

ANÁLISE NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS DE FLUIDOS INCOMPRESSÍVEIS INCLUINDO PROBLEMAS COM SUPERFÍCIES LIVRES USANDO MEF

Paulo Roberto de Freitas Teixeira

Fundação Universidade Federal do Rio Grande, Depto de Materiais e Construção

96203-000 - Rio Grande, RS, Brasil

e-mail: dmcrft@cpd.furg.br

Armando Miguel Awruch

Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil

90035-190 - Porto Alegre, RS, Brasil

e-mail: awruch@adufres.ufrgs.br

RESUMO

Neste trabalho apresenta-se um algoritmo de simulação numérica de escoamentos de fluidos incompressíveis utilizando o método de elementos finitos. As equações diferenciais governantes do fluido são discretizadas no tempo e no espaço por um método semi-implícito de Taylor-Galerkin de dois passos usando elementos tetraédricos lineares. A equação de Poisson para a pressão é solucionada implicitamente pelo método dos gradientes conjugados. Adota-se uma descrição arbitrária lagrangeana euleriana (ALE), sendo que o movimento da malha está baseado em um esquema de suavização das velocidades. Alguns exemplos de validação são apresentados, incluindo o problema clássico de movimento de uma onda solitária. O código está escrito na linguagem FORTRAN e é otimizado para obter-se as vantagens do processamento vetorial existentes nos atuais supercomputadores.

ABSTRACT

A numerical algorithm to simulate incompressible flows employing the finite element method is presented in this work. Space and time discretization of the complete set of differential equations are carried out using a semi-implicit two-step Taylor-Galerkin scheme and linear tetrahedral element. The Poisson equation for pressure is solved by the conjugated gradient method. An Arbitrary Lagrangean Eulerian (ALE) description is adopted, in which the mesh movement is based on a velocity smoothing scheme. Some numerical examples are presented, including the classic problem of movement of a solitary wave. The code is written in FORTRAN language and is optimised in order to take advantages of vectorial processors existing in modern supercomputers.

INTRODUÇÃO

A análise de escoamentos viscosos incompressíveis através do MEF foi introduzida por Oden e Welford [1] através dos métodos mistos, os quais utilizam diferentes funções de interpolação para as componentes de velocidade e para a pressão, com o objetivo de evitar modos espúrios de pressão. Os chamados métodos fracionados foram introduzidos por Chorin [2] e após foram apresentados por diversos outros autores tais como Donea *et al.* [3] e Kim e Moin [4]. Nesses métodos, primeiramente calcula-se o campo de velocidades com a equação de movimento, omitindo os gradientes de pressão. Calcula-se a pressão através de uma equação de Poisson, usando as componentes de velocidade aproximadas obtidas do passo anterior e, finalmente, o campo de velocidades é corrigido usando a pressão obtida pela equação de Poisson. Os esquemas que analisam os escoamentos viscosos incompressíveis desta forma, permitem o uso de funções de interpolação de mesma ordem para a pressão e para as componentes de velocidade. Esses métodos foram empregados por muitos autores tais como Gresho *et al.* [5], Ren e Utnes [6] e Kovacs e Kawahara [7], entre outros.

O código do presente trabalho permite a simulação de escoamentos de fluidos incompressíveis utilizando um método fracionado de Taylor-Galerkin de dois passos para discretizar no tempo e no espaço as equações de Navier-Stokes [8]. Adota-se um elemento tetraédrico linear, o qual tem a vantagem de se adaptar aos domínios de geometrias complexas e é um elemento de ótima eficiência

computacional. Uma formulação arbitrária lagrangeana euleriana (ALE) é utilizada para permitir a solução de problemas que envolvem grandes movimentos relativos entre corpos e superfícies.

O MÉTODO FRACIONADO DE TAYLOR-GALERKIN DE DOIS PASSOS

As equações que governam o escoamento de fluidos

As equações fundamentais que governam o escoamento dos fluidos são as equações de Navier-Stokes compostas pelas equações da continuidade, da quantidade de movimento e da energia, expressas, na descrição arbitrária lagrangeana euleriana (ALE), da forma:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \quad (1)$$

$$\frac{\partial(U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(f_{ij})}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \rho g_i = w_j \frac{\partial(U_i)}{\partial x_j} \quad (i,j=1,2,3) \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho e v_i)}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = w_j \frac{\partial(\rho e)}{\partial x_j} \quad (3)$$

onde $\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$ são as componentes do tensor desviador, μ e λ são as viscosidades cinemática de cisalhamento e volumétrica, respectivamente, δ_{ij} é o delta de Kroenecker. $U_i = \rho v_i$ são as variáveis de campo e $f_{ij} = v_j (\rho v_i) = v_j U_i$. Nas Eq. (1) a (3), v_i é o vetor de velocidade do fluido, w_i é o vetor de velocidade da malha de elementos finitos, c é a velocidade do som, p é a pressão termodinâmica, ρ é a massa específica do fluido, T é a temperatura, $e = Cv T$ é a energia interna específica, Cv é o calor específico a volume constante, k é a condutividade térmica e g_i é a aceleração da gravidade. As Eq. (1) a (3), acrescidas das condições de contorno e iniciais, definem unicamente o problema a ser solucionado. Em problemas de escoamentos de fluidos incompressíveis a equação da energia, Eq. (3), pode ser solucionada de forma independente, após o campo de velocidades ser estabelecido.

Discretização no tempo e no espaço das equações governantes

A discretização no domínio do tempo é realizada através de uma expansão em série de Taylor das variáveis U_i . Primeiramente, determina-se as variáveis U_i no instante $t+\Delta t/2$ ou $n+1/2$ da seguinte forma [8]:

$$\tilde{U}_i^{n+1/2} = U_i^n - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial f_{ij}^n}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} + \frac{\partial p^n}{\partial x_i} - w_j^n \frac{\partial U_i^n}{\partial x_j} \right) \quad (i,j=1,2,3) \quad (4)$$

onde, a variável $\tilde{U}_i^{n+1/2}$ não considera o termo de variação de pressão $\Delta p = p^{n+1} - p^n$. A discretização no tempo da equação da continuidade, Eq. (1), permite o cálculo de Δp , resultando na seguinte expressão:

$$\Delta p = \frac{1}{c^2} \Delta p = -\Delta t \left[\frac{\partial \tilde{U}_i^{n+1/2}}{\partial x_i} - \frac{\Delta t}{4} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta p}{\partial x_i} \right] \quad (i=1,2,3) \quad (5)$$

As variáveis de campo em $n+1/2$, corrigidas com o termo de variação de pressão, são expressas da forma:

$$U_i^{n+1/2} = \tilde{U}_i^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{4} \frac{\partial \Delta p}{\partial x_i} \quad (i=1,2,3) \quad (6)$$

O passo seguinte consiste em determinar as variáveis U_i no instante $t+\Delta t$ ou $n+1$ da seguinte maneira:

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \Delta t \frac{\partial U_i^{n+1/2}}{\partial t} = U_i^n - \Delta t \left(\frac{\partial f_y^{n+1/2}}{\partial x_j} \frac{\partial \tau_y^{n+1/2}}{\partial x_j} + \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial x_i} - w_j^{n+1/2} \frac{\partial U_i^{n+1/2}}{\partial x_i} \right) \quad (i=1,2,3) \quad (7)$$

Na discretização espacial, aplica-se a técnica padrão de Galerkin, utilizando para as variáveis no instante de tempo $t+\Delta t/2$ ou $n+1/2$ uma função de interpolação constante no elemento P_E e para as variáveis em t e $t+\Delta t$ ou n e $n+1$, respectivamente, uma função de interpolação linear N . Aplicando este procedimento nas Eq. (4) a (7), tem-se [8]:

$$\Omega_E^{n+1/2} \tilde{\bar{U}}_i^{n+1/2} = C \bar{U}_i^n - \frac{\Delta t}{2} \left[L_j (\bar{v}_y^n - \bar{\tau}_y^n) + L_i \bar{p}^n - T \bar{U}_i^n \right] \quad (8)$$

$$\left(\tilde{M} + \frac{\Delta t^2}{4} H \right) \Delta \bar{p} = \Delta t \left(L_j^T \tilde{\bar{U}}_i^{n+1/2} + f_a \right) \quad (9)$$

$$\bar{U}_i^{n+1/2} = \tilde{\bar{U}}_i^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{4 \Omega_E} L_i \Delta \bar{p} \quad (10)$$

$$M^{n+1} \bar{U}_i^{n+1} = M^n \bar{U}_i^n + \Delta t \left[L_j^T (\bar{v}_y^{n+1/2} - \bar{w}_j^{n+1/2} \bar{U}_i^{n+1/2}) - Q_j \bar{\tau}_y^n + Q_i (\bar{p}^n + \Delta \bar{p}/2) + S_{b_i} \right] \quad (11)$$

onde as variáveis com barra superior que estão nos instantes n e $n+1$ representam valores nodais, enquanto que aquelas que estão no instante $n+1/2$ representam valores constantes no elemento. As matrizes e vetores que envolvem as Eq. (8) a (11) são resultantes das integrais de volume e de superfície obtidas pela aplicação da técnica padrão de Galerkin [8], e que vem dada por:

$$\Omega_E^{n+1/2} = \int_{C^{n+1/2}} P_E^T P_E d\Omega \quad C = \int_{C^n} P_E^T N d\Omega \quad L_i = \int_{C^n} P_E^T \frac{\partial N}{\partial x_i} d\Omega \quad T = \int_{C^n} P_E^T N \bar{w}_i \frac{\partial N}{\partial x_i} d\Omega$$

$$\tilde{M} = \int_{C^{n+1/2}} N^T \left(\frac{1}{c^2} \right) N d\Omega \quad H = \int_{C^{n+1/2}} \frac{\partial N^T}{\partial x_i} \frac{\partial N}{\partial x_i} d\Omega \quad f_a = \int_{\Gamma^{n+1/2}} N^T P_E n_i \tilde{\bar{U}}_i^{n+1/2} d\Gamma \quad (12)$$

$$M^n = \int_{C^n} N^T N d\Omega \quad Q_i = \int_{C^n} \frac{\partial N^T}{\partial x_i} N d\Omega \quad S_{b_i} = - \int_{\Gamma^{n+1/2}} N^T P_E n_j d\Gamma (\bar{v}_y^{n+1/2} - \bar{w}_j^{n+1/2} \bar{U}_i^{n+1/2})$$

A equação da continuidade, Eq. (9), é solucionada pelo método iterativo dos gradientes conjugados [9] utilizando-se um pré-condicionamento diagonal. O mesmo procedimento de discretizações temporal e espacial apresentado é utilizado na equação da energia interna, Eq. (3).

A lei de movimento da malha

No presente trabalho, as velocidades no interior do domínio são suavizadas através de funções que ponderam a influência da velocidade de cada nó pertencente às superfícies de contorno. A atualização da velocidade da malha, nos pontos i do interior do domínio, está baseada na velocidade da malha nos pontos j , pertencentes às superfícies de contorno da seguinte forma [8]:

$$w^i = \frac{\sum_{j=1}^{n_s} a_{ij} w^j}{\sum_{j=1}^{n_s} a_{ij}} \quad (13)$$

onde ns é o número total de pontos pertencentes às superfícies e a_j são os coeficientes de influência entre os pontos no interior do domínio e os de superfície, dados pela seguinte expressão:

$$a_j = \frac{1}{d_{ij}^4} \quad (14)$$

sendo d_{ij} a distância entre os pontos i e j . Na realidade, a_j representa o peso que cada ponto j da superfície tem sobre o valor da velocidade da malha nos pontos i do interior do domínio.

APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Análise do escoamento sobre uma esfera

O código do presente trabalho utiliza variáveis adimensionais, definidas em função de L_{ref} e v_{ref} que são o comprimento e a velocidade de referências, respectivamente e de T_{ref} que é a temperatura de referência. Este exemplo consiste no escoamento com $Re=100$ em torno de uma esfera de diâmetro adimensional igual a 1.0. As componentes de velocidade adimensional em regime não-perturbado $\bar{v}_i = v_i/v_{ref}$ são $(1, 0, 0)$. O número de Prandtl é $Pr=0.706$, a viscosidade cinemática volumétrica é $\lambda=0$ e a velocidade do som é igual a 340m/s. É adotada uma superfície esférica de diâmetro adimensional igual a 22.0 como superfície de contorno externo. A esfera possui uma temperatura adimensional prescrita igual a $T_0=1.0$, enquanto que a temperatura do fluido em regime de escoamento não-perturbado é de $T_{ref}=0.0$. A temperatura adimensional é calculada com a expressão: $\bar{T} = (T - T_{ref}) / (T_0 - T_{ref})$. Devido à simetria do escoamento, utiliza-se apenas um quarto do domínio. A malha é não-estruturada com 206722 elementos tetraédricos e 37997 nós (ver Fig. 1).

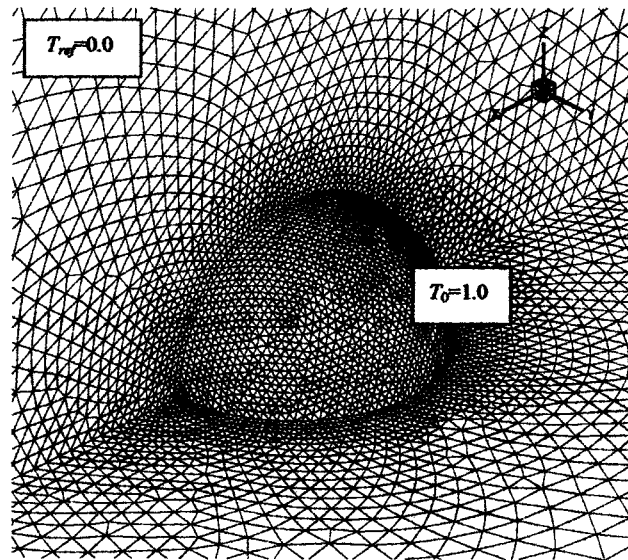


Figura 1 – Escoamento sobre uma esfera: malha de elementos finitos.

É adotado um passo de tempo adimensional de $\Delta t=0.0015$. As Fig. 2 e Fig. 3 apresentam as linhas de corrente e a distribuição de pressão em regime permanente, respectivamente. Os contornos de temperatura são mostrados na Fig. 4.

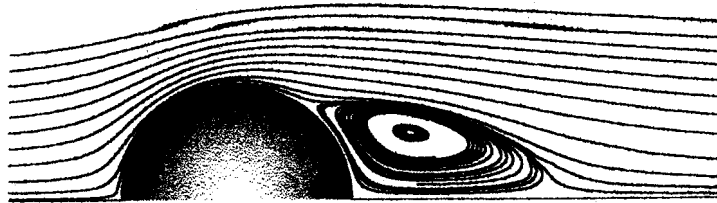


Figura 2 – Escoamento sobre uma esfera: linhas de corrente.

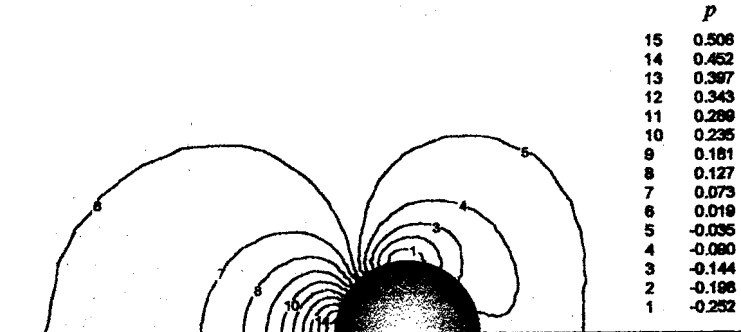


Figura 3 – Escoamento sobre uma esfera: distribuição de pressão.

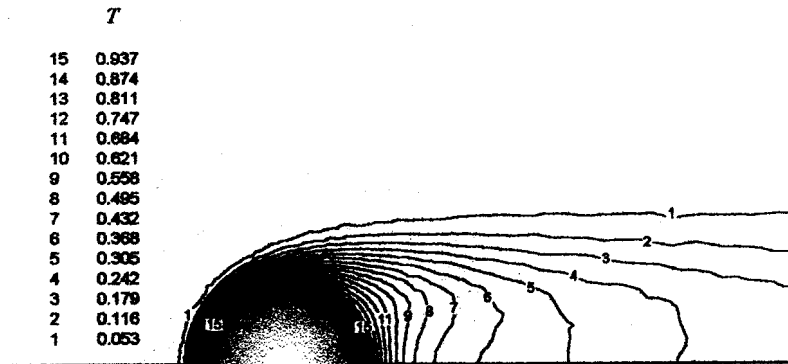


Figura 4 – Escoamento sobre uma esfera: Contornos de temperatura.

A Fig. 2 mostra os pontos de separação, caracterizado pelo ângulo de separação θ_s , e a região de recirculação, caracterizada pelo comprimento de recirculação l_r . Na Tab. 1, estes valores são comparados com aqueles obtidos por Gülçat e Aslan [11]. Também são comparados os valores do coeficiente de arrasto total (C_D) e sua relação com o coeficiente devido apenas aos efeitos de fricção (C_{Df}). Nesta tabela, D representa o diâmetro da esfera. Observa-se a concordância dos resultados obtidos pelo presente trabalho e pela Referência [11].

Tabela 1 – Alguns parâmetros do escoamento sobre uma esfera

Referência	C_D	C_{Df}/C_D	l_r/D	$\theta_s(deg)$
Presente trabalho	1.07	0.53	0.94	55
Gülçat e Aslan [11]	1.07	0.51	0.93	55

O regime permanente foi atingido no instante de tempo adimensional de $t=12.0$ e a performance foi de 636 Mflops no supercomputador Cray T-94/UFRGS.

Onda solitária em um tanque retangular

Com o objetivo de demonstrar a utilização do presente algoritmo em problemas com superfície livre, é analisada a propagação de uma onda solitária em um tanque retangular (ver Fig. 5). A simulação numérica do problema consiste na análise de propagação de uma onda solitária com uma elevação inicial da onda de $H=0.5\text{m}$. O comprimento do tanque é de $L=300\text{m}$ e a profundidade é de $d=10\text{m}$. Na Fig. 5, Y_s é altura do nível da água, η é a elevação da onda, g é a aceleração da gravidade e H é a altura inicial da onda. É utilizada uma malha regular de elementos finitos ($128 \times 8 \times 2$), com 3483 nós e 10240 elementos tetraédricos. São adotadas as seguintes propriedades: massa específica $\rho = 1000 \text{ Kg/m}^3$, viscosidades cinemáticas de cisalhamento $\mu = 0$ e volumétrica $\lambda = 0$, aceleração da gravidade $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ e um passo de tempo adimensional de $\Delta t = 0.005$. As condições iniciais são calculadas a partir das equações analíticas definidas por Laitone [12], considerando a velocidade de propagação da onda igual a $c = \sqrt{gd(1+H/d)}$. Na Fig. 6 é representada a malha de elementos finitos na sua configuração inicial, sendo que as dimensões na direção x estão reduzidas em 10 vezes.

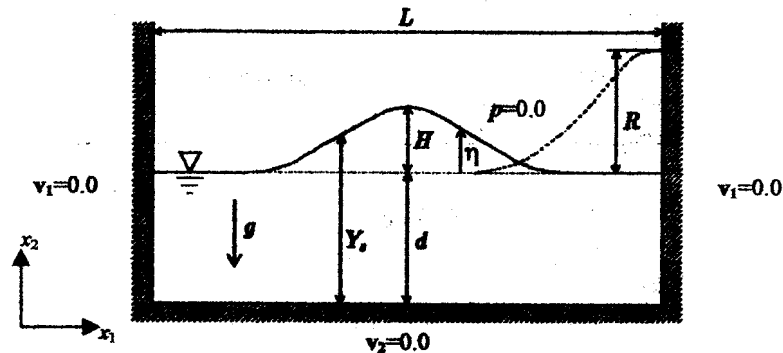


Figura 5 – Geometria e condições de contorno do exemplo onda solitária

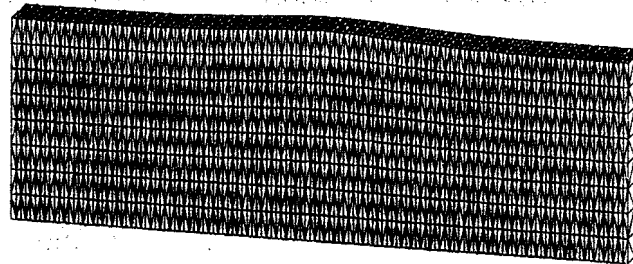


Figura 6 – Configuração inicial da malha no exemplo onda solitária.

Na Tab. 2 tem-se os valores obtidos para a altura da crista da onda nos instantes em que a onda atinge a parede direita, volta para o centro do tanque, atinge a parede esquerda e, finalmente, retorna à posição inicial. Os resultados analíticos da Referência [12] e as diferenças percentuais entre as alturas da crista da onda, obtidas pela simulação numérica e pela aproximação analítica, considerando esta última como referência, também são apresentados na Tab. 2. As Fig. 7, 8 e 9 mostram as configurações da malha, no instante em que a onda atinge as paredes direita e esquerda e quando volta para o centro do tanque, respectivamente. As dimensões na direção x , estão reduzidas em 10 vezes. Observa-se que o algoritmo obteve excelentes resultados em todos os instantes de tempo, com pequenas diferenças em relação aos resultados analíticos da Referência [12]. Além disso, forma da onda foi preservada ao longo da sua trajetória. Este exemplo atingiu um desempenho de 760 Mflops no supercomputador Cray T-94/UFRGS. Este algoritmo também foi testado com a imposição da equação cinemática da onda na superfície livre, apresentando resultados semelhantes. A referida

equação é definida da forma [13]: $\partial\eta/\partial t + (v)_{VI} - (v)_{VII} \partial\eta/\partial x_i = 0$ ($i=1,2,3$), onde $(v)_{VI}$ e $(v)_{VII}$ são as componentes de velocidade do fluido e da malha na superfície livre, respectivamente.

Tabela 2 – Resultados do exemplo onda solitária

Algoritmo	Altura da onda (m)	Instante de tempo (s)	Diferença (%)
<i>Instante em que a onda atinge a parede direita do tanque</i>			
Presente trabalho	1.0330	15.19	2.02
Analítico	1.0125	14.79	-
<i>Instante em que a onda retorna à posição central</i>			
Presente trabalho	0.4980	30.28	0.40
Analítico	0.5000	29.57	-
<i>Instante em que a onda atinge a parede esquerda do tanque</i>			
Presente trabalho	1.0233	45.31	2.14
Analítico	1.0125	44.36	-
<i>Instante em que a onda retorna à posição inicial</i>			
Presente trabalho	0.4932	60.36	2.05
Analítico	0.5000	59.15	-

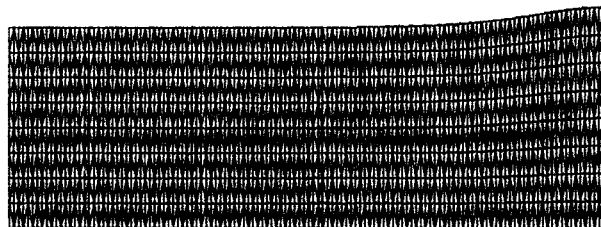


Figura 7 – Configuração da malha para o exemplo onda solitária no instante $t=15.19s$

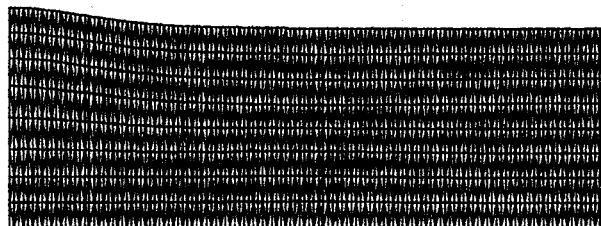


Figura 8 – Configuração da malha para o exemplo onda solitária no instante $t=45.31s$

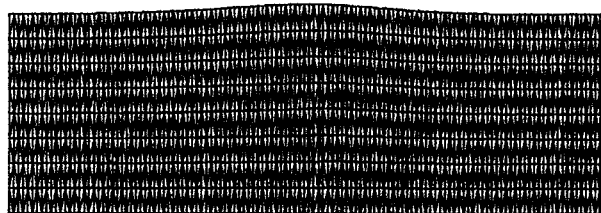


Figura 9 – Configuração da malha para o exemplo onda solitária no instante $t=60.36s$

CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentou-se a eficiência e a precisão do esquema fracionado de Taylor-Galerkin de dois passos. Foram utilizados elementos tetraédricos lineares com as mesmas funções de interpolação para as componentes de velocidade e pressão. Os incrementos de pressão foram obtidos solucionando uma equação de Poisson através do método de gradientes conjugados com pré-condicionamento diagonal. Obteve-se um bom desempenho na execução dos exemplos, atingindo-se em torno de 700 Mflops no Cray T-94/UFRGS. A lei de movimento de malha, utilizada no exemplo da onda solitária, proporcionou movimentos bastante suavizados, com configurações ao longo do tempo de ótima qualidade.

É possível a extensão deste código para problemas de escoamentos de fluidos compressíveis. Para isso, é necessário apenas modificar a equação da continuidade e adicionar a correspondente equação de estado [8,10].

REFERÊNCIAS

- [1] Oden, J. T., Welford, L. C., *Analysis of flow of viscous fluid by the finite element method*, AIAA J., vol. 10, 1972, p.1590-1599.
- [2] Chorin, A. J., *A numerical method for solving incompressible viscous flow problems*, J. Comp. Physics, vol. 2, 1967, p.12-26.
- [3] Donea, J., Giuliani, S., Laval, H., Quaterpelle, L., *Finite element solution of the unsteady Navier-Stokes equation by a fractional step method*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., vol. 33, 1982, p. 53-73.
- [4] Kim, J., Meiss, F., *Application of a fractional-step method for incompressible Navier-Stokes equations*, J. Comp. Phys., vol. 59, 1985, p. 208-323.
- [5] Gresho, P. M., Chan, S. T., Lee, R. L., Upson, G. D., *A modified finite element method for solving the time dependent incompressible Navier-Stokes equations. Part I: Theory*, Int. J. Num. Meth. Fluids, vol. 4, 1984, p. 557-598.
- [6] Ren, G., Utnes, T., *A finite element solution of the time-dependent incompressible Navier-Stokes equations using a modified velocity correction method*, Int. J. Num. Meth. Fluids, vol. 17, 1993, p. 349-364.
- [7] Kovacs, A., Kawahara, M., *A finite element scheme based in the velocity correction method for the solution of the time dependent incompressible Navier-Stokes equations*, Int. J. Num. Meth. Fluids, vol. 13, 1991, p. 403-423.
- [8] Teixeira, P.R.F., *Simulação numérica da interação de escoamentos tridimensionais de fluidos compressíveis e incompressíveis e estruturas deformáveis usando o método de elementos finitos*, Tese de doutorado, PPGEC-UFRGS, Porto Alegre, 2001.
- [9] Argyris, J. et al., *Finite element solution of viscous flow problems*, Finite Elements in Fluids, Wiley, New York, 6v., p.89-114, 1985.
- [10] Zienkiewicz, O.C., Codina, R., *A general algorithm for compressible and incompressible flow – Part I. The split, characteristic-based scheme*, Int. J. Num. Meth. Fluids, vol. 20, 1995, p. 869-885.
- [11] Gülçat, Ü., Aslan, A. R., *Accurate 3D viscous incompressible flow calculations with the FEM*, Int. J. Num. Meth. Fluids, vol. 25, 1997, p. 985-1001.
- [12] Laitone, E.V., *The second approximation to conoidal and solitary waves*, J. Fluid. Mech., vol. 9, 1960, p.430-444.
- [13] Ramaswamy, R.; Kawahara, M., *Arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for unsteady, convective, incompressible viscous free surface fluid flow*, Int. J. Num. Meth. Fluids, vol. 7, 1987, p. 1053-1075.