

## VELOCIDADES CRÍTICAS DE UN EJE ROTANTE CON CONDICIONES ELÁSTICAS DE BORDE NO LINEALES

Ulises Masiá, Hilda A. Larrondo†, Daniel R. Ávalos†  
Departamento de Física, Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Mar del Plata  
Juan B. Justo 4302, 7600, Mar del Plata, Argentina  
e-mail: [larrondo@fi.mdp.edu.ar](mailto:larrondo@fi.mdp.edu.ar)

Patricio A. A. Laura  
Departamento de Ingeniería. Universidad Nacional del Sur

### RESUMEN

En este trabajo se estudia un problema de interés en el diseño de rotores, mediante el método variacional de Raleigh-Ritz. Los cojinetes o rodamientos que soportan el eje se modelan usando un desarrollo en serie del ángulo de giro en los extremos. El estudio comprende los casos elásticos lineal y no lineal. El método resulta computacionalmente eficiente para determinar las velocidades críticas y la forma adquirida por el eje, como consecuencia de las asimetrías que originan fuerzas centrífugas. Para el caso lineal los resultados se comparan con los obtenidos por otros métodos y se estudia la convergencia del método.

### ABSTRACT

In this paper the title problem is tackled using the Raleigh-Ritz Variational Method. The behavior of the bearings or seals is modeled using a series in the angle at the shaft ends. The analysis includes the linear and nonlinear elastic cases. The method proves to be very computationally efficient to determine both the critical speeds and the shape acquired by the shaft as a consequence of the lack of symmetry that gives rise to centrifugal forces. For the linear case results are compared with those obtained by other methods and also the convergence is evaluated.

### INTRODUCCIÓN

El método variacional de Raleigh-Ritz ha demostrado ser muy eficiente en la determinación de las frecuencias naturales y las formas en problemas de vibraciones de vigas y placas de diversas configuraciones, con soportes elásticos y fundaciones lineales y no lineales [1-4].

En este trabajo se lo aplica para el estudio de un eje rotante, de sección transversal constante y de material uniforme e isótropo, cuyos extremos se encuentran montados sobre soportes elásticos. Se investiga tanto el caso de vínculos elásticos lineales y no lineales, blandos y duros.

Como es usual se construye un funcional adimensional que es función de las energías potencial y cinética. Se ensaya una familia de soluciones de tipo serie trigonométrica cuyos coeficientes se eligen de manera de minimizar el funcional. Las relaciones elásticas constitutivas en los bordes se aproximan mediante una serie de potencias del ángulo de giro en los extremos del árbol.

La estabilidad y efectividad del método investigan mediante el caso lineal ya que en este caso es posible obtener la solución exacta y además se dispone de resultados en la bibliografía abierta. Se

analiza también la convergencia de los resultados a medida que aumenta el número de términos utilizados. Luego se investiga el caso no lineal para el cual no hay datos en la literatura abierta. A diferencia de lo que ocurre en el caso lineal los autovalores dependen de la amplitud de deformación.

Es interesante marcar que el problema matemático de hallar las velocidades críticas y las correspondientes configuraciones de un eje rotante es formalmente el mismo que el de determinar las frecuencias naturales y los correspondientes modos característicos para el caso de las vibraciones transversales de una viga [4-5]. Por lo tanto la misma metodología presentada en este trabajo puede ser utilizada para estudiar ese caso.

La aplicación de técnicas puramente numéricas para resolver este tipo de problemas puede ser muy costosa en términos de tiempo computacional. La combinación del método de Raleigh-Ritz con la resolución numérica de las ecuaciones algebraicas resultantes sólo requiere modestos recursos computacionales y provee información acerca de la relación funcional entre diferentes variables.

### ANÁLISIS POR EL MÉTODO VARIACIONAL DE RALEIGH-RITZ

Sea un eje de sección transversal  $A_1$  y momento de inercia  $I$ , hecho de material de densidad  $\rho$ , que gira con velocidad angular constante  $\omega$  (ver Fig. 1).

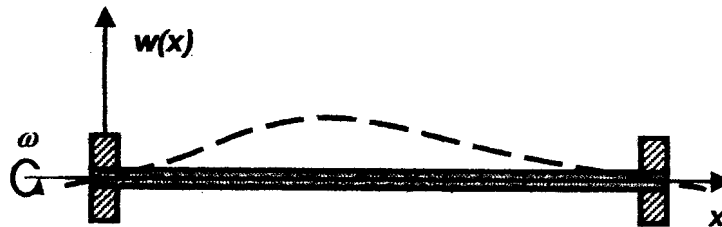


Fig. 1-Sistema bajo estudio

En general no es posible alcanzar una simetría perfecta, y por lo tanto la línea central y el eje de rotación no coinciden. Como consecuencia aparecen fuerzas centrífugas sobre eje. Si se emplea un sistema de referencia que rota junto con el eje, la configuración estacionaria obtenida puede expresarse mediante una función  $w(x)$ , que es solución de la siguiente ecuación diferencial

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = \rho A \omega^2 w(x), \quad (1)$$

donde el segundo miembro de la ecuación es la fuerza centrífuga distribuida que actúa sobre el eje. Nótese que la ecuación (1) es la misma obtenida en el estudio de las vibraciones transversales de una viga de Bernoulli. Los apoyos representan condiciones de contorno para la ecuación (1). En este trabajo se las aproxima por la siguiente relación constitutiva elástica:

$$\begin{aligned} w(0) &= 0; \quad w(L) = 0; \\ -M|_{x=0} &= \sum_{l=1}^{\infty} k_{l0} \left( \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} \right)^l; \\ +M|_{x=L} &= \sum_{l=1}^{\infty} k_{lL} \left( \frac{dw}{dx} \Big|_{x=L} \right)^l; \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $L$  es la longitud del eje. La versión adimensional de la ecuación (1) es:

$$\frac{d^4 W(X)}{dX^4} - \Omega^2 W(X) = 0 \quad (3)$$

donde  $\Omega$  es la velocidad crítica adimensional, dada por

$$\Omega^2 = \frac{\rho \omega^2 AL^4}{EI} \quad (4)$$

y  $W=w/L$ ,  $X=x/L$ . Las condiciones de contorno adimensionales son:

$$\begin{aligned} W(0) &= 0; \quad W(1) = 0; \\ -\tilde{M}|_{X=0} &= \sum_{i=1}^{\infty} K_{i0} \left( \frac{dW}{dX} \Big|_{X=0} \right)^i \\ +\tilde{M}|_{X=1} &= \sum_{i=1}^{\infty} K_{i1} \left( \frac{dW}{dX} \Big|_{X=1} \right)^i \end{aligned} \quad (5)$$

donde las constantes elásticas y los momentos adimensionales están dados por:

$$K_{i0} = \frac{k_{i0}L}{EI}; \quad K_{i1} = \frac{k_{i1}L}{EI}; \quad (i=1, \infty); \quad \tilde{M} = \frac{ML}{EI} \quad (6)$$

De acuerdo con el método de Raleigh-Ritz se construye el funcional:

$$\begin{aligned} F[W] &= \text{máxima energía potencial} - \text{máxima energía cinética} \\ &= U_s[W] + U_b[W] - T_s[W], \end{aligned} \quad (7)$$

donde  $T_s$  y  $U_s$  son respectivamente las energías cinética y potencial del eje, y  $U_b$  es la energía potencial adimensional de los apoyos, dadas por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} T_s[W] &= \frac{\Omega^2}{2} \int_0^1 W^2 dX; \\ U_s[W] &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{d^2 W}{dX^2} \right)^2 dX; \\ U_b[W] &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{K_{i0}}{i+1} \left( \frac{dW}{dX} \Big|_{X=0} \right)^{i+1} + \frac{K_{i1}}{i+1} \left( \frac{dW}{dX} \Big|_{X=1} \right)^{i+1} \end{aligned} \quad (8)$$

La forma del eje puede expresarse en forma conveniente como sigue:

$$W_a \cong \sum_{j=1}^{j=J} A_j \text{sen } j\pi x \quad (9)$$

Los coeficientes  $A_j$  se eligen de modo de minimizar el funcional  $F[W_a]$ . Es decir:

$$\frac{\partial F[W_a]}{\partial A_j} = 0; \quad (j = 1, \dots, J), \tag{10}$$

Los resultados presentados en este trabajo corresponden al caso de una función impar de uno (caso lineal) o dos (caso no lineal) términos pero el mismo método puede utilizarse para cualquier número de términos. El sistema de ecuaciones homogéneo resultante es:

$$\begin{aligned} (\Omega^2 - \pi^4 j^4) A_j - 2\pi^2 \alpha_j \left[ \sum_{l=1}^J (1 + (-1)^{l+j}) l A_l \right] \\ - 2\pi^4 \beta_j \left[ \sum_{l=1}^J \sum_{m=1}^J \sum_{n=1}^J (1 + (-1)^{l+m+n+j}) l m n A_l A_m A_n \right] = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

(j = 1, ..., J)

con:

$$K_{i0} = K_{ii} = K_i; \quad \alpha = K_1; \quad \beta = K_3; \tag{12}$$

Resolviendo el sistema (11) obtienen tanto las velocidades críticas  $\Omega$ 's como las correspondientes formas del eje.

### RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Todos los cálculos y gráficos presentados a continuación fueron realizados con Mathematica 3.0©

#### a) Caso lineal

En el caso  $\beta=0$  las velocidades críticas  $\Omega$ 's surgen exigiendo que el sistema (11) tenga solución no trivial. También puede resolverse analíticamente obteniéndose la solución exacta:

$$W(X) = A \text{sen } \sqrt{\Omega} X + B \text{cos } \sqrt{\Omega} X + C e^{\sqrt{\Omega} X} + D e^{-\sqrt{\Omega} X} \tag{13}$$

y los  $\Omega$ 's se pueden obtener a partir de la ecuación  $\det M=0$ , donde la matriz **M** está dada por:

$$M = \begin{bmatrix} e^{\sqrt{\Omega}}(g + \sqrt{\Omega}) & e^{-\sqrt{\Omega}}(-g + \sqrt{\Omega}) & g \text{cos } \sqrt{\Omega} - \sqrt{\Omega} \text{sen } \sqrt{\Omega} & -g \text{sen } \sqrt{\Omega} - \sqrt{\Omega} \text{cos } \sqrt{\Omega} \\ e^{\sqrt{\Omega}} & e^{-\sqrt{\Omega}} & \text{sen } \sqrt{\Omega} & \text{cos } \sqrt{\Omega} \\ -g + \sqrt{\Omega} & g + \sqrt{\Omega} & -g & -\sqrt{\Omega} \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con  $g = \alpha / 4\pi^2$ .

En la Tabla 1 se muestra una comparación entre los resultados obtenidos por el método de Raleigh-Ritz y por otros métodos, para el caso de las tres primeras velocidades críticas y para diferentes valores de las constantes elásticas.

Tabla I-Autovalores del caso lineal, correspondiendo a las soluciones:  
 "Exacta": analítica; "Goel": referencia [2]; "J=10" y "J→∞": Raleigh-Ritz tomando 10 e ∞ términos

$\alpha$	$\sqrt{\Omega_1}$				$\sqrt{\Omega_2}$				$\sqrt{\Omega_3}$			
	J=10	J→∞	Exacta	Goel	J=10	J→∞	Exacta	Goel	J=10	J→∞	Exacta	Goel
0.01	3.1448	3.1478	3.1448	3.145	6.2848	6.2848	6.2848	6.285	9.4258	9.4258	9.4258	9.426
0.1	3.1727	3.1727	3.1727	3.173	6.2990	6.2989	6.2989	6.299	9.4353	9.4353	9.4353	9.435
1	3.4031	3.3988	3.3988	3.399	6.4297	6.4273	6.4273	6.427	9.5264	9.5244	9.5244	9.525
10	4.2329	4.1557	4.1557	4.156	7.1474	7.0682	7.0682	7.068	10.154	10.066	10.066	10.066
100	4.8336	4.6413	4.6413	4.641	7.9967	7.7103	7.7103	7.71	11.255	10.801	10.801	10.802
∞	4.9510	4.7300	4.7300	4.73	8.2048	7.8532	7.8532	7.853	11.592	10.996	10.996	10.996

La convergencia del método de aleigh-Ritz es excelente como puede verse en la Figura 2, donde se representa el error en la raíz cuadrada de la velocidad crítica más baja  $\Omega_1$ , en función del número de términos  $J$  empleados en la función aproximada  $W_a$ .

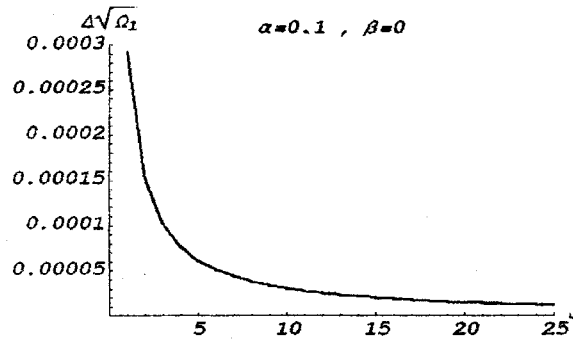


Fig. 2- Error en la raíz cuadrada de la más baja velocidad crítica lineal  $\Omega_1$  como una función de  $J$ .

La convergencia también es muy buena en el caso del cálculo de las formas, como puede verse en la Figura 3, que muestra el error en la solución aproximada para el primer modo lineal, como función de  $X$ , para los casos  $J=3$  y  $J=10$ .

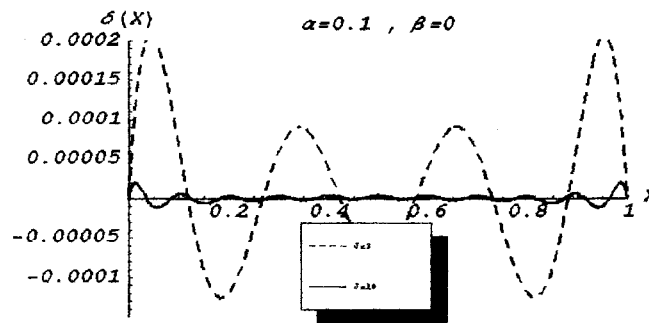


Fig. 3- Error en la solución lineal aproximada como función de  $X$ .

b) Caso no lineal

En el caso no lineal no es posible obtener una solución analítica. Además los  $\Omega_j$ 's de los  $A_j$ 's. Se deben considerar separadamente los casos impar y par, es decir casos donde  $w(x)$  queda expresada únicamente por términos impares(pares) en (9). Se toma uno de los  $A_j$ 's es tomado como variable independiente y se resuelve (11) obteniendo los restantes  $A_j$ 's y las velocidades críticas. Es conveniente numéricamente usar  $A_1$  como variable independiente para el cálculo de  $\Omega_1$ ,  $A_2$  para el cálculo de  $\Omega_2$  y así siguiendo. Las Tablas II a IV muestran las tres primeras velocidades críticas para diferentes valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $A_1$ .

Tabla II- $\sqrt{\Omega_1}$ ,  $\sqrt{\Omega_2}$ ,  $\sqrt{\Omega_3}$ , para  $\alpha = 100$  y para diferentes valores de  $\beta$  y de la amplitud  $A_m$

$\beta$	$A_m$	$\sqrt{\Omega_1}$	$\sqrt{\Omega_2}$	$\sqrt{\Omega_3}$
1	0.001	4.641319	7.7102895	10.801255
1	0.1	4.641320	7.7102976	10.801294
100	0.001	4.641319	7.7102896	10.801255
100	0.1	4.641390	7.7110798	10.804988
-100	0.001	4.641319	7.7102894	10.801255
-100	0.1	4.641248	7.7148478	9.2662638
-1	0.001	4.641319	7.7102895	10.801255
-1	0.1	4.641318	7.7102815	10.801215

Tabla III- $\sqrt{\Omega_1}$ ,  $\sqrt{\Omega_2}$ ,  $\sqrt{\Omega_3}$ , para  $\alpha = 1$  y para diferentes valores de  $\beta$  y de la amplitud  $A_m$

$\beta$	$A_m$	$\sqrt{\Omega_1}$	$\sqrt{\Omega_2}$	$\sqrt{\Omega_3}$
0.01	0.001	3.3987994	6.4272591	9.5244522
0.01	0.1	3.3989715	6.4277109	9.5252087
1	0.001	3.3988011	6.4272636	9.5244597
1	0.1	3.4155341	6.4693144	9.5920674
-1	0.001	3.3987976	6.4272546	9.5244446
-1	0.1	3.3810584	6.3782226	9.4376141
-0.01	0.001	3.3987993	6.4272590	9.5244521
-0.01	0.1	3.3986271	6.4268066	9.5236937

Las gráficas 3D de las Figuras 4 a 6 muestran las relaciones funcionales entre la raíz cuadrada de las tres primeras velocidades críticas, la constante elástica no lineal  $\beta$  y la amplitud  $A_m$ .

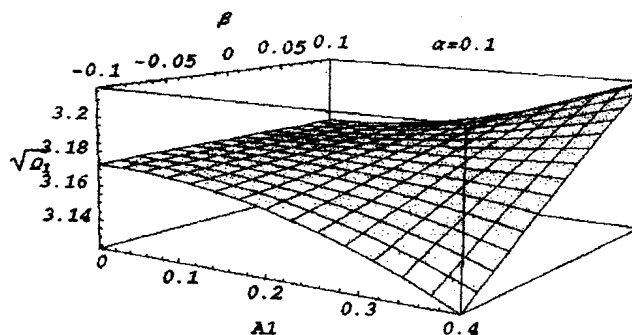


Fig. 4- La raíz cuadrada de  $\Omega_1$  como función de  $\beta$  y de  $A_1$ , para  $\alpha = 0.1$

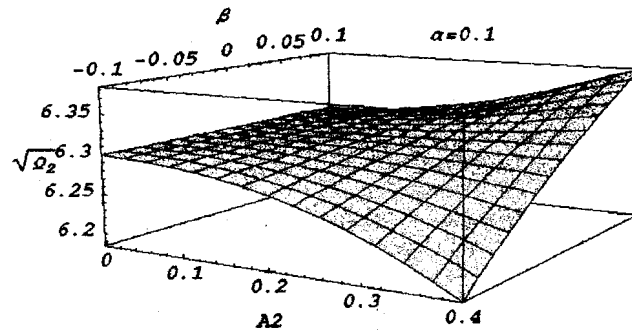


Fig. 5- la raíz cuadrada de  $\Omega_2$  como función de  $\beta$  y  $A_2$  para  $\alpha=0.1$

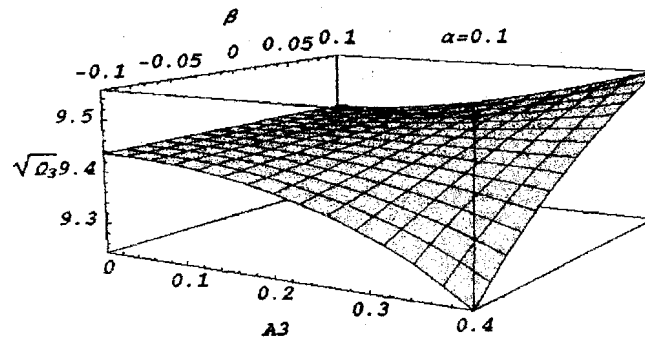


Fig. 6- la raíz cuadrada de  $\Omega_3$  como función de  $\beta$  y  $A_3$  para  $\alpha=0.1$

Los valores negativos y positivos de  $\beta$  corresponden respectivamente a resortes "blandos" y "duros". Se ha empleado el límite  $J \rightarrow \infty$  para aproximar la solución por el método de Raleigh-Ritz. Por último, las figuras 7 y 8 muestran la diferencia  $\xi^{(1)}(x)$ , entre la solución aproximada  $W_n(x)$  del caso no lineal y la solución exacta  $W(x)$  lineal, para varios valores de  $\beta$  y de  $A_1$ . El supraíndice indica que se trata del primer modo

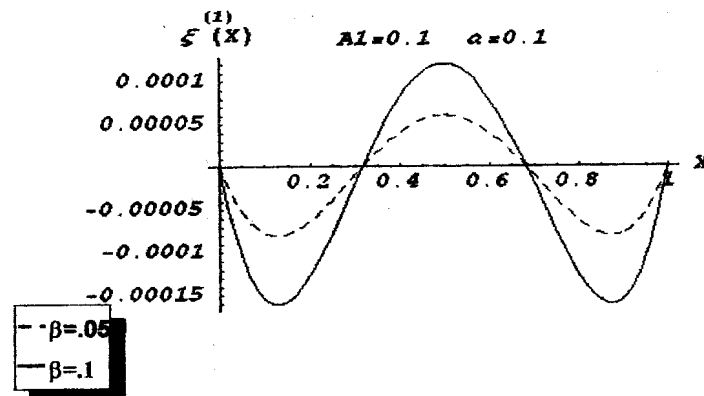


Fig. 7- Diferencia en la configuración entre el caso no lineal y la solución lineal, para diferentes  $\beta$

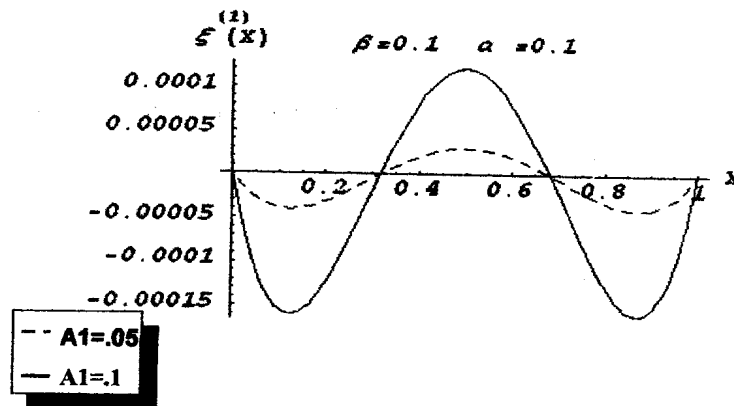


Fig. 8- Diferencia en la configuración entre el caso no lineal y la solución lineal, para diferentes  $A_1$

#### AGRADECIMIENTOS

Este estudio ha sido financiado por la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de las Universidades Nacionales de Mar del Plata y del Sur y por el CONICET.

#### REFERENCIAS

- [1] Laura, P. A. A., Rossit, C. A., Ávalos, D. R., Larrondo, H.A., *Comments on "Application of the strain energy damage detection method to plate like structures"*, J. of Sound and Vib. Vol 233(5), 2000, págs 545-546.
- [2] Larrondo, H. A., Ávalos, D. R., Laura, P. A. A., *Transverse vibrations of simply supported anisotropic rectangular plate carrying an elastically mounted concentrated mass*. J. of Sound and Vib. Vol. 215(5), 1998, págs. 1195-1202.
- [3] Ávalos, D. R., Larrondo, H. A., Laura, P. A. A., Sonzogni V., *Transverse vibrations of a circular plate with a concentric square hole with free edges*. J. of Sound and Vib. Vol. 209(5), 1998, págs. 889-891.
- [4] Larrondo, H. A., Masiá, U., Ávalos, D. R., Laura, P. A. A., *Normal modes of vibration of a Bernoulli-Euler beam: a variational approach*. Proceedings de VIII Conference on nonlinear vibrations, stability and dynamics of structures". Virginia Polytechnic Institute and State University, USA, 2000.
- [5] Lalanne, M., Ferraris, G., *Rotor dynamics prediction in engineering*. John Wiley and Sons, New York, N.Y. (2nd. Edition) 1998.
- [6] Goel, R. P., *Free vibrations of a beam-mass system with elastically restrained ends*, J. of Sound and Vib. Vol. 47(1), 1976, págs. 9-14.