

**CONDICION DE FRONTERA ABSORBENTE DISCRETA
NO-LOCAL (DNL) PARA MODELOS ELIPTICOS
DE PROPAGACION DE ONDAS EN EL MAR.**

Ruperto P.Bonet, Norberto Nigro, Mario A. Storti, Sergio Idelsohn.

Grupo de Tecnología Mecánica del INTEC
Güemes 3450. 3000 - Santa Fe, Argentina
Phone: 54-42-55.91.75, Fax: 54-42-55.09.44
e-mail: rbonet@intec.unl.edu.ar

RESUMEN

Una condición de frontera discreta no-local completamente no-reflejante ha sido derivada para la simulación numérica de ondas gravitatorias mediante la ecuación de Berkhoff. Aquí se muestra la combinación de la condición de frontera con los métodos de diferencias finitas y de elementos finitos. Los ejemplos numéricos, demuestran las importantes mejoras obtenidas con el uso de esta condición respecto a las usuales.

ABSTRACT

A nonreflecting discrete non-local boundary condition has been obtained for the numerical simulation of gravity waves by means Berkhoff's equation. Here it is shown how to combine that boundary condition with finite difference methods and finite element methods. DNL procedure has been developed in rectangular and circumferential coordinates. The numerical examples show an important improvement in accuracy over standard conditions.

1.INTRODUCCION

En este trabajo, con el método DNL se formula un problema discreto de valores-frontera en una región acotada bidimensional, mediante la imposición de una relación entre los valores nodales sobre la frontera artificial del dominio y las capas sucesivas. El objetivo es, sin dudas, que la solución de la formulación DNL sea muy próxima a la restricción de la solución exacta(y única) del problema original a este dominio acotado, y para ello hemos derivado una condición de frontera discreta, no-local y no-reflejante[2,3].

En la formulación computacional, son desarrolladas todas las operaciones con el operador discretizado(en sentido fuerte o débil), a diferencia de la formulación DtN(Harari, I.& Hughes Thomas, J.R.,1992)[6], y de una aproximación pseudoespectral de Fourier para dispersión de ondas en el mar(Chen,Y. & Philip,F.L.,1994)[4], las cuales resuelven de forma aproximada (mediante series) el problema analítico en un medio no acotado.

Finalmente, debemos resolver una serie de problemas con frontera artificial (en coordenadas rectangulares o circunferenciales) usando el método de diferencias finitas.

o de Galerkin, y nuestra condición de frontera.

2. EL PROBLEMA DE NEUMANN CON UNA FRONTERA DNL

Nosotros consideramos el problema de Neumann con una frontera DNL asociado a la ecuación de Berkhoff(1976)[1,8].

$$\begin{aligned} \nabla_h(CC_g \nabla \phi) + k^2 CC_g \phi &= 0 \quad \text{en } R \\ \phi &= \bar{\phi} \quad \text{para } y \in [0, l2], y \ x = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} &= 0 \quad \text{para } x \in [0, l1], y = 0, \text{ ó } y = l2 \\ &+ \text{ b.c. tipo DNL} \quad \text{para } y \in [0, l2], y \ x = l1 \end{aligned} \quad (1)$$

sobre el rectángulo $R = [0, l1] \times [0, l2]$ con condiciones de frontera tipo Neumann sobre las fronteras verticales. En este problema consideramos que el número de onda $k(x, y)$ variable tiende a una constante $k(x, y) = k$ en una región $\Omega \subset R$ próxima a la frontera artificial.

Formulación por elementos finitos.

En lo que sigue nosotros consideramos la discretización del dominio computacional Ω mediante una malla "estructurada", tal que la capa j sea la capa correspondiente a la frontera artificial del dominio computacional. Denotemos por ϕ_i^j los valores nodales de la solución por elementos finitos correspondientes a los nodos de dicha capa, para $i = 1, 2, \dots, N_{1ay}$.

Como el dominio Ω es prismático es conveniente utilizar la discretización parcial de la ecuación de Helmholtz, de tal manera que permita expresar mediante una ecuación en diferencias la dependencia entre los valores nodales de la solución numérica correspondientes a las capas $j-1$, j y $j+1$. La discretización de la ecuación de Helmholtz con elementos lineales en la dirección transversal, origina un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden en la dirección x de la forma

$$I\ddot{\phi}^j - M^{-1}K\phi^j + k^2I\phi^j = \bar{0} \quad (2)$$

donde las matrices M , K representan las matrices de masa, y de rigidez globales de la discretización unidimensional en la dirección transversal, la matriz I es la matriz identidad, y h_y representa la longitud del elemento e en la discretización realizada. Discretizando nuevamente, se tiene:

$$(-I\phi^{j-1} + 2I\phi^j - I\phi^{j+1}) - ((kh_x)^2I - h_x^2M^{-1}K)L(\phi^j) = \bar{0} \quad (3)$$

donde $L(\phi^j) = \phi^j$ si empleamos diferencias finitas, o $L(\phi^j) = \frac{(\phi^{j-1} + 4\phi^j + \phi^{j+1})}{6}$ si empleamos elementos finitos lineales.

Tal discretización parcial se puede emplear evidentemente de diferentes maneras, pero independientemente de esto, el "stencil" correspondiente a los nodos de una capa j es de la forma:

$$A\phi^{j-1} + B\phi^j + A\phi^{j+1} = 0 \quad (4)$$

donde la matriz B es una matriz llena, y la matriz A es una matriz diagonal, o no, dependiendo de la discretización parcial realizada. La matriz de los coeficientes correspondiente a la capa $j - 1$ es igual a la de la capa $j + 1$ debido a la simetría del operador.

Formulación por diferencias finitas.

En lugar del método de elementos finitos, nosotros podemos usar el método de diferencias finitas para resolver el problema (1). Nosotros optamos por usar diferencias centradas de segundo orden sobre una malla de paso h_x en la dirección x y de paso h_y en la dirección y . Tenemos, entonces para los nodos interiores correspondientes a la capa j la ecuación en diferencias siguiente :

$$I\phi^{j-1} + \text{tridiag}\left(\left(\frac{h_x}{h_y}\right)^2, ((kh_x)^2 - 2 - 2\left(\frac{h_x}{h_y}\right)^2), \left(\frac{h_x}{h_y}\right)^2\right) + I\phi^{j+1} = 0 \quad (5)$$

la cual adopta la forma (4), siendo la matriz B una matriz tridiagonal y la matriz A una matriz diagonal.

Condición de frontera DNL.

Para la matriz real $A^{-1}B$, existe una transformación ortogonal V , tales que

$$A^{-1}B = V\Lambda V^{-1} \quad (6)$$

donde $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N_{ia_y}})$ es una matriz diagonal formada por los autovalores de $A^{-1}B$ y V el sistema de autovectores de $A^{-1}B$.

Mediante la siguiente transformación no-singular

$$\phi_l^j = \sum_{i=1}^{N_{ia_y}} V_{l,i}(c_i^+ \mu_i^{+j} + c_i^- \mu_i^{-j}) \quad \text{con } l = 1, 2, \dots, N_{ia_y} \quad (7)$$

separamos el campo ondulatorio en los modos de propagación "hacia adelante" y "hacia atrás", donde μ_i^\pm es solución de la ecuación característica:

$$(\mu_i^2 + \lambda_i \mu_i + 1) = 0 \quad (8)$$

En [2,3] fueron caracterizados los modos de propagación "hacia adelante", o sea, los modos correspondientes a las ondas salientes del dominio. Estos modos se encuentran en el círculo unidad del plano complejo, sobre el eje real y con módulo menor que 1 para ondas que se desvanecen, y sobre la circunferencia unidad, en el semiplano superior del plano complejo para ondas progresivas.

Denotando por G la matriz $G = \text{diag}(\mu_1(\lambda), \dots, \mu_{N_{ia_y}}(\lambda))$ y basado en la ecuación (7), no es difícil demostrar que la ecuación (4) se satisface exactamente para los modos de propagación "hacia adelante" mediante la relación

$$(\phi^+)^{j+1} = F(\phi^+)^j \quad (9)$$

tales que la matriz F denominada matriz DNL, viene dada por $F = VGV^{-1}$.

Debido al carácter discreto de la matriz DNL, resulta de interés analizar la influencia del paso de la malla en el cumplimiento de la igualdad (9). Para ello consideraremos sólo los modos progresivos, y por tanto, sustituimos, el vector nodal ϕ^j por su expresión exacta $\phi_l^j = \exp i(k_y h_y l + \sqrt{k^2 - k_y^2} h_x j)$ ($l = 1, 2, \dots, N_{lay}$) siendo k_y el modo transversal que expresa el ángulo de incidencia al contorno. Se puede hacer notar directamente que los vectores determinados por los miembros de la igualdad (9) tienen igual módulo. De esta manera resulta de interés el cálculo de los errores de fase mediante la expresión $|\sigma| = |f_{ase}(\phi^{j+1}) - f_{ase}(F\phi^j)|$.

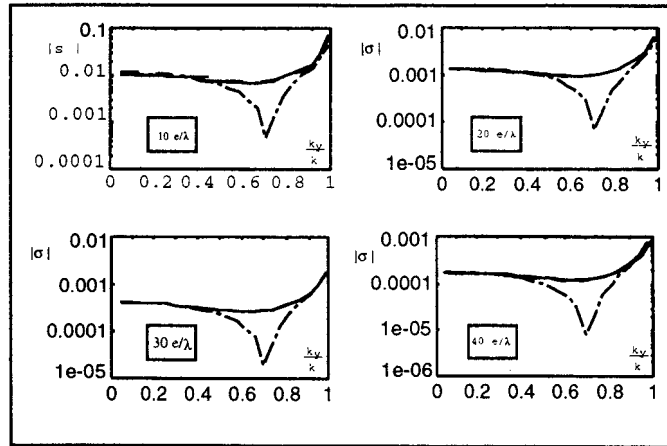


Figura 1. Error de Fase con la matriz DNL sobre mallas uniformes con diferentes pasos de malla y procedimientos de discretización (- - DIF, -.- MEFDIF, - MEFMEF).

En la Figura 1 mostramos el cálculo del error de fase sobre una malla uniforme, empleando 10, 20, 30 y 40 elementos por longitud de onda, respectivamente. Como se puede apreciar la sucesión de errores de fase es convergente, hacia cero, independientemente, del proceso de discretización empleado. Aún más, el proceso de construcción de la DNL por el método de diferencias finitas o el de los elementos finitos, originan errores de fases del mismo orden, y en la medida que refinamos la malla, estos errores de fase se aproximan uno respecto al otro, sin embargo, cuando empleamos el procedimiento de discretización parcial "MEFDIF" para un intervalo de frecuencias dado se logra disminuir el error de fase respecto a las discretizaciones "DIF" y "MEFMEF".

3. EJEMPLOS NUMERICOS

Los ejemplos numéricos seleccionados permiten predecir el comportamiento de la solución numérica en diferentes fenómenos de la transformación del oleaje, ya sea por efecto del fondo, o por la presencia de un obstáculo.

3.1- Propagación de ondas sobre fondo horizontal.

La propagación del oleaje sobre un fondo horizontal, se comporta como un tren de ondas progresivas que avanza conservando la dirección de propagación.

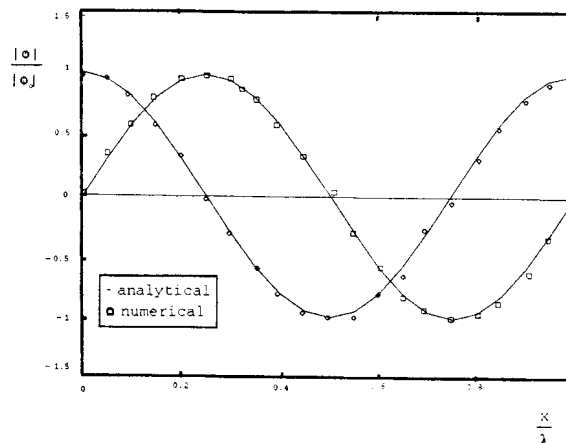


Figura 2. Amplitudes de ondas progresivas sobre un fondo plano. Comparación entre la solución analítica y numérica.

En tal caso consideramos un tren de ondas monocromáticas de periodo $.8007s$ que incide normalmente en un dominio rectangular de 1.0 longitud de onda en la dirección x , por $1/20$ longitudes de onda en la dirección y . Se seleccionó una resolución de 20 elementos por longitud de onda y con el objetivo de evaluar la funcionalidad de la condición absorbente (DNL) al fondo del dominio de cálculo, se impuso una condición entrante tipo Rossby, y condiciones de contorno laterales tipo Neumann. La solución mediante elementos finitos mostrada en la Figura 2, demuestra un correspondencia absoluta con la solución analítica para una profundidad $h = 10m$.

3.2- Foco ondulatorio detrás de una elevación circular sumergida que descansa sobre un fondo plano.

Con el propósito de demostrar la importancia de la condición de frontera DNL , nosotros investigamos el foco de un tren de ondas monocromáticas detrás de una elevación circular sumergida, que descansa sobre un fondo plano (Ensayo de Ito & Tanimoto, 1972)[7]. Debido a la simetría axial de la elevación del fondo, los patrones del foco ondulatorio detrás de la elevación son independientes del ángulo de incidencia, si el modelo predice esto correctamente. La profundidad del agua sobre el fondo plano $h_1 = 0.15m$, y la profundidad del agua en la región de la elevación es descrita por

$$h = h_2 + 0.15625 \left[(x - 1.2)^2 + (y - 1.2)^2 \right], \quad (10)$$

donde $h_2 = 0.05m$ es la profundidad en la cresta de la elevación. Un tren de ondas monocromático con una altura de $1.04cm$, y un periodo de $0.511seg$ entra en el dominio con un ángulo de incidencia de $\theta_o = 0$ grado.

En este experimento se estudiaba la transformación de un tren de ondas periódico al pasar sobre una elevación del fondo ("shoal"), y en el que se reproducía el efecto

combinado de refracción y difracción. Según la teoría de rayos, se produce un cáustico tras sobrepasar el "shoal" prediciendo por lo tanto alturas de olas indefinidas.

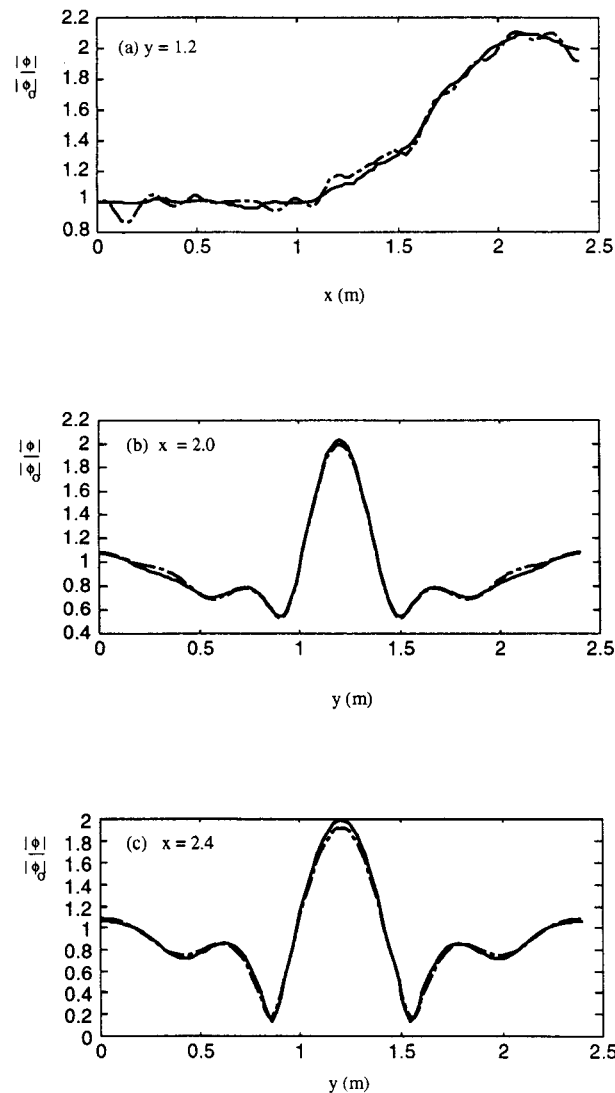


Figura 3. Comparación de los resultados del modelo usando la condición de frontera de primer orden y la condición de frontera DNL, en términos de la amplitud normalizada de la onda, con respecto a la onda incidente en diferentes secciones (-, DNL; -.-, first order local boundary condition).

Los resultados numéricos presentados aquí son obtenidos con la condición de frontera DNL colocada a una 1.0 longitud de onda del "shoal" y despreciando el efecto de la

componente ϕ^- sobre la capa de la frontera. Para tres secciones diferentes en la Figura 3 mostramos una comparación entre los resultados numéricos del método de Galerkin con una condición de frontera local de primer orden y con la condición de frontera DNL. Tal comparación se hace mediante los resultados de la amplitud normalizada a lo largo de secciones en el modelo. La sección ' $y = 1.2$ ' representa amplitudes a lo largo del tanque, mientras que las secciones ' $x = 2.0$ y $x = 2.4$ ' presentan los resultados paralelos al generador. En la Figura 3a) que corresponde al eje central longitudinal del tanque de ensayos, los dos modelos reproducen bien el aumento de amplitud en la formación del cáustico principal, aunque es significativo el efecto de las reflexiones en la frontera (al fondo del tanque) del dominio computacional con la condición de primer orden.

Los perfiles de las Figuras 3b) muestran el mayor grado de desarrollo del cáustico y ambos modelos predicen bien el máximo del cáustico.

Los perfiles de la Figura 3c) sobreestiman ligeramente la amplitud del cáustico principal y de forma más importante los valores de mínima amplitud, próximo a los puntos anfídomos que aparecen en el ensayo.

Los resultados numéricos presentados aquí empleando la condición de frontera DNL muestran una buena correspondencia con los resultados experimentales de Ito & Tanimoto, para el caso $H_i/L_i = 0.0026$, siendo H_i y L_i la altura y longitud de la onda incidente, los cuales, pueden ser encontrados en la literatura referenciada[5,7], etc. A diferencia del caso rectangular el procedimiento de cálculo empleado en el caso de coordenadas cilíndricas debido a que las matrices A^j , B^j y C^j dependen de los valores del radio y del elemento diferencial de arco, se calcula primero la matriz DNL en el campo alejado (donde la curvatura es despreciable con respecto a λ), y después en forma recursiva se calculan las matrices DNL correspondientes hasta el radio de interés, mediante la expresión $-(A^j * F^{(j+1)} + B^j)^{-1} * C^j$, para $j = M-1, M-2, \dots, 1$. En este proceso, si bien el tiempo de CPU se incrementa con el radio exterior r_b , la cantidad de memoria RAM requerida no.

3.3- Un cilindro infinito pulsando.

Consideremos un cilindro circular vertical de radio a pulsando uniformemente[6]. La frontera artificial está ubicada en $R = 2a$.

El dominio computacional resultante es discretizado con 660 nodos. Nosotros examinamos el problema con condiciones de frontera tipo Dirichlet sobre la frontera física. Los resultados numéricos preservan la simetría cilíndrica de la solución exacta como se aprecia en la Figura 4.

3.4 - Radiación armónica circunferencialmente de un cilindro.

Consideremos en tal sentido una carga distribuida $\cos(n\theta)$, sobre un cilindro de radio a . El dominio computacional fue discretizado con 660 nodos. Nosotros examinamos el quinto modo circunferencial $n = 4$, y el número de onda adimensional $ka = \pi$ (la longitud de onda es igual al diámetro del cilindro)

La Figura 5 muestra la comparación entre las partes imaginarias de la solución numérica y analítica para el caso $n = 4$. Se pudo apreciar que colocando la frontera del dominio de cálculo a 0.1 longitudes de ondas del contorno $R = 2a$ se obtiene una solución numérica, que se corresponde adecuadamente con la solución exacta.

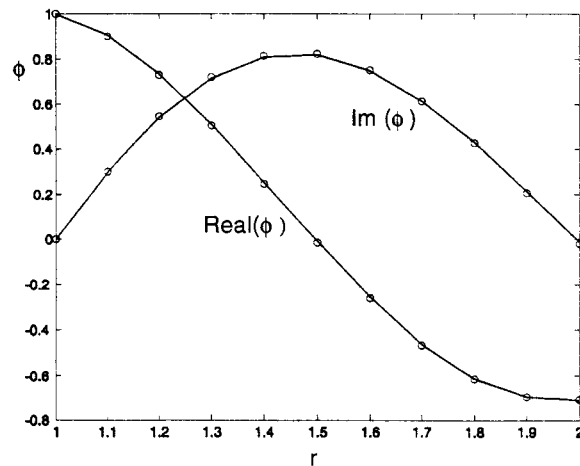


Figura 4. Cilindro de radio a pulsando uniformemente; $R = 2a$, $ka = \pi$, 20 elementos/ λ . (-) Solución analítica, (o) solución numérica.

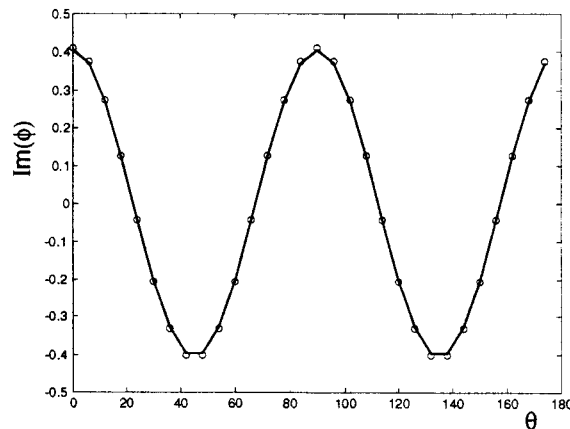


Figura 5. Radiación armónica circular ($n=4$) de un cilindro de radio a , $ka = \pi$, a lo largo de la frontera artificial $R = 2a$.

Con la idea de investigar el comportamiento de la condición DNL respecto a la condición DtN , tomemos como modelo la radiación circular de ondas armónicas. Para ello calculamos el error absoluto del vector $\phi^{j+1} - F.\phi^j$ colocando la frontera artificial a una distancia $R = .1\lambda$ de la frontera del dominio físico de cálculo.

Sustituyendo ϕ^j por la expresión exacta $\exp i(k_y h_y l + \sqrt{k^2 - k_y^2} h_x j)$. La Figura 5 describe el error absoluto modal $|\rho_m|$ respecto al cociente $\frac{n}{kR}$ en el caso de modos circulares progresivos, obteniéndose errores del mismo orden por ambos procedimientos, y según se aprecia existe un factor 2 en el que difiere la condición DNL de la condición DtN .

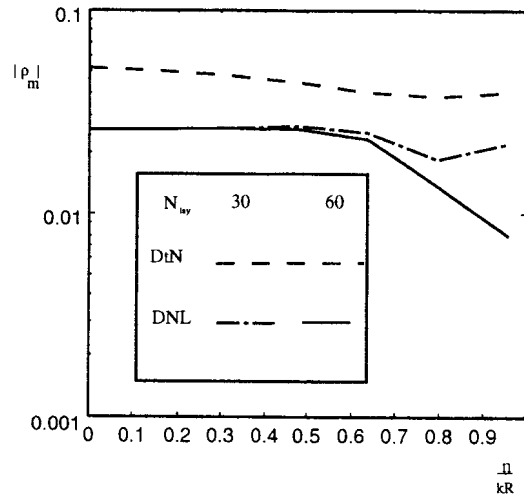


Figura 6. Radiación armónica circunferencial de un cilindro de radio a , $ka = \pi$, a lo largo de la frontera artificial $R = 2.2a$. Comparación DNL - DtN para $N_{xy} = 30, 60$.

CONCLUSIONES

El método *DNL* ha sido propuesto para incorporar la condición de radiación en el infinito de forma exacta en un esquema numérico. Mediante la condición *DNL* se obtiene una condición de frontera no-reflejante hasta los N_{xy} modos transversales definidos por el número de nodos sobre la frontera absorbente, la cual origina una matriz cíclica y llena que acopla todos los nodos de dicho contorno. El procedimiento *DNL* es verificado mediante casos pruebas con soluciones analíticas, y aproximadas, encontrándose una buena correspondencia entre las soluciones numéricas y las soluciones patrones, respectivamente. En este trabajo se muestra la convergencia de la condición *DNL* a la condición completamente absorbente del continuo, cuando hacemos tender hacia cero la distancia nodal, independientemente del método de discretización empleado. Las ventajas del procedimiento *DNL* radican en que las operaciones se realizan en el medio discreto, a diferencia de las condiciones teóricas aproximadas de tipo locales y parabólicas, y de la condición no-local tipo *DtN* donde se requiere el conocimiento de un sistema base de funciones del operador a resolver, lo cual se dificulta con el aumento de la anisotropía del medio.

El proceso de cálculo de la *DNL* se basa en el uso de los procedimientos del paquete LAPACK para la determinación de los autovalores. El proceso computacional en la versión en coordenadas rectangulares desarrollado aquí no incrementa ni el costo ni el tiempo de CPU, mientras que en coordenadas cilíndricas, se incrementa el tiempo de CPU con el radio exterior r_b , pero no así la cantidad de memoria RAM requerida.

Agradecimientos

Este trabajo ha recibido soporte financiero del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET, Argentina) mediante el proyecto BID 802/OC-AR

PID Nr. 26, y de la *Universidad Nacional del Litoral* (Argentina). Nosotros hemos hecho uso extensivo de los programas distribuidos por la "*Free Software Foundation / GNU-Proyect*": Linux ELF-OS, Octave por John W. Eaton, Tgif por William C. Cheng, el compilador Fortran f2c, y otros.

REFERENCIAS

- 1.- Berkhoff, J.C.W.(1976) *Mathematical Models for simple Harmonic Linear Water Waves. Wave Diffraction and Refraction.* Delft Hydraulic Laboratory. Public. Nro.163.
- 2.- Bonet.R.P.; Nigro,N ; Storti,M.A.(1997) Condición absorbente discreta no-local (DNL) en diferencias finitas para modelos elipticos de propagación de ondas en el mar.(Reporte interno),May 1997.
- 3.- Bonet.R.P.; Nigro,N ; Storti,M.A.(1997) Condición absorbente discreta no-local (DNL) en elementos finitos para modelos elipticos de propagación de ondas en el mar.(Reporte interno),May 1997.
- 4.- Chen,Y.& Liu,P.L.-F.(1994) A pseudospectral approach for scattering of water waves. *Proc.R.Soc.Lond.A*445,619-636.
- 5.- Duck, K.S., Dalrymple, R.A.& Kirby, J.T. (1990) An angular spectrum model for propagation of Stokes waves. *J.Fluid Mech.*, vol. 221,pp.205 - 232.
- 6.- Harari I.& Hughes Thomas J.R. Galerkin/least - square finite element methods for the reduced wave equation with non - reflecting boundary conditions in unbounded domains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 98 (1992), 411 - 454, North - Holland.
- 7.- Ito, Y. and K. Tanimoto (1972). A method of numerical analysis of wave propagation-application to wave diffraction and refraction. *Proceedings of the 13th International Conference on Coastal Engineering*, ASCE, New York.
- 8.- Smith, R. & Sprinks, T. (1975) Scattering of surface waves by a conical island. *J. Fluids Mech.* 72, 373 - 384.