Mecánica Computacional Vol 20. pp. 561—568
Compilado por Fernando G. Flores
Córdoba, 30 de octubre - 2 de noviembre de 2001

SOLUCIONES ANALÍTICAS PARA ECUACIONES ORDINARIAS NO LINEALES

Carlos P. Filipich, Marta B. Rosales
Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur,
Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina
e-mail: mrosales@criba.edu.ar
y
Fernando Buezas
Departamento de Física, Universidad Nacional del Sur,
Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina
e-mail: fbuezas@ba.net

ABSTRACT

In this paper the analytical solution of nonlinear ordinary differential systems is addressed. The problems are classical in the related literature and exhibit chaotic behavior in certain ranges of the involved parameters despite being simple-looking deterministic systems. The solutions are approached by means of algebraic series in the time variable that lead to elementary recurrence algorithm. This is an alternative to the standard numerical techniques and ensures the theoretical exactness of the response. The desired numerical precision is attained using time steps several times larger than the usual ones. Two examples are included: a) projectile motion and, b) n bodies with gravitational attraction. Trajectories diagrams are shown. An available analytical solution may be an additional tool within the standard qualitative analysis. The solution of higher order problems and others governed by partial differential equations is under study

RESUMEN

En este trabajo se estudia la solución analítica de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. Los problemas son clásicos en la literatura relacionada y algunos exhiben comportamiento caótico en algunos rangos de los parámetros involucrados a pesar de ser sistemas determinísticos de apariencia simple. Las soluciones son propuestas a través de series algebraicas en la variable temporal que conducen a algoritmos elementales de recurrencia. Se la presenta como una alternativa a las técnicas usuales de integración numérica y asegura la exactitud teórica de la respuesta. La precisión numérica deseada se logra usando pasos varias veces mayores que los usuales. Se incluyen dos ejemplos: a) tiro y, d) movimiento de n cuerpos con acción gravitatoria. Se reportan diagramas de trayectorias. Disponer de una solución analítica puede ser una herramienta adicional en el análisis cualitativo estándar. La solución de problemas de mayor orden y otros gobernados por ecuaciones diferenciales a derivadas parciales está en estudio.

INTRODUCCIÓN

Este tipo de problemas suele comúnmente ser resuelto con la utilización de herramientas numéricas como las rutinas de integración en el tiempo (e.g. Runge-Kutta, método de Newmark, diferencia central, ver por ej. [1]). Los autores han estudiado problemas similares con un método variacional llamado MEC en castellano (WEM en inglés) [2], [3].
Ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales son resueltas con una solución numérico-analítica usando series algebraicas. La manipulación previa de las ecuacions conduce a algoritmos de recurrencia muy convenientes que aseguran la exactitud de la solución y la eficiencia computacional del método. La metodología es directa y es ilustrada con dos problemas clásicos no lineales (see for instance references [4] and [5]), i.e. a) tiro y, b) problema de n cuerpos con atracción gravitacional. Por otro lado la disponibilidad de una solución analítica también puede ser una herramienta útil en el análisis cualitativo de ecuaciones no lineales.
En esta sección se plantea el álgebra general y en la sección siguiente se presentan los ejemplos. Consideremos una función continua $x = x(\tau)$ en $o \leq \tau \leq 1$. Designaremos a su expansión en series algebraicas como

$$[x] = \sum_{k=0}^{N} a_{1k}\ \tau^k \tag{1}$$

y para potencias m-ésimas

$$[x^m] = \sum_{k=0}^{N} a_{mk}\ \tau^k \tag{2}$$

A los efectos de cumplir con la condición de *consistencia algebraica* (C.A.) debe satisfacerse la siguiente relación

$$[x^m] = \left[x^{m-1}\right][x] \tag{3}$$

Luego de reemplazar las expresiones en series en cada factor de esta ecuación, se obtiene la siguiente fórmula de recurrencia

$$a_{mk} = \sum_{p=0}^{k} a_{(m-1)p} a_{1(k-p)} \tag{4}$$

o bien

$$a_{mk} = \sum_{p=0}^{k} a_{(m-1)(k-p)} a_{1p} \tag{5}$$

Ahora expandamos una función analítica $f = \hat{f}(x) = \hat{f}(x(\tau)) = f(\tau)$ en series de Taylor

$$\widehat{f}(x) = \sum_{m=0}^{M} \alpha_m\ x^m \tag{6}$$

donde α_m son conocidos y en particular, llamamos

$$[1] = \sum_{k=0}^{N} \delta_{0k}\ \tau^k \tag{7}$$

donde $a_{0k} = \delta_{0k}$ son los delta de Kronecker. Si sustituimos la ecuación (2) en la ecuación (6) podemos escribir

Tabla 1: Datos iniciales para cuatro cuerpos en órbita.

Body	Initial Position	Initial Velocity
1	(0,0,0)	(0,0,0)
2	(3,0,0)	(0,0,0)
3	(3,4,0)	(0,0,0)
4	(1.5,1.5,0)	(-0.00125,0.0005,0.0005)

donde $\varphi_{2k} \equiv (k+1)(k+2)$, $i = 1, 2, \ldots, NC$ y $k = 0, 1, 2, \ldots, N-2$. Se utilizaron las siguientes definiciones

$$\begin{aligned} X_{rsk} &= \sum_{p=0}^{k} \sigma_{rsp} \left(A_{s(k-p)} - A_{r(k-p)} \right) \text{ ; (a)} \quad Y_{rsk} = \sum_{p=0}^{k} \sigma_{rsp} \left(B_{s(k-p)} - B_{r(k-p)} \right) \text{ ; (b)} \\ Z_{rsk} &= \sum_{p=0}^{k} \sigma_{rsp} \left(C_{s(k-p)} - C_{r(k-p)} \right) \text{ ; (d)} \end{aligned} \tag{36}$$

Los pasos necesarios para encontrar la solución son:

1. Se elige un valor de T;
2. Dadas las condiciones iniciales, i.e. $\vec{r}_i(0)$ (posición) y $\vec{r}_i{}'(0)$ (velocidad) se conocen los valores de A_{i0}, B_{i0}, C_{i0}, A_{i1}, B_{i1} y C_{i1};
3. Usando relaciones de recurrencia del tipo (4) pueden hallarse los valores de a_{i0}, a_{i1}, p_{ij0}, p_{ij1}, β_{ij0}, etc.;
4. El cálculo se hace con las ecuaciones (35) y (36) con un número de pasos que depende del valor de T y la duración del experimento;
5. Finalmente la posición $\vec{r}_i(\tau)$ y la velocidad $\vec{r}_i{}'(\tau)$ son obtenidas para cada cuerpo ($i = 1, 2, \ldots, NC$).

La Figura 2 muestra las posiciones relativas entre cuatro cuerpos de masas $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $m_3 = 5$ and $m_4 = 1$ respectivamente. Las condiciones iniciales estan listadas en la Tabla 1.

CONCLUSIONES

Se ha mostrado una metodología para encontrar soluciones analíticas a través de recurrencias algebraicas para problemas gobernados con ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. En la Introducción se dan los elementos de la propuesta y luego se muestran dos ejemplos de aplicación, un problema de tiro y uno de órbitas de cuerpos. Otros problemas complejos que pueden presentar comportamiento caótico han sido resueltos con esta técnica [6]. Esta metodología es sistemática y asegura la exactitud del planteo.

REFERENCIAS

[1] **Bathe, K-J,** *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, 1995.

[2] **Rosales, M. B. and Filipich, C.P.** *An Alternative Technique for Time Integration of Dynamic Equations*, XXIXX South American Congress on Structural Engineering (Jubileo Ing. Ricaldoni), Vol. 1, CDROM, Punta del Este, Uruguay, 2000.

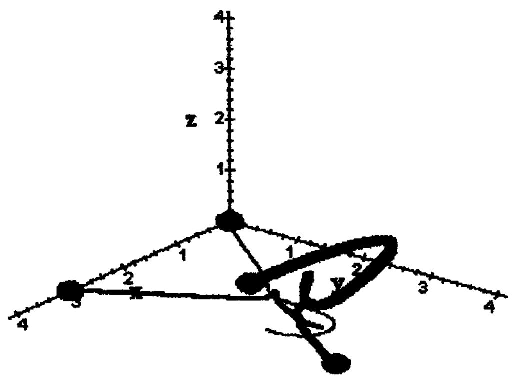

Figura 2: Trayectorias de cuatro masas en órbita.

[3] **Rosales, M.B. and Filipich, C.P.** *Time Integration of Nonlinear Dynamic Equations by Means of a Direct Variational Method*, submitted to the Journal of Sound and Vibration (en revisión), 2000.

[4] **Goldstein, H.**, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Pub Co, 1980.

[5] **Synge, J. and Griffith, B.** *Principios de Mecánica*, McGraw-Hill, 1959.

[6] **Filipich, C.P. and Rosales, M.B.** *Analytical Solution of Some Problems with Chaotic Response*, COBEM 2001, Uberlandia, Minas Gerais, Brasil (aceptado para presentación). 2001