

## COEFICIENTE DE PANDEO PARA PLACAS ANULARES CON ESPESOR VARIABLE

**Patricia M. Ciancio**

*Departamento de Ingeniería Civil, Facultad de Ingeniería  
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires  
Av. Del Valle 5737, 7400 Olavarría, Argentina*

### RESUMEN

En este trabajo, se presenta una solución aproximada para hallar el coeficiente de pandeo elástico utilizado en la determinación de cargas críticas, para placas delgadas anulares de espesor variable, y con su borde exterior empotrado. Siendo el tema de interés en ingeniería aeroespacial, civil, naval, entre otras.

La propuesta consiste en aplicar el método de Rayleigh Ritz optimizado, para calcular el coeficiente de pandeo como una función de otros parámetros, de modo de minimizar el factor de pandeo para la determinación de cargas críticas.

Los resultados obtenidos fueron contrastados con valores que aparecen en la literatura, y mostraron una aproximación adecuada.

### ABSTRACT

In this work, an approximate solution is presented to find the coefficient of elastic buckling, used in the determination of critical loads, for thin annular plates of variable thickness, and with its clamped external edge. Being the topic of interest in aerospace, civil, naval engineering, among others.

The proposal consists on applying the method of Rayleigh Ritz optimized, to calculate the coefficient of buckling a function of other parameters, in way of minimizing the factor of buckling for the determination of critical loads.

The obtained results were contrasted with values that appear in the literature, and they showed an appropriate approach.

### INTRODUCCION

La determinación de cargas críticas en placas anulares es un problema definitorio en el diseño de estructuras aplicadas en ingeniería civil, industrial, naval, aeronáutica, cuestión por la cual, resulta de interés.

El tema ha sido tratado por diversos autores, en nuestro país se ha producido una importante contribución, así P. A. A. Laura et. al.<sup>1, 2, 3, 4</sup>, trata el pandeo, en conjunto con el de vibraciones, con distintas condiciones de apoyo y espesor variable con discontinuidad, aplicando el método de Rayleigh Ritz optimizado. Una excelente fuente se da en la referencia<sup>5</sup>.

Este método fue planteado por los profesores Charles W. Bert<sup>6</sup> y Robert Schmidt<sup>7</sup>, y consiste en incluir en la función aproximante un parámetro indeterminado, que permite una minimización de la solución con respecto al parámetro, conduciendo a valores más precisos. Los autores Dyka y Carney III<sup>8</sup>, han desarrollado una solución exacta para placas anulares ortótropas de espesor variable, con vigas de borde, dando valores de cargas críticas. Por otra parte, otros autores<sup>9</sup>, recurren a una técnica para la obtención de la función aproximante, denominada como

pb-2, por tratarse en la combinación de funciones con polinomios bidimensionales; si bien proporciona generalidad, resulta en una pérdida de la simplicidad del método de Rayleigh Ritz optimizado.

En este trabajo, se determina el coeficiente de pandeo que conduce a la carga crítica para placas anulares de espesor variable con continuidad sometidas a presión exterior, aplicando el método de Rayleigh Ritz optimizado.

## APLICACIÓN DEL METODO DE RAYLEIGH RITZ OPTIMIZADO

La tradicional aplicación de la metodología, a partir de la expresión de la energía de deformación de la placa anular, consiste en expresar la solución del funcional gobernante en términos de una sumatoria de funciones coordenadas, cada una de las cuales debe satisfacer al menos, las condiciones de borde esenciales del problema, y multiplicados por una constante arbitraria  $A_j$ . El funcional es minimizado con respecto a cada constante  $A_j$  y luego de esto resulta un sistema de ecuaciones lineales en  $A_j$ .

A partir de estas raíces, que son cotas superiores con respecto a los resultados exactos, por inclusión de un parámetro exponencial indeterminado, en las funciones coordenadas, es posible optimizar cada autovalor por la minimización de él con respecto a cada uno de los coeficientes de la combinación. Obviamente, en un problema de campo, se minimiza el funcional con respecto al parámetro exponencial.

Partiendo de la expresión de la energía de deformación de una placa anular:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \iint D \cdot \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 - \frac{2 \cdot (1-\mu)}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] \cdot r \cdot dr \cdot d\theta + \frac{1}{2} \cdot \iint N_r \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \quad (1)$$

Siendo:  $D$ : rigidez de la placa a flexión

$N_r$ : esfuerzo radial

$w$ : amplitud del desplazamiento

$r, \theta$ : coordenadas polares

$\mu$ : coeficiente de Poisson

Por simetría radial:

$$w = w(r) \quad (2)$$

$$r = b \cdot x \quad (3)$$

$$\frac{dw}{dr} = \frac{1}{b} \cdot \frac{dw}{dx} \quad (4)$$

Donde:

$b$  = radio exterior

$x = r/b$  coordenada adimensional

Por lo tanto, la expresión del funcional para la placa anular con simetría radial resulta:

$$U = \pi \cdot \left\{ \int \frac{D}{b^2} \cdot \left[ \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 \cdot x + \frac{1}{x} \cdot \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 + 2 \cdot \mu \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} \cdot \frac{dw}{dx} \right] \cdot dx + \int N_r \cdot \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \cdot x \cdot dx \right\} \quad (5)$$

Se supone para la función  $w$ , una expresión polinómica, que aproxime la deformada de la placa bajo la acción de las cargas actuantes en su plano medio.

$$w_{ap} = \sum_{j=1} A_{j-1} \cdot (\alpha_{j-1} \cdot x^\gamma + \beta_{j-1} \cdot x^2 + 1) \cdot x^{j-1} \quad (6)$$

en la cual,  $A_{j-1}$ : coeficientes desconocidos;  $\gamma$ : parámetro indeterminado

$\alpha_{j-1}$  y  $\beta_{j-1}$ : coeficientes que dependen de las condiciones esenciales de borde

El producto de los dos factores que acompañan a los coeficientes  $A_{j-1}$ , representan la función de Ritz. Tomando dos términos para la función  $w_{ap}$ ; cada uno de ellos deberá cumplir con las condiciones esenciales de borde, esto es:

$$w_{ap} \Big|_{x=1} = 0, \quad \frac{dw_{ap}}{dx} \Big|_{x=1} = 0 \quad (7)$$

Para el caso de borde externo empotrado.

Planteando dichas condiciones para los dos términos de la función aproximada  $w_{ap}$ , resultan los coeficientes  $\alpha_{j-1}$ , y  $\beta_{j-1}$ , que serán función del parámetro indeterminado  $\gamma$ .

Con respecto al término de la integral (5) que involucra  $N_r$ , se obtiene a partir de las expresiones del estado tensional dadas por los autores Dyka y Carney III<sup>8</sup>, habiéndose realizado las modificaciones necesarias para representar a las placas anulares isótropas, bajo acción de la presión exterior que se analizan en este trabajo.

La ley de variación del espesor es la mencionada en el mismo trabajo<sup>8</sup>, siendo:  $h = H \cdot r^p$ , con  $H$  y  $p$ : constantes

$$N_r = N_{cr} \cdot (C_1 \cdot x^{p+x1-1} + C_2 \cdot x^{p+x2-1}) \quad (8)$$

$$\text{en la cual: } x1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 4 \cdot (1 - p \cdot \mu)}}{2}, \quad x2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 + 4 \cdot (1 - p \cdot \mu)}}{2} \quad (9)$$

$$C_1 = \frac{k^{x2-1}}{k^{-1} \cdot (k^{x2} - k^{x1})}, \quad C_2 = \frac{-k^{x1-1}}{k^{-1} \cdot (k^{x2} - k^{x1})}, \quad k = \frac{r_i}{r_e} = \frac{\text{radio interior}}{\text{radio exterior}} = \frac{a}{b} \quad (10)$$

$$\text{Llamando } D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)} \rightarrow D = \frac{E \cdot H^3 \cdot r^{3p}}{12 \cdot (1 - \mu^2)} \quad (11)$$

$$\text{En función del valor adimensional } x: D = \frac{E \cdot H^3 \cdot b^{3 \cdot p}}{12 \cdot (1 - \mu^2)} \cdot x^{3 \cdot p} \quad (12)$$

$$\text{Con } D_e = \frac{E \cdot h_e^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)}, \quad \rightarrow D = D_e \cdot x^{3 \cdot p} \quad (13)$$

$$\text{Pero llamando } N_{cr} = \frac{D_e \cdot \lambda}{b^2}, \quad \text{la expresión (8) será } N_r = \frac{D_e \cdot \lambda}{b^2} \cdot (C_1 \cdot x^{p+x1-1} + C_2 \cdot x^{p+x2-1}) \quad (14)$$

Por lo anterior, y para el caso analizado de borde empotrado, para el cual el tercer término del corchete de la expresión (5) se anula ; el funcional de energía será:

$$U = \pi \cdot \left\{ \frac{D_e}{b^2} \cdot \int_k \left[ \frac{I}{x} \cdot \left( \frac{d w_{ap}}{d x} \right)^2 + x \cdot \left( \frac{d^2 w_{ap}}{d x^2} \right)^2 \right] \cdot x^{3 \cdot p} \cdot dx + \right. \\ \left. - \frac{D_e \cdot \lambda}{b^2} \cdot \int_k (C_1 \cdot x^{p+x1-1} + C_2 \cdot x^{p+x2-1}) \cdot \left( \frac{d w_{ap}}{d x} \right)^2 \cdot x \cdot dx \right\} \quad (15)$$

Introduciendo las derivadas respectivas de la función aproximante con dos términos; por condición de minimización se procede a derivar el funcional (15) con respecto a las constantes  $A_j$ , obteniendo dos ecuaciones homogéneas. La condición para que el sistema tenga solución distinta de la trivial será que el determinante formado por la matriz de los coeficientes sea nulo. Esto conduce a una ecuación característica . La raíz menor representa el coeficiente de pandeo  $\lambda$ .

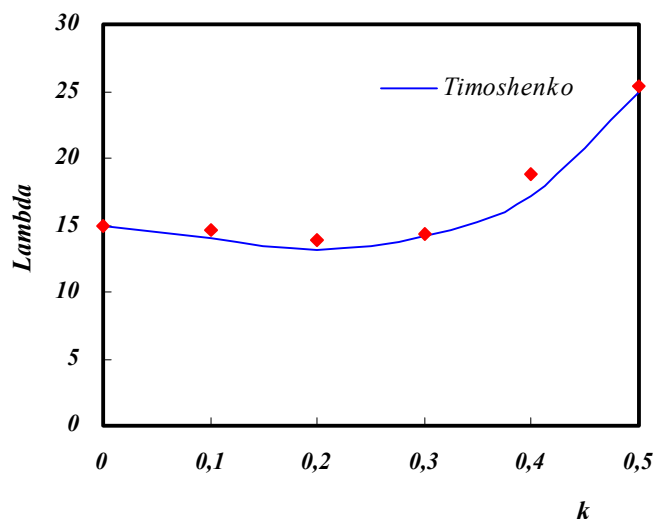
### CASOS ANALIZADOS Y RESULTADOS OBTENIDOS

En primer lugar, se presenta el caso clásico que trata S. Timoshenko<sup>10</sup>, en la tabla 1 se transcriben los valores obtenidos en este trabajo y la serie que aparece con puntos es la que los identifica, en el gráfico 1 .

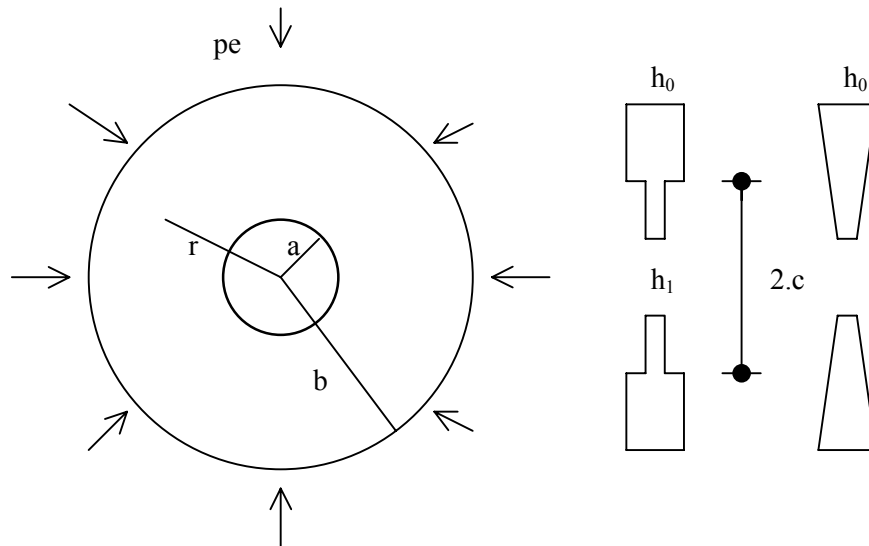
**TABLA 1. Valores del coeficiente  $\lambda$  para placa anular de espesor constante sometida a presión exterior,**

$\mu = 1/3$	$K = r_i / r_e$					
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\lambda$	14.911	14.664	13.82	14.33	18.86	25.32

**Gráfico 1. Valores del Coef. Lambda . Placa con borde externo empotrado**



A los fines de poder efectuar una comparación de resultados, se tomó una aproximación del espesor, de acuerdo a la ley de variación del espesor  $h = H r^p$ , en forma continua, con datos de otros autores que obtuvieron valores del parámetro de pandeo elástico  $\lambda$  para una ley de variación discontinua, y constante por tramos. según el esquema que aparece a continuación:



Suponiendo que para  $r = \frac{a+c}{2}$  es  $h_r = h_1$

y para  $r = b \Rightarrow h_r = h_0$  resulta

$$h_1 = h \cdot \left( \frac{a+c}{2} \right)^p$$

$$h_0 = h \cdot b^p \Rightarrow \frac{h_1}{h_0} = \left( \frac{a+c}{2 \cdot b} \right)^p$$

aplicando logaritmo:  $\log \frac{h_1}{h_0} = p \cdot \log \left( \frac{a+c}{2 \cdot b} \right)$

$$p = \frac{\log \frac{h_1}{h_0}}{\log \left( \frac{a+c}{2 \cdot b} \right)} \quad \text{o bien} \quad p = \frac{\log \frac{h_1}{h_0}}{\log \left( \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{a}{b} + \frac{c}{b} \right) \right)} \quad (16)$$

En tabla 2, aparecen los valores del exponente  $p$ , calculados con expresión (16), los cuales se corresponden con el espesor variable con continuidad. Los valores de las relaciones  $r_i/r_e=a/b$  y  $c/b$  fueron tomadas de la Referencia (5). Como se puede ver en el esquema de la placa anular,  $c$  representa el radio para el cual se presenta la discontinuidad.

En tabla 3, los parámetros de pandeo se corresponden con los exponentes de la tabla 2.

**TABLA 2. Valores del exponente  $p$  en función de las relaciones  $c/a$  y  $a/b$**

K= $r_i/r_e$	Valores de $c/a$						
	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
0.1	0.11762	0.13864	0.16096	0.18533	0.21255	0.24352	0.27945
0.2		0.16096	0.18533	0.21255	0.24352	0.27945	0.32192
0.3			0.21255	0.24352	0.27945	0.32192	0.37325
0.4				0.27945	0.32192	0.37325	0.43682
0.5					0.37325	0.43682	0.51799
0.6						0.51799	0.62562
0.7							0.77566

**TABLA 3. Valores del coeficiente  $\lambda$  para placas anulares con borde exterior empotrado**

K= $a/b$	VALORES DE $c/a$							
	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	
0.1	(1)	12,084	11,871	11,088	10,999	10,263	9,889	9,086
	(2)	12,951	11,879	11,275	10,808	10,355	9,810	9,111
0.2	(1)		12,416	11,795	10,963	9,838	9,075	8,808
	(2)		12,572	11,788	11,162	10,536	9,819	9,042
0.3	(1)			14,018	13,093	12,443	10,876	9,600

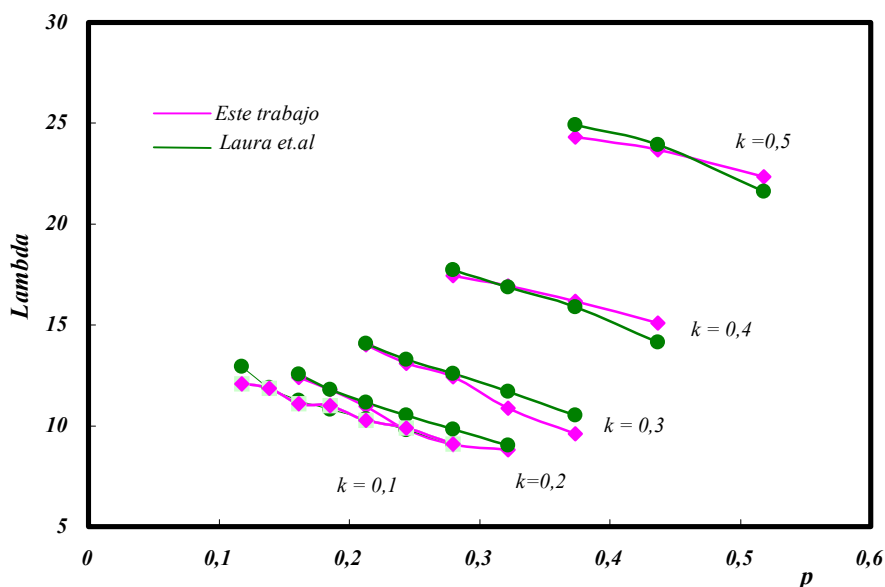
	(2)	14,084	13,304	12,598	11,712	10,525
0.4	(1)		17,445	16,957	16,183	15,100
	(2)		17,747	16,869	15,897	14,143
0.5	(1)			24,298	23,686	22,349
	(2)			24,934	23,921	21,593

(1) Valores obtenidos con el método de Rayleigh-Ritz optimizado para espesor variable con continuidad

(2) Valores obtenidos por Dr. Ing. Laura et.al para espesor variable con discontinuidad

El gráfico 2, representa los valores del parámetro  $\lambda$ , para el rango de variación que presenta el exponente p.

Gráfico 2. Valores del Coef. Lambda .Placa anular con borde externo empotrado.



### CONCLUSIONES

- La ley de variación del espesor empleada, en conjunto con el método utilizado, muestran una muy buena aproximación en la obtención del parámetro de pandeo elástico para placas anulares con espesor variable con continuidad, que están sometidas a compresión exterior, actuando en su plano medio. Para el caso resuelto en la literatura clásica, que corresponde a placa anular con espesor constante, prácticamente coinciden.
- Para una misma relación entre  $r_i/r_e$  cuando la discontinuidad se presenta en un gran porcentaje sobre la dirección radial de la placa, la rigidez que opone es menor, por lo tanto el parámetro de pandeo nos indica que se alcanzará la carga crítica elástica para un valor de carga aplicada en el plano medio menor.

Se habla de discontinuidad, dado que la variación según la ley aplicada  $h = H \cdot r^p$  sigue ese cambio pero en forma más gradual. Para cambios muy abruptos, y, cuando la rigidez que predomina es pequeña, en sentido radial, estamos ante los casos más desfavorables ante la falla por pandeo.

**BIBLIOGRAFIA**

- [1] P. A. A. Laura, J. C. Paloto and R. D. Santos. “*A note on the vibration and stability of a circular plate elastically restrained against rotation*”. Journal of Sound and Vibration, **41**, 177-180. (1975).
- [2] D. R. Avalos and P. A. A. Laura. “*A note on transverse vibrations of annular plates elastically restrained against rotation along the edges*”. Journal of Sound and Vibration, **66 (1)**, 63-67. (1979).
- [3] P. A. A. Laura, G. M. Ficcadenti and S. I. Alvarez. “*Effect of geometric boundary disturbances on the natural frequencies and buckling loads of vibrating clamped circular plates*”. Journal of Sound and Vibration, **126**, 67-72. (1988).
- [4] P. A. A. Laura, R. H. Gutiérrez, V. Sonzogni and S. Idelsohn. “*Buckling of circular, annular plates of non-uniform thickness*”. Institute of Applied Mechanics, **96 (6)**. (1996).
- [5] P. A. A. Laura, L. Ercoli and R. Gutierrez. “*Optimized Rayleigh-Ritz Method*”. Institute of Applied Mechanics. Monograph, pp. 34-95. (1995).
- [6] C. W. Bert. “*Improved technique for estimating buckling loads*”. A.S.C.E. Journal of Engineering Mechanics, **110**, pp.1655-1665. (1984).
- [7] R. Schmidt. “*A way of estimating lower bounds for eigenvalues in buckling and vibrations problems*”. Industrial Math., **33**, pp. 163-167. (1983).
- [8] C. T. Dyka and J. F. Carney III. “*Vibrations of annular plates of variable thickness*”. Journal of the Mechanics Engineering. A.S.C.E., Vol. **105**- EM3, pp. 361-370. (1979).
- [9] C. M. Wang, Y. Xiang, S. Kitipornchai, K. M. Liew. “*Axisymmetric buckling of circular Mindlin plates with ring supports*”. Journal of Structural Engineering, Vol. **119**, No. **3**, pp. 782-793. (1993).
- [10] S. Timoshenko. “*Teoría de la Estabilidad Elástica*”. Editorial Ediar. (1961).