, componentes de tensores de tipo (0,2), t^{ij} , con las respectivas componentes de tipo (1,1) t_i^j .

Por tal motivo, si tomamos como base de trabajo a la cáscara, que es un objeto de dimensión tres, llamaremos en general “vectores” a los diferentes objetos geométricos que se pueden considerar en tal sentido. Por ejemplo denotaremos

$$w_{rs}^{ik} \tag{13}$$

con varios índices (sub y superíndices) como si fuera un “vector”

$$w = \left(w_{rs}^{ik}\right) \tag{14}$$

donde los índices varían de uno a tres, por lo tanto, la dimensión del espacio vectorial donde pertenece dicho vector será igual a tres elevado al número de índices presentes,

$$\dim w = 3^4 = 81 \tag{15}$$

Además, estos “vectores” pueden ser multiplicados por escalares:

$$\left(l\,w \right) = \left(l\,w_{rs}^{ik} \right), \tag{16}$$

y, si $w = \left(w_{rs}^{ik}\right)$ y $v = \left(v_{rs}^{ik}\right)$ representan a “vectores” del mismo tipo, podemos sumarlos

$$\left(w + v\right) = \left(w_{rs}^{ik} + v_{rs}^{ik}\right), \tag{17}$$

o, se puede multiplicar a dos “vectores” cualesquiera, por ejemplo, sean $w = \left(w_{rs}^{ik}\right)$ y $v = \left(v_{q}^{it}\right)$, definiendo su multiplicación por la regla establecida a través de la ecuación:

$$w\ v = \left(w_{rs}^{ik} v_{q}^{it}\right) \tag{18}$$

o también multiplicar a un “vector” por sí mismo, como en las expresiones:

$$w^2 = \left(w_{rs}^{ik} w_{cd}^{ab}\right) \qquad \text{y} \qquad v^2 = \left(v_{q}^{it} v_{c}^{ab}\right) \tag{19}$$

De igual manera, el gradiente de un “vector” $w = \left(w_{rs}^{ik}\right)$ cuyas componentes son funciones de las u^i, es otro “vector” $w' = \left(w_{rs,t}^{ik}\right) := \left(\dfrac{\partial w_{rs}^{ik}}{\partial u^t}\right)$, donde se han considerado todas posibles derivadas parciales con respecto al sistema de coordenadas normales afines definidas sobre la cáscara.

Para este trabajo supondremos, además, que la superficie media es *localmente fuertemente convexa* **[ii]** y que, entonces, la normal afín ha sido orientada convenientemente para que la estructura definida sobre tal superficie sea positivo-definida. Con ello, resulta que también la estructura ampliada a la cáscara es positivo-definida, o sea una métrica usual Riemanniana siempre expresada en términos del sistema normal afín definido anteriormente. De esta forma, podemos también hablar de la longitud de vectores. Por ejemplo, $|w|$ representa a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las componentes del vector w cuando expresamos a éste en términos de una base ortonormal de la métrica Riemanniana:

$$|w|^2 = \left(w_{rs}^{ik} w_{rs}^{ik}\right) \tag{20}$$

Siguiendo la notación usada por F. John, utilizaremos lo que él llama la "forma general de una expresión", denotando

$$F\left(p,q\right)\left(u+v+w\right), \tag{21}$$

donde la anterior expresión denota un "vector" en el que cada componente es una forma lineal en las componentes de los vectores u, v y w; y donde los coeficientes de estas formas lineales son funciones de las componentes de p y q. La letra F, en tal caso, significará una expresión diferente para cada ecuación que se considere.

Aplicando lo anterior, por ejemplo, a las componentes de los tensores, de tipo (1,1), de tensión y deformación, introducimos ahora como los "vectores"

$$t = \left(t_k^i\right) \qquad \text{y} \qquad e = \left(e_k^i\right) \tag{22}$$

entonces podemos expresar, usando (5), y en términos de los coeficientes de Lamé, la siguiente ecuación:

$$t_i^m = l \sum_j e_j^j d_i^m + 2me_i^m + F\left(e\right)e^2 \tag{23}$$

puesto que tales coeficientes están definidos por la relación

$$W := \frac{l}{2}\left(s_1\right)^2 + ms_2 + F\left(e\right)e^3, \tag{24}$$

donde.

$$s_1 = \sum_i e_i^i \; ; \qquad s_2 = \sum_{i,j} e_j^i e_i^j \; ; \qquad s_3 = \sum_{i,j,k} e_j^i e_k^j e_i^k , \tag{25}$$

y donde observamos que los dos primeros términos del lado derecho son de orden dos (cuadráticos) en términos de las componentes del tensor(u operador) de deformación $e = \left(e_k^i\right)$, y en el tercer término involucramos a todas las componentes de orden superior a dos: este último representa entonces al "resto", que será de mucha utilidad para determinar el grado de aproximación con que se trabaje al realizar las correspondientes estimativas numéricas.

Desde ya establecemos que en el mismo sentido deben interpretarse las expresiones que serán descriptas en lo que resta de este artículo.

Recordemos ahora que las relaciones tensión-deformación están definidas por las ecuaciones (3) y (4). Entonces, derivando parcialmente con respecto a las variables s_1 y s_2, resulta

$$W_{s_1} = \frac{\partial W}{\partial s_1} = \partial_{s_1} W = l \ s_1 \qquad \text{y} \qquad W_{s_2} = \frac{\partial W}{\partial s_2} = \partial_{s_2} W = m \ . \tag{26}$$

De las que se obtiene:

$$2W_{s_1} + 2W_{s_2} = 2m + 2l \ s_1 \tag{27}$$

$$4W_{s_2} + 3W_{s_3} = 2m + F(t)t^3 , \tag{28}$$

$$W_{s_1} - W = l \ s_1 - \frac{1}{2} l (s_1)^2 - \frac{1}{2} m s_2 + F(e) e^3 . \tag{29}$$

Luego, utilizando el desarrollo en serie de potencias (aproximación numérica)

$$(1+x)^{-1/2} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)x + \frac{3/4}{2} x^2 + \ldots \tag{30}$$

se puede expresar

$$\sqrt{\frac{G}{G^*}} = \left(\frac{G}{G^*}\right)^{1/2} = \left(\frac{G^*}{G}\right)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} s_1 + \frac{3}{8} (s_1)^2 + \ldots \tag{31}$$

con lo que, de

$$t_i^m = \sqrt{\frac{G}{G^*}} \left(W_{s_1} d_i^{\,m} + 2W_{s_2} e_i^{\,m} + 3W_{s_3} \sum_j e_j^{\,m} e_i^{\,j} \right) \tag{32}$$

nos queda,

$$t_i^m = \left(1 - \frac{1}{2} s_1 + \frac{3}{8} (s_1)^2 + \ldots \right) \left(W_{s_1} d_i^{\,m} + 2W_{s_2} e_i^{\,m} + 3W_{s_3} \sum_j e_j^{\,m} e_i^{\,j} \right) \tag{33}$$

Después, distribuyendo sólo con el primer término, resulta

$$
\begin{aligned}
t_i^m &= W_{s_1} d_i^m + 2W_{s_2} e_i^m + 3W_{s_3} \sum_j e_j^m e_i^j \\
&= \frac{l}{2} s_1 d_i^m + 2m e_i^m + 3W_{s_3} \sum_j e_j^m e_i^j \\
&= \frac{l}{2} \sum_j e_j^j d_i^m + 2m e_i^m + F(e) e^2
\end{aligned}
\tag{34}
$$

con lo cual obtenemos

$$
t_i^m = \frac{l}{2} \sum_j e_j^j d_i^m + 2m e_i^m + F(e) e^2 . \tag{35}
$$

De esta última expresión, la traza del operador lineal de tensión puede expresarse por:

$$
\sum_j t_j^j = \frac{l}{2} 3 \sum_j e_j^j + 2m \sum_j e_j^j + F(e) e^2 \tag{36}
$$

donde, a su vez, $\sum_j e_j^j$ es la traza del operador lineal de deformación

$$
\sum_j t_j^j = \left(\frac{3}{2} l + 2m \right) \sum_j e_j^j + F(e) e^2 \tag{37}
$$

Ahora, despejamos e_i^m en (35), para obtener

$$
e_i^m = \frac{1}{2m} t_i^m - \frac{l}{2m} s_1 d_i^m + F(t) t^2 \tag{38}
$$

y, reemplazando por lo obtenido para t_j^j:

$$
e_i^m = \frac{1}{2m} t_i^m - \frac{1-2m}{2m} \sum_j t_j^j d_i^m + F(t) t^2 . \tag{39}
$$

Entonces, a su vez la expresión (7) de las pseudotensiones puede escribirse

$$
\begin{aligned}
T_i^m = t_i^m + \frac{2}{m} \sum_i t_i^m t_i^s + \left(\frac{5m-2}{m} \right) \sum_j t_j^j t_i^s - \\
- \tfrac{1}{2} \left(\frac{1}{2m} \sum_{r,s} t_s^r t_r^s - \left(\frac{1-2m}{2m} \right) \sum_r t_r^r \sum_s t_s^s \right) d_i^m + F(t) t^3
\end{aligned}
\tag{40}
$$

A seguir introducimos el vector $h = \left(h_k^i\right)$ a través de la siguiente relación:

$$G_{ik} = d_k^i + h_k^i \ . \tag{41}$$

Es decir que tal vector mide la proximidad de la matriz métrica a la matriz identidad. Entonces, con tal convención resulta la siguiente estimativa para las componentes de la matriz inversa de la métrica, i.e., $\left(G^{ik}\right) := \left(G_{ik}\right)^{-1}$:

$$G^{ik} = d_k^i + h_k^i + F\left(h\right)\left(h^2\right) \tag{42}$$

Es fácil ver, a través de un cálculo directo, que los símbolos de Christoffel de segunda especie tienen la siguiente estimativa:

$$\Gamma_{kr}^i = F\left(h\right)\left(h'\right) \tag{43}$$

Luego, también es válida la estimativa

$$t_{ik} = t_k^i + F\left(h,t\right)\left(h \ t\right) . \tag{44}$$

Para el tensor métrico en el estado deformado tenemos, por definición (ver [v] , ecuación (19))

$$G_{ik}^* = G_{ik} + 2e_{ik} \tag{45}$$

Entonces, se puede estimar también

$$G_{ik}^* = G_{ik} + \frac{2}{m} t_{ik} - 2\left(\frac{1-2m}{2m}\right) \sum_j t_j^j d_k^i + F\left(t,h\right)\left(t^2 + h\ t\right) . \tag{46}$$

Para el tensor de componentes c_{kr}^i que establece el cambio de conexiones de Levi-Civita, del estado original no deformado al deformado, ya definido en (2), a su vez estimamos

$$c_{kr}^i = F\left(h,t\right)\left(t' + h' t\right) \tag{47}$$

Entonces, obtenemos las estimativas numéricas representadas por

$$\sum_m t_{im;m} = F\left(h,t\right)\left(tt' + h't + ht'\right) . \tag{48}$$

Finalmente, usando las ecuaciones (46), (47) y (48) también obtenemos:

$$\sum_r t_{hk;rr} + 2m \sum_r t_{rr;hk} = F\left(h,t\right)\left(h\, t'' + \left(t'\right)^2 + th't' + h't' + h''t + \left(h'\right)^2 t + \left(h'\right)^2 t^2 + tt''\right) , \tag{49}$$

puesto que, en nuestro caso, las ecuaciones de compatibilidad tridimensionales están dadas en términos de la comparación entre los tensores de curvatura riemanniano en la cáscara afín, al pasar del estado no-deformado al deformado. Obsérvese que, comparando con la expresión obtenida por F. John (ver [viii] , ecuación (27)) en la geometría euclidiana tal estimativa se obtiene de la ecuación de compatibilidad, la que a su vez resulta del hecho de que el tensor de curvatura es nulo para ambos estados de la cáscara, expresada en la ecuación (7) del trabajo citado, i.e.,

$$0 = R^*_{acdb} = e_{ab;cd} + e_{cd;ab} - e_{ad;cb} - e_{bc;ad} + \sum_{l,s} G^*_{ls}(c^l_{ab}c^s_{cd} - c^l_{ad}c^s_{bc}) \tag{50}$$

Nuestros propios resultados en la geometría afín están determinados por la ecuación:

$$R^*_{acdb} = e_{ab;cd} + e_{cd;ab} - e_{ad;cb} - e_{bc;ad} - \frac{1}{2}\left(\sum_m G^*_{am}R^m_{cbd} + \sum_m G^*_{cm}R^m_{adb}\right) + \sum_{l,s} G^*_{ls}(c^l_{ab}c^s_{cd} - c^l_{ad}c^s_{bc}) \tag{51}$$

que se obtiene por aplicación directa del Lemma 2 (Relación entre los tensores de curvatura), ya demostrado en [iv] , ecuación (14), ya que en el presente caso escribimos, por definición, $e_{ab} := \frac{1}{2}\left(G^*_{ab} - G_{ab}\right)$, y con $e_{ab;cd}$ denotamos a la derivada covariante segunda respecto a la conexión de Levi-Civita asociada a la métrica G .

Entonces, de la última ecuación resulta

$$e_{ab;cd} + e_{cd;ab} - e_{ad;cb} - e_{bc;ad} = -\sum_{l,s} G^*_{ls}(c^l_{ab}c^s_{cd} - c^l_{ad}c^s_{bc}) + R^*_{acdb} - \frac{1}{2}\left(\sum_m G^*_{am}R^m_{cbd} + \sum_m G^*_{cm}R^m_{adb}\right). \tag{52}$$

Por otra parte, es fácil obtener las siguientes estimativas numéricas para dichos tensores

$$R = F(h)\left(h'' + (h)^2 + (h')^2\right), \tag{53}$$

y

$$R^* = F(h,t)\left((t')^2 + (h')^2 + t'' + h''t + h't' + h\,t\right). \tag{54}$$

En consecuencia, el primer miembro de la ecuación (52) puede ser estimado en términos de las estimativas numéricas descriptas por las dos últimas ecuaciones (53) y (54), lo que permite finalmente establecer la estimativa representada por la ecuación (49)..

A seguir, también denotaremos con e al límite superior para los valores absolutos de las deformaciones principales en todos los puntos de la cáscara. Sea P_0 un punto en el estado no deformado de la superficie media M_0 , $2h$ es el espesor afín de la cáscara y D la distancia afín más próxima de P_0 a la superficie lateral B. Sea también, R una longitud típica asociada a con la superficie M_0, todo de acuerdo a lo previamente descrito en nuestro artículo anterior [vi]. Entonces definimos la expresión

$$q = \max\left(\frac{h}{D}, \sqrt{\frac{h}{R}}, \sqrt{e} \right) \tag{55}$$

Así mismo, en estas circunstancias supondremos que se cumple que

$$q < q_0 \tag{56}$$

donde q_0 es una constante que depende solamente de la elección de la función de densidad de energía de deformación W.

Se asume que todo el cálculo se hará para un sistema de coordenadas normales afines $\left(u^1, u^2, u^3\right)$ como lo hemos explicado anteriormente, y que fuera definido en nuestro trabajo anterior [iv]. En este desarrollo de las estimativas numéricas para las derivadas del tensor de tensiones se asume además que el sistema de coordenadas fue elegido de ese modo especial, con origen en P_0, cuyos dos primeros ejes de referencia están en el plano tangente a M_0, en el punto P_0, y cuyo tercer eje está en la dirección normal afín a M_0, en el mismo punto P_0. Las estimativas numéricas a ser realizadas para las derivadas parciales, en el sistema normal afín escogido, servirán inmediatamente para realizar las correspondientes estimativas numéricas de las sucesivas derivadas covariantes $t_{ik;rs\ldots}$, con lo que nuestro trabajo será independiente de tal sistema especial escogido presentemente.

Definimos así,

$$l = \frac{q_0 h}{q} = q_0 \min\left(D, \sqrt{Rh}, \frac{h}{\sqrt{e}} \right). \tag{57}$$

con lo que resultan las desigualdades

$$h < l < \sqrt{R h}, \qquad h < \frac{R}{4}, \qquad l < \frac{D}{2} \tag{58}$$

las que se cumplen si suponemos, por ejemplo

$$q_0 < \frac{1}{2} \tag{59}$$

donde, además, quedan establecidas las siguientes desigualdades para posteriores consideraciones

$$\frac{1}{R} \le \left(q_0\right)^2 \frac{h}{l^2} \le q_0 q \frac{1}{l} \le \frac{1}{2}\frac{q}{l}, \qquad e < \left(q_0\right)^2 \frac{h^2}{l^2} < \frac{h^2}{4l^2}. \tag{60}$$

Aceptamos que q_0 puede ser tan pequeña para una función densidad de deformación dada *W*, de manera tal que las fórmulas (41) a la (51) más las que hemos expresado en [vi] sean válidas en un dominio, o región definida. De hecho, definimos a esa cierta región *M*, para una función de energía de deformación dada, donde nuestros parámetros son válidos, quedando establecida de la siguiente manera:

$$M = \left\{ \left(u^1, u^2, u^3\right) : \sum \left(u^a\right)^2 < l^2, \left|u^3\right| < h \right\} \tag{61}$$

entonces para una *W* dada podremos elegir un q_0 suficientemente pequeño.

De aquí en más usaremos los mismos símbolos de aproximación que utiliza F. John, representados por una "*O*" y una "o". El primer símbolo se usa en el sentido convencional excepto que su dependencia con *W* está permitida.

La relación

$$A = O\left(B\right) \tag{62}$$

donde $B \geq 0$, significa que, para una función de energía de deformación dada *W* existe un número positivo *K*, tal que:

$$\left|A\right| \leq KB \tag{63}$$

El símbolo "o" será usado de una manera no convencional y siempre en combinación con "*O*", la relación:

$$A = O\left(B\right) + \mathrm{o}\left(C\right) \tag{64}$$

donde $B \geq 0$ y $C \geq 0$, indica que, para una función de energía de deformación dada *W* existe una función $K\left(k\right)$, definida para todo *k* positivo, tal que:

$$\left|A\right| \leq K\left(k\right)B + kC \tag{65}$$

para todo $k > 0$.

Supondremos, por otra parte, que la función de energías de deformación $W\left(s_1, s_2, s_3\right)$ está definida para todos los valores de $\left|s_i\right|$ suficientemente pequeños y, además, que es tan diferenciable como sea necesario. En este caso, recordemos que las s_i representan a las trazas de las sucesivas potencias del operador de deformación. Por definición, la "*longitud*" de dicho "operador de deformación" e_i^m es $\left|e\right| = \sqrt{e_i^m e_i^m}$. Para *G* suficientemente cerca de la matriz identidad, i.e. para $|h|$ suficientemente pequeño, podemos estimar $|e|$ en términos de los autovalores de la matriz $\left(e_i^m\right)$, es decir en términos de las deformaciones principales.

Entonces existe un e_0 que depende sólo de la elección de la función *W* tal que las relaciones tensión – deformación expresadas se mantengan para

$$|e| < e_0 \tag{66}$$

de manera tal que ocurra

$$t_i^m = O\left(|e|\right) \tag{67}$$

Entonces para una función *W* dada se pueden encontrar límites $t_0,\ h$ tal que para $|t| < t_0$ y $|h| < h_0$ todas las relaciones establecidas hasta ahora son válidas, agregando además, $|e| < e_0$.

4 ESTIMATIVAS PARA LA NORMA L_2 DE LAS DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

En lo que sigue, usaremos la siguiente expresión de la norma $\|w\|$, para cualquier vector $w = w\left(u^1, u^2, u^3\right)$ definido en la región *M* especificada en la sección anterior.

$$\|w\| = \sqrt{\iiint_M |w| du^1 du^2 du^3} \tag{68}$$

Se usará el símbolo w' para denotar el gradiente de *w*, i.e., el vector cuyas componentes son las primeras derivadas de las componentes de *w* con respecto a u^1, u^2, u^3. Denotaremos además, con $w^\bullet$ el gradiente longitudinal de *w*, i.e., el vector cuyas componentes son las primeras derivadas de las componentes de *w* con respecto a u^1, u^2.

Como es bien sabido, las componentes del tensor de tensión, t_{ik}, satisfacen la condición de simetría

$$t_{ik} = t_{ki} \tag{69}$$

Podemos representar las estimativas numéricas obtenidas a partir de las *ecuaciones de equilibrio*, expresadas en (48) de la forma

$$\sum_m t_{im;m} = P_i = F\left(h,t\right)\left(tt'+h't+ht'\right) \tag{70}$$

y, a su vez, las estimativas numéricas resultantes de las *ecuaciones de compatibilidad*, i.e., (49) por:

$$\begin{aligned}\sum_r t_{hk;rr} + 2m\sum_r t_{rr;hk} &= Q_{hk} \\ &= F\left(h,t\right)\left(h\,t''+\left(t'\right)^2 + th't'+h't'+h''t+\left(h'\right)^2 t+\left(h'\right)^2 t^2 + tt''\right)\end{aligned} \tag{71}$$

Entonces, a partir de lo anterior, y siguiendo el mismo tipo de desarrollo argumental que en [viii] se obtienen las siguientes estimativas numéricas para las derivadas parciales superiores del tensor de tensión

$$\partial_{k_1,k_2,i_1,i_2,\ldots,i_n} t = O\left(e\,l^{1-n}h^{-1}\right) \tag{72}$$

$$\partial_{k_1,k_2,a_1,a_2,\ldots,a_n} t = O\left(e\,l^{1-n}h^{-1}\right) \tag{73}$$

5 REFERENCIAS

[i] Gigena, S. *Constant Affine Mean Curvature Hypersurfaces of Decomposable Type,* Proc. of Symp. in Pure Math., American Math. Society, Vol. 54, (1993), Part 3, 289-316

[ii] Gigena, S. *Hypersurface Geometry and Related Invariants in a Real Vector Space,* libro en 4 capítulos, pp. 1-127, (Introduction i-vii), Octubre/1996.

[iii] Gigena, S. *Ordinary Differential Equations in Affine Geometry*, Le Matematiche, Vol. LI, (1996), Fasc.I, 119-151.

[iv] Gigena, S.; Binia, M.; Abud, D.; *Condiciones de Compatibilidad para Cáscaras Afines*, Mecánica Computacional, Vol. XXI, (2002), 1862-1881.

[v] Gigena, S.; Binia, M.; Abud, D.; *Ecuaciones de equilibrio en Cáscaras Afines,* Mecánica Computacional, Vol. XXII, (2003), 1953-1963.

[vi] Gigena, S.; Abud, D.; Binia, M. *Teoría de Cáscaras Afines: Desigualdades Básicas*, Mecánica Computacional, Vol. XXIII, (2004), 639-652.

[vii] Godoy, L.A., Prato, C.A., Flores, F.G., *Introducción a la Teoría de Elasticidad*, 2ª. Edición, Universitas, Editorial Científica Universitaria, Córdoba, 2000.

[viii] John, F. *Estimates for the Derivatives of the Stresses in a Thin Shell and Interior Shell Equations*, Comm. Pure Appl. Math. Nº 18, (1965), 235-267.

[ix] Koiter, W.T. *On the mathematical foundation of shell theory,* ´Proc. Int. Congr. of Mathematics, Nice, 1970, Vol. 3, Paris, (1971), 123-130.