

UN SISTEMA COMPUTACIONAL PARA LA SIMULACION DE INTERACCION DE DEFECTOS ESTRUCTURALES

Hector A. Monroy

*Departamento de Ingeniería Civil
Universidad de Puerto Rico, Mayagüez, PR 00681-9041, USA.*

Luis A. Godoy

*Departamento de Estructuras, Facultad de CEFyN
Universidad Nacional de Córdoba, Casilla de Correo 916, 5000 Córdoba, Argentina
y CONICET.*

RESUMEN

Se desarrolla una vía eficiente para calcular la interacción de imperfecciones. Para modelar el problema se ha empleado una solución de imperfecciones aisladas y un algoritmo alternador que toma en cuenta las interacciones entre el conjunto de problemas de una sola imperfección. El sistema computacional se ha desarrollado usando como plataforma AutoCAD, y un conjunto de herramientas en lenguaje de computadora LISP. El caso que inicialmente se ha estudiado es una placa plana elástica en un campo tensional uniforme y con degeneraciones en forma de agujeros circulares. Se estudian configuraciones de varios agujeros, y las soluciones se validan por comparación con resultados obtenidos mediante el método de los elementos finitos.

ABSTRACT

An efficient algorithm to evaluate the interaction between imperfections has been developed. The solution models isolated imperfections, together with an alternating algorithm to account for the interactions among a number of problems with one imperfection. The platform for the developments is AutoCAD, and the tools were developed in the computer language LISP. The case initially implemented is an elastic plate with under a uniform stress field and with circular holes. Several hole configurations have been studied, and the solutions are validated by comparison with finite elements.

INTRODUCCION

Este trabajo presenta el desarrollo de un sistema computacional apto para modelar interacciones entre objetos estructurales tomando la solución de cada uno de ellos por vez. Se intenta no tener que colocar todos los objetos simultáneamente en el modelo, sino realizar un proceso algorítmico de acoplamiento. Los objetos considerados son daños, imperfecciones o discontinuidades en el material.

El análisis de daños o discontinuidades localizadas en medios elásticos es de gran importancia en muchos problemas de ingeniería. En componentes estructurales de pared delgada se encuentran frecuentemente problemas de grietas, ranuras, distorsiones geométricas, etc. Existen también problemas en los cuales aparecen discontinuidades en la forma natural de un material, tal como medios porosos que presentan cantidades de agujeros de formas distintas. En ambos casos esos defectos o discontinuidades producen concentraciones de esfuerzos, que amplifican los esfuerzos aplicados a una cierta distancia.

Si consideramos por ejemplo, agujeros en un medio elástico, cada agujero individualmente produce una zona de tensiones que se concentra cerca del borde del agujero. Pero cuando existen dos o más agujeros, las zonas de

tensiones interactúan de modo que se redistribuyen los esfuerzos para satisfacer equilibrio. El comportamiento de agujeros aislados, así como el de una grieta aislada, o una distorsión geométrica determinada, son bien conocidos en la actualidad, y se pueden encontrar soluciones en libros de texto ^{4,6}. Sin embargo, cuando existen varias fuentes de concentración de tensión cercanas que interactúan, la respuesta no está tan bien desarrollada. El comportamiento del conjunto no es evidente, y tiene consecuencias directas sobre el estado último de la estructura o medio de que se trate, tanto sea por flujo plástico, rotura o fatiga. Por lo tanto, es fundamental poder realizar una estimación adecuada de los esfuerzos en problemas con interacción de fuentes de concentración de esfuerzos.

En este trabajo se presta especial atención al caso de agujeros como fuente de concentración de esfuerzos, pero la expectativa es generar un ambiente computacional adecuado para tratar también otro tipo de fuentes, como las mencionadas anteriormente. En la primera mitad del siglo se estudian concentraciones en agujeros circulares simples y en agujeros elípticos. Boresi y Chong ³ proponen una solución para un agujero circular de fácil implementación numérica. Simulaciones computacionales para arreglos arbitrarios de agujeros y grietas se han estudiado por Hu, Chandra y Huang ⁷; y por Fond, Flejou y Berthaud ⁵, quienes también estudiaron el impacto que producen grietas en lugares cercanos a los bordes de placas finitas. La interacción de agujeros a distancias muy cercanas entre sí fue estudiada por Zimmerman ¹²; ambos trabajos proponen fórmulas asintóticas con factores numéricos diferentes. El método de los elementos de borde se utilizó para el análisis de agujeros e inclusiones por Hwu y Liao ⁸ quienes han dado énfasis a los aspectos computacionales del problema.

Todos los trabajos mencionados anteriormente, excepto el de Hwu y Liao ⁸ asumen que los agujeros que interactúan son circulares. Entre los trabajos con interacciones de imperfecciones de formas diferentes a agujeros se encuentran el de Meisner y Kouris (1995), en el que se estudia la interacción de dos inclusiones elípticas a través del método de los valores de borde. El tema de los agujeros de forma elíptica fue desarrollado por Tsukrov y Kachanov ¹¹, que es el principal referente de este trabajo. Esos autores proponen una solución analítica para agujeros elípticos basado en una solución fundamental para un agujero circular. Ting, Chen y Yang ¹⁰ presentan un método de análisis de interacción de múltiples agujeros circulares en placas planas utilizando el algoritmo alternador. La estrategia de los autores es expresar las cargas radiales y tangenciales sobre la superficie del agujero en series de Fourier.

La información necesaria para modelar un problema de interacción entre agujeros es de tipo geométrica (forma y tamaño de los agujeros y localización en el espacio) y de tipo física (relaciones constitutivas del material), por lo que el manejo computacional de la información (captura, almacenamiento, edición, procesamiento de datos y presentación de resultados) es compleja y difícil de interpretar si no se dispone de herramientas que permitan la visualización espacial del problema y los resultados. Por ello, el desarrollo de un ambiente de trabajo computacional para manejar la información geométrica y mecánica de agujeros mediante una base de datos o algún sistema alternativo facilita el estudio del comportamiento de daños e imperfecciones y su interacción. La estrategia que se explora en este trabajo es la de evaluar el campo de esfuerzos debido a cada fuente de concentración de esfuerzos por separado, y producir acoplamiento mediante técnicas numéricas.

COMPONENTES FUNDAMENTALES DEL SISTEMA

El ambiente computacional desarrollado está compuesto de cinco partes fundamentales que interactúan entre sí para definir el sistema que analiza la interacción entre imperfecciones sometidas a esfuerzos en placas planas. Estas componentes son el motor mecánico, la plataforma gráfica, el modelo mecánico, la base de datos y el motor geométrico. La relación entre estos componentes se ilustra en la Figura 1.

Plataforma gráfica: Esta parte del sistema es usada como la interfaz entre el usuario, los motores mecánico y geométrico, y el modelo mecánico. Sobre ella se grafican los resultados obtenidos. La plataforma gráfica usada para desarrollar el modelo es AutoCAD 12 ¹ o superior. La ventaja de usar AutoCAD radica en que al ser un sistema CAD (Dibujo Asistido por Computadora) da una serie de herramientas que facilitan el desarrollo de la parte gráfica del sistema como la colocación de objetos (puntos, líneas, arcos y textos) en un espacio bidimensional o tridimensional sobre un sistema de referencia cartesiano, y su representación en la pantalla del computadora. Además permite la clasificación de los datos por medio de los atributos y de la posición.

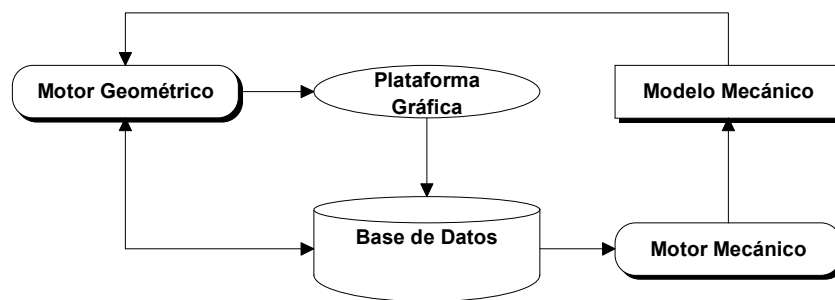


Figura 1. Componentes fundamentales del sistema.

Motor geométrico: El motor geométrico tiene una librería de funciones especializadas que son las encargadas de calcular todas las relaciones espaciales que se presentan entre los puntos con los que se discretiza tanto la placa como las imperfecciones, y que son necesarias para poder evaluar el modelo que se analiza. La razón de considerar al motor geométrico como un componente independiente es poder utilizarlo a pesar de que se cambien las demás componentes del sistema. Esto permite que el usuario se concentre en la implementación de funciones especializadas para solucionar un problema particular y utilice las funciones fundamentales que ya han sido implementadas. Este motor genera la discretización de la placa mediante la colocación de una matriz de puntos clasificados para poderse diferenciar de otros, genera los contornos discretizados de las imperfecciones a analizar mediante la colocación de puntos clasificados para poderse diferenciar de otros y asiste en la presentación de resultados mediante el despliegue de información numérica y gráfica.

Motor mecánico: El motor mecánico es una librería de funciones especializadas en las operaciones fundamentales que se realizan a nivel mecánico. Al considerarlo una componente independiente del sistema puede utilizarse a pesar de que se cambien las demás componentes del sistema, puede crecer adicionándole nuevas funciones o incluso puede ser implementado en otro lenguaje o en una combinación de lenguajes. Lo importante es respetar la conectividad que debe existir entre los componentes.

Base de datos: La base de datos es la componente del sistema encargado de dar consistencia, unicidad, persistencia, y relación entre los datos que se generan en el modelo, permitiendo su fácil manejo y almacenaje. Por ejemplo que el radio de un agujero no sea negativo o que un punto en el espacio bidimensional tenga coordenadas X y Y (consistencia). Al hacer referencia a un agujero en particular se nombrará por un número único que se le ha asignado (unicidad). La información espacial se puede almacenar en formato DWG (Propietario de AutoCAD) en un medio magnético (persistencia). La parte más importante en la base de datos es el modelo de datos. Por modelo de datos se entiende la estructuración de la información y los vínculos que existen entre sus diferentes partes.

Modelo Mecánico: El modelo mecánico es la solución con imperfecciones que se quiere probar. En el modelo esta implementado el algoritmo que describe la manera de solucionar el problema. El modelo mecánico hace uso de los motores geométricos y mecánicos, con lo cual se logra la modularidad del sistema, ya que las operaciones básicas se encuentran separadas del modelo como tal, lo que permite cambiar el modelo por otro. En el modelo mecánico está definida la solución fundamental que se utilizará para la solución.

SOLUCIÓN FUNDAMENTAL PARA ESFUERZOS EN UNA PLACA PLANA ELÁSTICA CON AGUJEROS CIRCULARES

En este trabajo se entiende por solución fundamental el procedimiento completo más simple que es necesario para solucionar un problema complejo. En el caso de esta investigación una solución fundamental se define como la relación mecánica que existe entre dos puntos conocidos los cuales están perfectamente identificados por su relación en el medio en el que se encuentran y por los factores externos que los afectan. Usando superposición de tensiones, se representa el problema de N agujeros en una placa infinita con una tensión σ_{ij}^{∞} en el infinito como la

superposición de la tensión uniforme σ_{ij}^{∞} y N subproblemas con un agujero cada uno. El esquema de superposición se ilustra en la Figura 2.

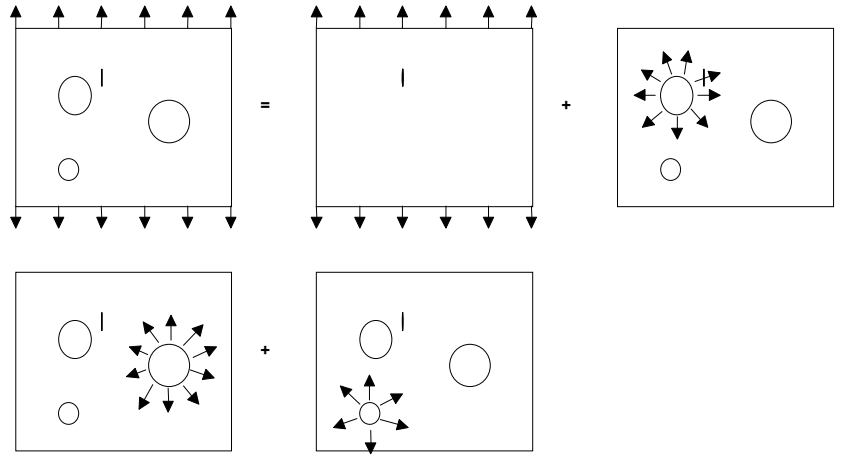


Figura 2. Subdivisión de un problema de N agujeros en N problemas de un agujero.

Para la condición inicial se discretiza la placa en puntos en los cuales se quieren calcular las tensiones σ_{xx} , σ_{xy} , σ_{yy} . Entre estos puntos deben encontrarse los puntos que conforman el perímetro de cada agujero. En la condición de tensión constante todos los puntos toman como valor inicial la tensión σ_{ij}^{∞} (tensiones alejadas de la zona de agujeros), inclusive los puntos que conforman los perímetros.

Basado en la condición de frontera, por equilibrio, se sabe que sobre el borde de cada agujero la tensión radial $\sigma_{\rho\rho}$ y la tensión cortante $\sigma_{\rho\theta}$ deben ser iguales a cero. Se toman las tensiones que actúan sobre los puntos que forman el perímetro del primer agujero y se transforman en $\sigma_{\rho\rho}$, $\sigma_{\rho\theta}$ y $\sigma_{\theta\theta}$, como se puede ver en la Figura 3.

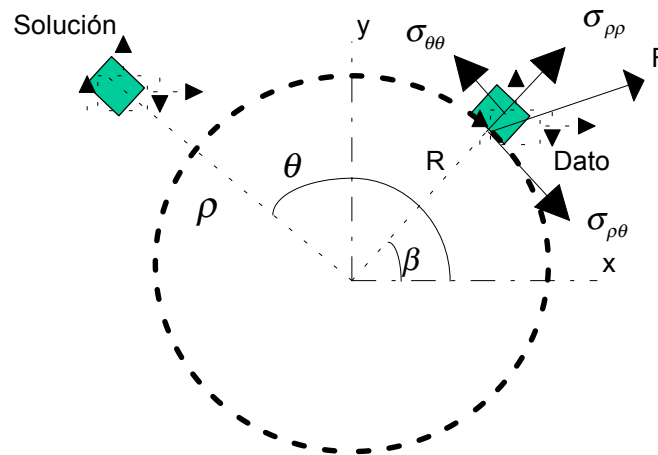


Figura 3. Cálculo de las tensiones sobre una placa plana de longitud infinita conocidas las tensiones que actúan sobre un punto de un agujero circular.

A continuación con $\sigma_{\rho\rho}$ y $\sigma_{\rho\theta}$ se encuentra una fuerza puntual F aplicada sobre el punto del perímetro que se está analizando con un área de influencia igual al arco asociado a ese punto. Por condición de equilibrio en el entorno del punto debe existir una fuerza igual y en sentido contrario que cancele a F de modo que se satisfaga la condición

de borde de tensión nula. Con esta fuerza y usando la solución fundamental se pueden encontrar las tensiones para todos los puntos en los que se ha discretizado la placa.

Se presentan a continuación las ecuaciones de la solución fundamental para agujeros circulares ¹¹:

$$\sigma_{\rho\rho} = \frac{F}{2\pi\rho}(1-r^2) \left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{k}{k+1} \cos(\varepsilon - \theta) + \frac{1}{T} [r \cos(\varepsilon - \beta) - 2 \cos(\varepsilon - \theta)] \\ + \frac{1}{T^2} [-\cos(\varepsilon - \theta) + 2r \cos(\varepsilon - \beta) - r^2 \cos(\varepsilon + \theta - 2\beta)] \end{array} \right\}$$

$$\sigma_{\rho\theta} = \frac{F}{2\pi\rho}(1-r^2) \left\{ \begin{array}{l} -2 \frac{k}{k+1} \sin(\varepsilon - \theta) - \frac{1}{T} r \sin(\varepsilon - \beta) \\ + \frac{1}{T^2} [\sin(\varepsilon - \theta) - 2r \sin(\varepsilon - \beta) + r^2 \sin(\varepsilon + \theta - 2\beta)] \end{array} \right\}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{F}{2\pi\rho} \left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{k}{k+1} (1-r^2) \cos(\varepsilon - \theta) \\ + \frac{1}{T} [r(3+r^2) \cos(\varepsilon - \beta) - 2(1+r^2) \cos(\varepsilon - \theta)] \\ + \frac{1-r^2}{T^2} [\cos(\varepsilon - \theta) - 2r \cos(\varepsilon - \beta) + r^2 \cos(\varepsilon + \theta - 2\beta)] \end{array} \right\}$$

donde los valores de T, r y k tienen el siguiente significado

$$T = 1 - 2r \cos(\beta - \theta) + r^2; \quad r = \frac{R}{\rho}; \quad k = \frac{3-\nu}{1+\nu}$$

para tensiones planas y $k = 3 - 4\nu$ para deformaciones planas.

ALGORITMO ALTERNADOR

Cuando el problema tiene más de un agujero el procedimiento descrito anteriormente se realiza de manera independiente sobre cada uno de los agujeros. Cada agujero al someterse a tensiones produce un conjunto tensorial sobre la placa, inclusive sobre el borde de cada uno de los demás agujeros. Sin embargo por condición de equilibrio la tensión radial $\sigma_{\rho\rho}$ y la tensión cortante $\sigma_{\rho\theta}$ deben ser iguales a cero en cada punto de los bordes. Por eso se deben tomar las tensiones que se generan sobre cada agujero, invertirlas y aplicar con ellas nuevamente la solución fundamental. Este procedimiento se realiza un número finito de veces hasta que las tensiones que distribuyen los agujeros sean cero o estén por debajo de un valor admisible. La solución final es la suma de todos los conjuntos tensoriales generados en el proceso iterativo.

Una manera general de medir el esfuerzo computacional que se realiza al ejecutar un algoritmo es a través de su complejidad. La complejidad puede definirse como el número de veces que el algoritmo debe realizar una serie de tareas que conforman su núcleo. Generalmente esta en función del número de datos que se deben procesar. La complejidad completa para una iteración de todo el sistema es $O(p t n + p t (n-1)n)$ que resulta igual a $O(p t n^2)$. Luego la complejidad del algoritmo alternador es cuadrática con respecto al número de agujeros n , lineal con respecto al número de puntos del sistema total t y lineal con el número de puntos en que se discretiza un agujero p .

RESULTADOS NUMERICOS

Tensiones entre dos agujeros

En este ejemplo se considera la variación de las componentes de tensiones en un punto intermedio entre dos agujeros circulares, dejando como variable la distancia que los separa. En la Figura 4 se muestra un esquema de la geometría que se investiga.

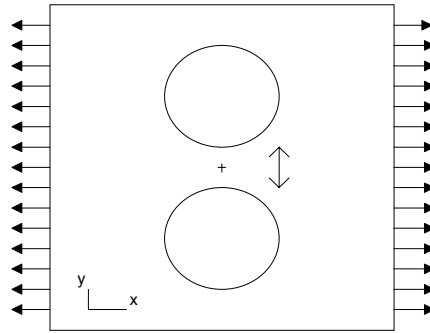


Figura 4. Localización de los dos agujeros y del punto sobre el que se han evaluado las tensiones.

Cada uno de los agujeros analizados se definió con un radio de 1.5 unidades y se discretizó en 200 unidades. Sobre la placa sólo se definió el punto intermedio, por lo que el número de veces que se aplicó la solución fundamental fue de $O(pn^2) = 200 * 1 * 4 = 800$, donde p es el número de divisiones que tiene un agujero, t la cantidad de puntos en que se discretizó la placa y n el número de agujeros.

En la Figura 5 se han graficado resultados para las componentes del tensor de tensiones tomando como variable la distancia entre los agujeros. Las tensiones han sido normalizadas considerando que la tensión en el infinito es una unidad de tensión y las distancias entre los agujeros se han medido en radios a partir de los centros de ambos.

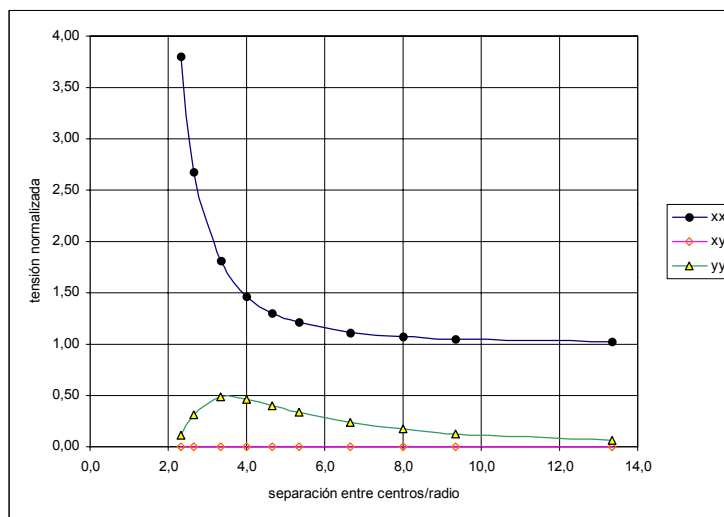


Figura 5. Tensiones de interacción entre dos agujeros.

Se puede observar que las tensiones sobre el eje XX crecen a medida que los agujeros se acercan. A menos de una distancia de 4 radios las tensiones crecen con un gradiente muy alto, mientras que a más de 13 radios las tensiones producidas por la concentración de los agujeros casi no tienen incidencia. Esto coincide con los estudios hechos por algunos autores que sugieren que a más de seis radios de un agujero la concentración de tensiones no tiene gran incidencia⁴.

El comportamiento de la tensión en el sentido YY en la medida que se acercan los agujeros tiene un interesante aumento de tensión entre los dos radios de distancia entre centros (totalmente juntos) y los tres radios.

Cuando se presenta la interacción de dos agujeros y su cercanía es suficiente para que pueda llegar a ser influenciada por este bulbo de presión se presenta el aumento de presión. Cuando los bulbos de presión de los dos agujeros coinciden el aumento de presión es el máximo ya que en el proceso de interacción de tensiones que cada agujero concentra y redistribuye se suman punto a punto. En la medida en que los dos agujeros se van alejando la interacción de la concentración de tensiones producida por los agujeros va disminuyendo por lo que las tensiones también disminuyen.

Tensiones en agujeros de tamaño diferente

En la Figura 6 se presenta, usando AutoCAD, la distribución espacial de los agujeros considerados. Los valores que se encuentran dentro de los círculos corresponden a los radios de los agujeros. La malla que se ve corresponde a los puntos que fueron usados durante el post procesamiento para generar los colores según la intensidad de la tensión. Para la simulación en el algoritmo de alternación se discretizó cada uno de los agujeros en 200 puntos y se refinó la malla de la placa en la zona que está rodeada por los agujeros. En total se tomaron 923 puntos para la placa. El número total de evaluaciones de la solución fundamental en una iteración fue de $O(p\pi n^2) = 2,953,600$. En el modelo se realizaron tres iteraciones, por lo que el número total de evaluaciones de la solución fundamental fue de 8,860,800.

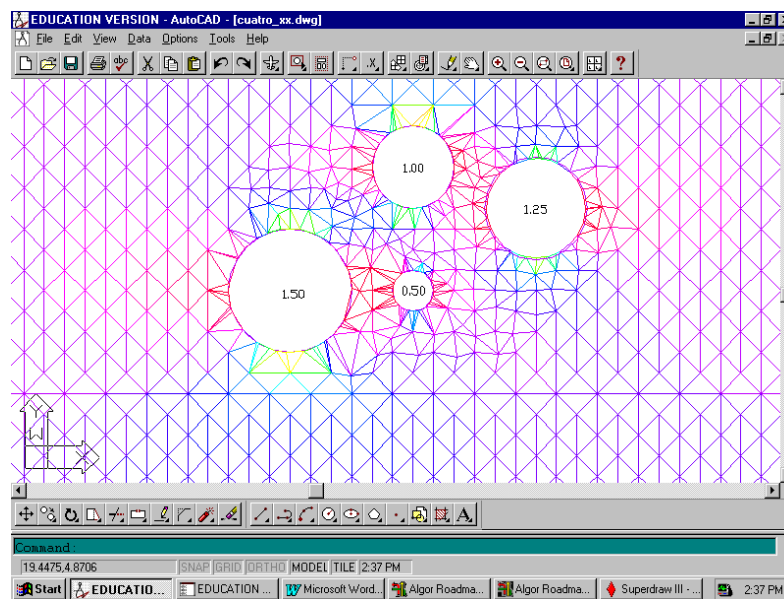


Figura 6. Esquema de la distribución de los agujeros. El número en el interior de cada agujero representa el radio.

Los resultados de tensiones en el mismo sentido de la carga aplicada se muestran en la Figura 7. Sobre el agujero superior se encuentra la zona de mayor concentración de esfuerzos tensionales, seguido por la parte superior de los agujeros que están más a la derecha y a la izquierda. Las zonas de mayor concentración negativa (compresión) está entre la pareja de agujeros superior y entre la pareja de agujeros inferior.

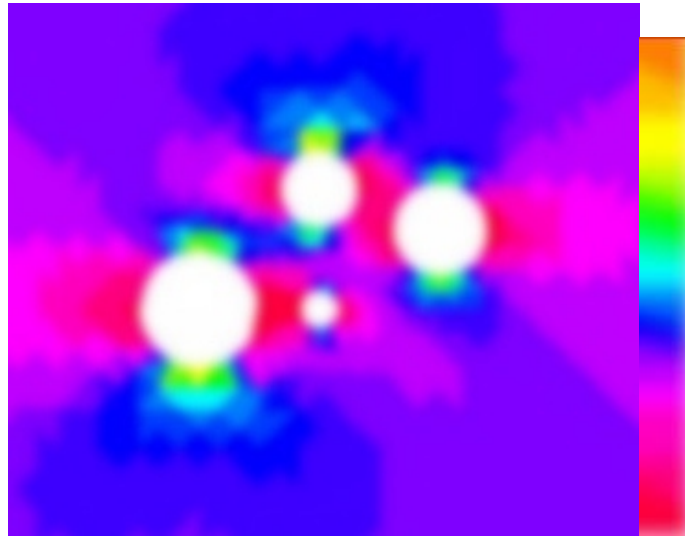


Figura 7. Concentración de tensiones en la dirección X usando el algoritmo de alternación.

CONCLUSIONES

En base a los estudios realizados, se pueden formular algunas conclusiones:

1. Es posible simular la interacción de esfuerzos debidos a varios agujeros en un ambiente integrado; esto es utilizando recursos limitados, desarrollar un ambiente computacional completo en el que se puedan obtener resultados satisfactorios.
2. La complejidad del algoritmo alternador implementado es de orden $O(pnt^2)$, por iteración, donde p es el número promedio en el que se ha discretizado un agujero, t el número en el que se ha discretizado la placa y n el número de agujeros.
3. La convergencia de la solución se logra con un número relativamente pequeño de iteraciones que depende de la distancia entre los agujeros y de la cantidad de los mismos. Para un agujero es necesaria sólo una iteración, para dos agujeros con tres iteraciones se llegó a una convergencia razonable a distancias variables (variación de menos del 1%) y con cuatro agujeros se logró convergencia con cuatro iteraciones. Los resultados para varios agujeros han sido validados comparándolos con resultados numéricos obtenidos mediante el método de elementos finitos.
4. El problemas de dos agujeros se observa que la interacción de la concentración de tensiones depende de la distancia entre ellos y de la relación de tamaño entre ellos. A distancias más próximas hay mayor interacción y los agujeros de mayor tamaño tienen más influencia sobre los pequeños que los pequeños sobre los grandes.
5. En problemas en los que el área de agujeros se mantiene constante en una zona determinada (relación de vacíos igual) los niveles de concentración de tensiones varían significativamente dependiendo del tamaño de los agujeros, de su distribución y de la cantidad.
6. El método de solución implementado en este trabajo tiene relación con el método de los elementos de borde. En general, los métodos de elementos de borde también requieren del uso de una solución fundamental, pero la precisan tanto en esfuerzos como en desplazamientos. En el caso presente sólo se usó la solución fundamental en esfuerzos. Los métodos de elementos de borde incluyen todos los agujeros en un sólo sistema algebraico, para el que sólo se discretiza el contorno del agujero y el contorno exterior de la placa. Finalmente los elementos de contorno sólo proveen la respuesta en los elementos del dominio en el que se la requiera, tal como se realiza en el presente algoritmo alternador.

REFERENCIAS

- [1] AutoDESK AutoCAD. *AutoCAD Versión 12, 13, 14, 2000*. AutoDesk. (1999).
- [2] AutoDesk AutoLISP. *AutoLISP Programmer's Reference Manual*. AutoDesk. (1992).
- [3] Boresi, A. P. and Chong K. P.. *Elasticity in Engineering Mechanics*. Elsevier. New York. (1987).
- [4] Boresi, A. P., Schmidt, R. J. and Sidebottom O. M.. *Advanced Mechanics of Materials*. John Wiley. New York. (1993).
- [5] Fond, C., Flejou, J.-L. and Berthaud, Y.. Interaction between cracks and cavities. *Journal of Applied Mechanics* 67. 19-31. (1995).
- [6] Godoy L. A.. *Thin-Walled Structures With Structural Imperfections, Analysis and Behavior*. Pergamon. Oxford. (1996).
- [7] Hu, K. X., Chandra, A. and Huang, Y.. Multiple Void-Crack Interaction. *International Journal of Solids and Structures* 30. 2887-2904. (1993).
- [8] Hwu, C. and Liao, C. Y.. A special boundary element for the problems of multi-holes, crack and inclusions. *Computers and Structures* 51. 23-31. (1994).
- [9] Meisner M. J. and Kouris D. A.. Interaction of two elliptic inclusions. *International Journal of Solid Structures*. 32, No. 3-4. 451-466. (1995).
- [10] Ting, K., Chen, K. T., and Yang, W. S.. Applied alternating method to analyze the stress concentration around interacting multiple circular holes in an infinite domain. *International Journal of Solids and Structures* 36. 533-556. (1998).
- [11] Tsukrov I., and Kachanov M.. Stress concentrations and microfracturing patterns in a brittle elastic solid with interacting pores of diverse shapes. *International Journal of Solids and Structures* 34, 1473-1489. (1997).
- [12] Zimmerman R. W.. Stress singularity around two nearby holes. *Mechanics Research Communications* 15, 87-90. (1988).