

Influencia de la Infiltración en la Propagación de la Onda Cinemática

Ariel Fraidenraich

Dpto. de Matemáticas
Facultad de Ingeniería U.B.A.
Paseo Colón 850 - Capital Federal
afraide@aleph.fi.uba.ar

Walter E. Legnani

Instituto de Cálculo
Facultad de Cs. Exactas y Naturales U.B.A.
Ciudad Universitaria (1428) - Capital Federal
walter@ic.fcen.uba.ar

Resumen

Se ha realizado un modelo de evolución de onda cinemática en canales unidimensionales con lecho permeable saturado. Se calculó la infiltración en el medio poroso modelado por una ecuación de conservación de masa en un volumen diferencial de suelo, que se resolvió numéricamente por medio de un esquema en elementos finitos. Para la propagación de la onda cinemática en el canal se tomó esta infiltración como término fuente, y la ecuación correspondiente se resolvió numéricamente en diferencias finitas a través del esquema de Lax - Friedrichs. Se compararon resultados de alturas de crecidas con y sin infiltración, y para distintos valores de permeabilidad isotrópica.

Abstract

We modelled the evolution of one dimensional kinematic wave on permeable saturated bed. The infiltration in the porous media is modelled through the equation of mass conservation in a differential volume of the ground, it was solved by a 2D finite element scheme. For the propagation of the kinematic wave in the open channel the infiltration is a source term and the correspondent equation was solved through the finite difference scheme of Lax - Friedrichs. The results were compared in both cases with and without infiltration, and for different values of isotropic permeability.

Introducción

El modelo de onda cinemática es un esquema simplificado para el estudio de la evolución de crecidas en canales con superficie libre (ver Lighthill y Whitham [4]). En este trabajo se plantea la propagación de crecidas sobre un canal unidimensional con un lecho poroso saturado. De esta forma la ecuación de propagación de onda cinemática tradicional es acompañada por el laplaciano que representa la modelización de la altura piezométrica instantánea.

En la etapa inicial del trabajo se planteo analizar los efectos de la infiltración en la distribución de la superficie libre y la velocidad en la propagación de onda, para luego utilizarlos como entradas en la resolución del problema inverso, es decir, midiendo diferencias de alturas y velocidades de propagación poder inferir cómo es la permeabilidad del suelo. Dichas inferencias podrían servir para determinar indirectamente las características de resistencia al corte y las tensiones normales del suelo en las zonas aledañas al cauce. Esto es aplicable para realizar eventuales fundaciones con costos de estudio de suelos varias veces menores que lo que se hace tradicionalmente.

Otras aplicaciones de interés podrían ser conocer las características del suelo para la construcción de ataguías provisorias para hacer un desvío de río y luego construir una central hidroeléctrica.

Paralelamente se realizó un estudio de las curvas altura-caudal en base a la bibliografía de referencia.

En base a observaciones de las curvas altura-caudal que se han tomado tradicionalmente como instrumento para resolver problemas de diseño de represas se ha encontrado en la literatura la forma general de las mismas que es propuesta en este trabajo.

Ecuaciones del modelo

El modelo propuesto en el presente trabajo consta de las siguientes ecuaciones: (ver una interesante discusión al respecto en [2] y [3])

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c(Q) \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{q}{B} \quad (1)$$

$$c(Q) = \alpha Q^\theta \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

$$\vec{v} = -k \nabla \varphi \quad (4)$$

$$q_i = \int_{\sigma} \vec{v} \cdot d\vec{s} \quad (5)$$

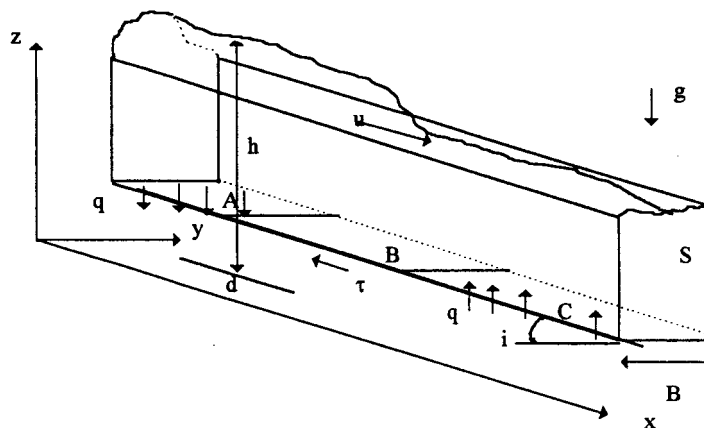
$$\alpha = \beta C_n i^{1/2} \quad (6)$$

$$Q = \{ \varepsilon (h, \text{Max}\{q_i\}) + h \}^\beta \quad (7)$$

en donde: $Q(h(x,t))$ es el caudal de flujo por unidad de ancho, $c(Q)$ es la velocidad de propagación de la onda, q es el caudal de infiltración, $B(x)$ ancho del canal en función de la coordenada longitudinal. x y z son las coordenadas espaciales en la dirección del flujo y en la vertical respectivamente, t es la variable temporal, β es un parámetro de la ley altura caudal

que se halla entre 1.5 y 2.0, $\theta = (\beta-1) / \beta$, φ es la altura piezométrica ($\varphi = p/\gamma + z$, siendo p presión, γ el peso específico del fluido, z altura geométrica), k es el coeficiente de permeabilidad, \vec{v} es el vector de velocidad del fluido en el medio poroso, $d\vec{s}$ es el vector diferencial de área en el estrato superficial de la frontera del suelo, C_k es el coeficiente de Chézy, i es la pendiente de la solera del canal, $\varepsilon(h)$ es una función de h utilizado como un parámetro de control, σ es la superficie frontera dada por el contorno del suelo.

Figura 1



Como se ve en la figura 1, h es la altura del fluido respecto de una cota de referencia, S es la sección transversal al flujo, B es el ancho del canal, g es la gravedad, τ es la tensión de corte del fondo, (x,y,z) son las componentes de una terna cartesiana ortogonal. A y C son tramos del canal en donde hay transferencia de caudales con el lecho poroso, B es un tramo del canal poroso pero las velocidades en el suelo son paralelas a la solera del canal, y por lo tanto no existe transferencia de caudales, d es dato de referencia (cota de alturas).

Resolución Numérica

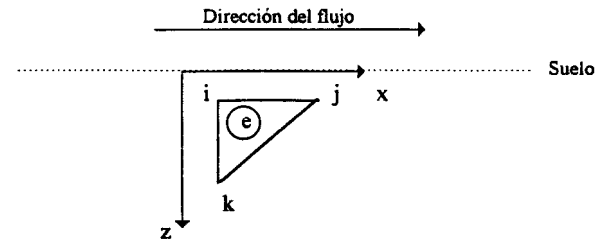
Se ha resuelto el sistema de ecuaciones (1) a (7) mediante un esquema mixto de diferencias finitas y de elementos finitos. El esquema en diferencias se resolvió mediante el método de Lax [8], aplicado sobre la ecuación (1). Para las ecuaciones (3), (4) y (5) se discretizó el dominio del suelo en elementos finitos triangulares y luego se resolvió el esquema variacional (es decir integrando el laplaciano por partes con funciones de prueba admisibles en el marco de una formulación débil). El problema de la infiltración en el suelo se resuelve de forma independiente del tiempo para cada intervalo de integración, en el instante inicial se supone que toda la solera del suelo es impermeable. Los cálculos realizados en elementos

finitos dan como resultado ϕ nodales, con estos valores se calcula q (ver ecuación (5)) en el borde que es el término fuente en la ecuación (1).

La evolución temporal viene dada por la ecuación (1) de la onda cinemática.

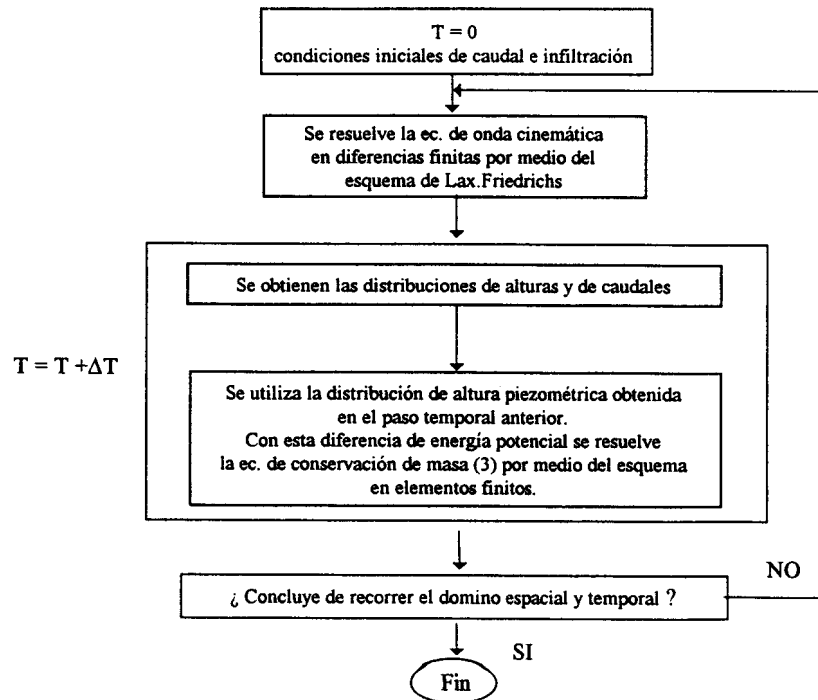
El dominio computacional de elementos finitos que representa al suelo se discretizó de la siguiente manera: (para ver mas detalles [6] y [7])

Figura 2



siendo i, j, k , nodos del elemento e numerados en sentido antihorario.
 $1 \leq e \leq 125$, siendo 125 el número total de elementos.

El procedimiento antes descrito se puede resumir en el siguiente diagrama:



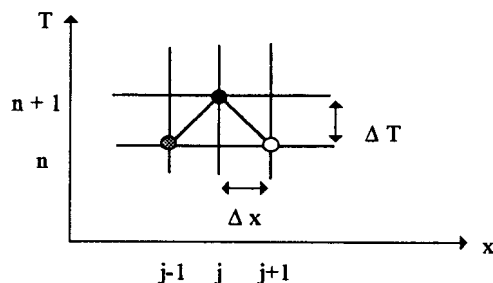
Descripción del esquema de Lax - Friedrichs

El esquema básico en diferencias finitas utilizado fue el de Lax-Friedrichs, cuya expresión siguiendo a Lax [8] y a Leveque [1] es:

$$Q_j^{n+1} = \frac{1}{2} (Q_{j-1}^n + Q_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2 \Delta x} c_j^n (Q_{j+1}^n - Q_{j-1}^n) + \frac{q_j^n}{B_j} \quad (8)$$

que es un método en diferencias finitas de primer orden (para mas detalles ver Leveque [1]) aplicable a una malla como la siguiente:

Figura 3



en donde:

$$\circ = Q_{j+1}^n, \bullet = Q_{j-1}^n, \bullet = Q_j^n$$

cumpliendo que $j = 1, \dots, (L / \Delta x) - 1$, y $n = 1, \dots, t / \Delta T$.

Experimentos numéricos

Las experiencias numéricas se realizaron sobre un canal con las siguientes características físicas: ancho unitario $B = 1$ m., pendiente topográfica $i = 10^{-4}$ m/m, longitud $L = 12500$ m. coeficiente de rugosidad $C_h = 60$ m^{1/2}/s, coeficiente de permeabilidad $k = 5 \cdot 10^{-3}$ m/s. (según [5]).

Características del flujo: el coeficiente α de la relación altura caudal sale de las ecuaciones (6) y siguientes, el coeficiente β se tomo igual a 1.5, caudal inicial del fluido 2.23 m³/s.

Características numéricas: $\Delta x = 500$ m, $\Delta T = 30$ s.

Condiciones de contorno:

Se realizaron varios experimentos con diferentes condiciones de borde:

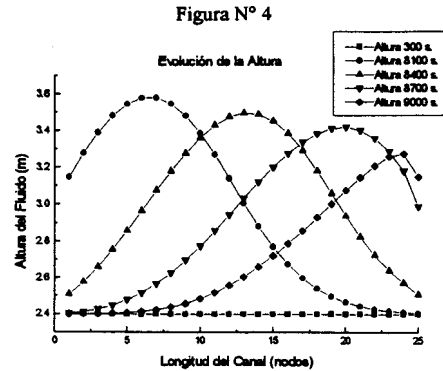
a - Crecida aguas arriba con un hidrograma tipo campana de Gauss.

b - Crecida abrupta aguas arriba, de un caudal base de 2.23 m³/s pasa a 4 m³/s.

Además se efectuaron experimentos numéricos cambiando las pendientes y anchos por tramo del canal de simulación, como así también se ensayó con distintas permeabilidades del suelo.

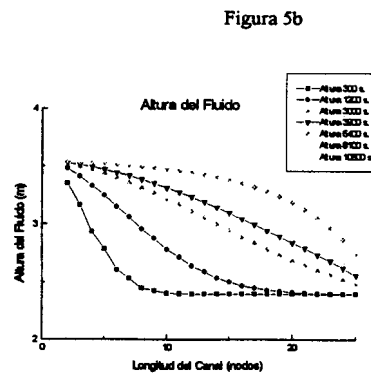
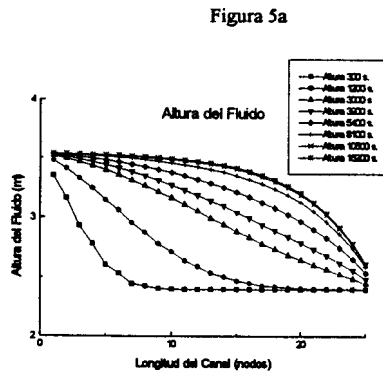
a) Crecida aguas arriba con un hidrograma tipo campana de Gauss

En base a una curva gaussiana con esperanza de 7500 segundos, con dispersión igual a 1875 segundos, se simuló una crecida aguas arriba y su evolución a lo largo del canal con una constante de permeabilidad de $5 \cdot 10^{-3}$ m/s que se muestra en la siguiente figura.



b) Crecida abrupta aguas arriba:

De un caudal base de $2.23 \text{ m}^3/\text{s}$ pasa a $4 \text{ m}^3/\text{s}$, con coeficiente de permeabilidad de $5 \cdot 10^{-3}$ m/s. En la figura 5a se muestra la evolución de la altura para un canal impermeable ($K < 10^{-8}$ m/s) y en la 5b para un canal con una permeabilidad de $5 \cdot 10^{-5}$ m/s.



Velocidades en el medio poroso

Las velocidades del fluido infiltrado en el medio poroso se exhiben en las figuras 6a y 6b para las direcciones x e y respectivamente, para un suelo con permeabilidad igual a la del caso anterior, que representa un lecho constituido por un limo inorgánico típico.

Figura 6a

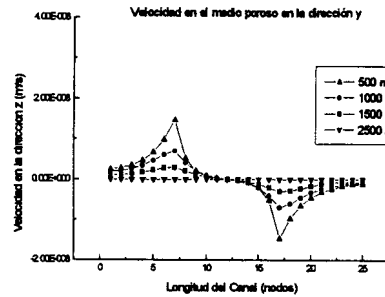
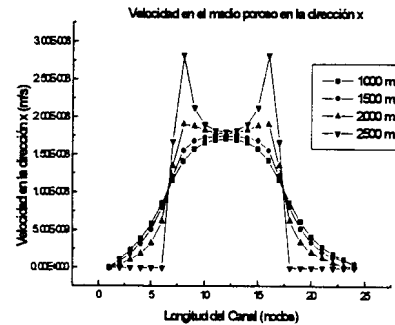


Figura 6b

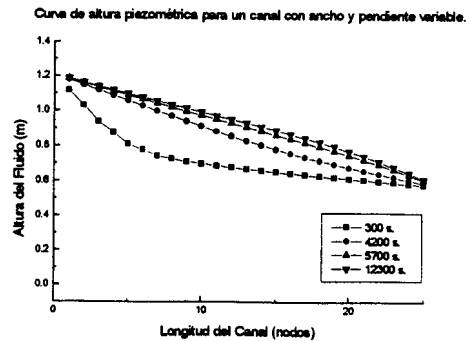


Velocidades en el medio poroso: 6a) en el eje z - 6b) en el eje x.

Experimento con un canal de ancho y pendiente del terreno variable

Se diseñó una experiencia simulando un canal de ancho variable con crecimiento linealmente uniforme en el sentido de propagación del fluido, con un ancho inicial de 50 m y final de 60 m. Y además se varió por tramos la pendiente de lecho del canal, en el primer tramo la misma fue de 10^{-4} m/m creciendo linealmente en el sentido de aguas abajo hasta alcanzar un valor de 10^{-3} m/m.

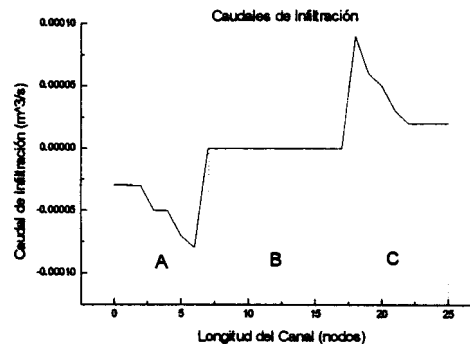
Figura 7



Caudales de Infiltración

En la figura 8 se exhiben los caudales de infiltración para un canal característico simulado. Dividido en tres regiones, A, B y C; A es un tramo en donde el caudal de infiltración fluye hacia el suelo, comportándose como una región en la que el suelo es un sumidero. B es una región en donde no hay intercambio de masa entre la frontera del suelo y el canal, dado que en esta región las líneas de corriente del flujo en el suelo son paralelas al contorno geométrico. C es el tramo final en donde el caudal de infiltración fluye desde el suelo hacia el canal, por lo tanto esta región se comporta como una fuente para el caudal del canal.

Figura 8



Caudales de infiltración en función de la longitud del canal

Las longitudes de los tramos A, B y C dependen de las características físicas del suelo, de la geometría del problema y de la diferencia de la energía potencial de la columna de fluido aguas arriba y aguas abajo.

Se puede pensar que el tramo A es un sumidero continuo distribuido a lo largo de la frontera entre el canal y el suelo. Análogamente C es una fuente continua y B es un tramo en el cual no hay fuente ni sumidero pues las velocidades sólo tienen componentes en la dirección de propagación del fluido del canal, según se puede observar en la figuras 6a y 6b.

Análisis de Resultados

- ♦ En la figura 4 los hidrogramas muestran la deformación característica de la propagación de la onda cinemática (ver Henderson F. M. [9]).
- ♦ En las figuras 5a y 5b se puede apreciar con mayor detalle la incidencia del lecho permeable en la forma de la propagación de la crecida.

- ◆ De las figuras 6a y 6b se observa que se cumple la conservación del caudal en el medio poroso, que además se verificó numéricamente integrándolo y obteniendo esta conclusión.
- ◆ La forma pronunciada de las curvas de velocidades en el medio poroso es debida a que se ha interpolado con funciones de base lineales fenómenos físicos que provienen del gradiente de estas funciones.
- ◆ El tiempo de simulación en una computadora personal con un microprocesador de 133 Mhz. fue de 2 horas, este hecho permitió realizar numerosos ensayos del modelo.
- ◆ Si bien el orden de aproximación del método en elementos finitos es de orden 2 (ver [6]) el esquema en diferencias finitas es de primer orden.

Conclusiones

- ◆ Si bien localmente el caudal en el canal no se conserva por la presencia del término fuente, globalmente se verifica dentro de los errores experimentales la conservación total del caudal que fluye a través del canal y del suelo.
- ◆ Quedaron armados dos módulos de software que se pueden interconectar con otras aplicaciones haciendo de ello una herramienta muy versátil.
- ◆ Se evaluó la eficiencia del método numérico de los elementos finitos comparándolo con un método en diferencias finitas, de Gauss-Seidel y se observó que para la interpolación de los valores nodales las diferencias máximas eran del orden de 10^{-6} m, para las alturas piezométricas. Además las diferencias en la velocidad en la dirección del eje x en la sección de simetría es del orden del 5 %.
- ◆ El objetivo de este trabajo fue implementar un instrumento que permita realizar mediciones indirectas para determinar en forma cualitativa la permeabilidad del suelo donde se fundarían por ejemplo ataguías provisionarias para el desvío de ríos.
- ◆ La infiltración de masa líquida en el suelo representada por una ecuación parabólica (ver Bear [5]) se resolvió por medio de una secuencia de ecuaciones elípticas (ecuación (3)) que fueron ajustando a lo largo del tiempo la piezométrica instantánea.
- ◆ El modelo propuesto es una alternativa para cuantificar magnitudes (por ejemplo velocidades de infiltración) muy difíciles de medir en la práctica.

Agradecimientos:

Los autores del presente trabajo desean dejar expresado su agradecimiento al Dr. Pablo M. Jacovkis por su supervisión y valiosos comentarios en la producción de este proyecto.

Bibliografía

- [1] *Numerical Methods for Conservation Laws*
LeVeque J. R.
Birkhäuser Verlag, 1990.
- [2] *Solución del Flujo en Canales y del Flujo de Agua Subterránea Usando un Modelo Acoplado en Elementos Finitos.*
Vionnet L. y Vionnet C. A.
Mecánica Computacional Vol. XVII, pp. 295-304. Tucumán, Septiembre de 1996.
- [3] *A Kinematic Wave Model for Rivers with Flood Plains and other Irregular Geometries*
P. M. Jacovkis - E. G. Tabak
Mathl. Comput. Modelling Vol. 24 N° 11, pp. 1-21, 1996.
- [4] *Flood Movement in Long Rivers - On Kinematic Waves I*
Lighthill & Whitham
Proceedings of the Royal Society, pp. 281-291, 1955
- [5] *Dynamics of Fluids in Porous Media*
Bear J.
American Elsevier Publishing Company, New York 1967.
- [6] *Finite Elements and Approximations*
Zienkiewicz O. C.
Wiley Interscience Publications, U.S.A., 1983
- [7] *Numerical Solution of P.D.E. by the Finite Elements Method.*
Jhonson C.
Cambridge Academic Press, 1987.
- [8] *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*
Lax P. D.
Society for Industrial Applied Mathematics, 1973
- [9] *Open Channel Flow*
Henderson, F. M.
Macmillan Company, New York, 1966, Pag. 370