

VIBRACIONES DE UNA PLACA ORTOTROPA CANTILEVER:

SOLUCIÓN MEDIANTE EL METODO DE RAYLEIGH-RITZ

OPTIMIZADO Y COMPARACIÓN CON ELEMENTOS FINITOS

Patricio A.A. Laura, Diana V. Bambill, Raúl E. Rossi,

Fernando De la Calle\* y Diego Concolino\*\*

Instituto de Mecánica Aplicada (CONICET) y

Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur

8000 - Bahía Blanca

A R G E N T I N A

RESUMEN.

Se analiza el problema de vibraciones transversales de la estructura en cuestión mediante un pseudo-desarrollo de Fourier del tipo

$$\sin^2 \frac{\pi x}{\gamma_1 a} \cos \frac{\pi y}{\gamma_2 b} \quad ; \quad \gamma_1, \gamma_2 > 1$$

El coeficiente de frecuencia fundamental es minimizado con respecto a los parámetros  $\gamma_1, \gamma_2$ .

Se demuestra que los autovalores están en buena concordancia con las predicciones de un código de elementos finitos.

ABSTRACT.

The fundamental frequency of transverse vibration of rectangular, cantilever, orthotropic plates is determined by means of the optimized Rayleigh-Ritz method using a pseudo-Fourier expansion of the type:

$$\sin^2 \frac{\pi x}{\gamma_1 a} \cos \frac{\pi y}{\gamma_2 b} \quad ; \quad \gamma_1, \gamma_2 > 1$$

The fundamental frequency coefficient is optimized with the respect to the  $\gamma$ 's. It is shown that the results are in good agreement with the predictions of a finite element code.

INTRODUCCIÓN.

Es bien conocido el hecho de que la solución analítica exacta de problemas de vibraciones de placas rectangulares con bordes libres se torna extremadamente difícil en virtud de la complejidad ocasionada por la estructura matemática de las condiciones de Kirchhoff. Obviamente esta dificultad se presenta en los tres lados libres de una placa rectangular en voladizo y se torna aun mayor cuando la placa cantilever posee geometría triangular o trapezoidal, Figura 1.

En el caso de placas de material isotropo diversos autores han atacado el problema utilizando, en general, el clásico

\* Alumno de la carrera de Ingeniería Industrial, UNS.

\*\* Alumno de la carrera de Licenciatura en Física, UNS.

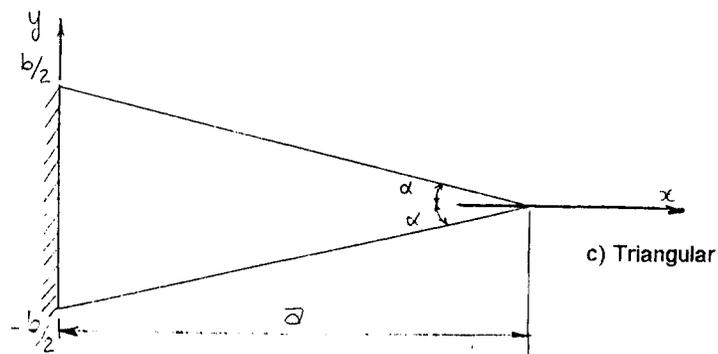
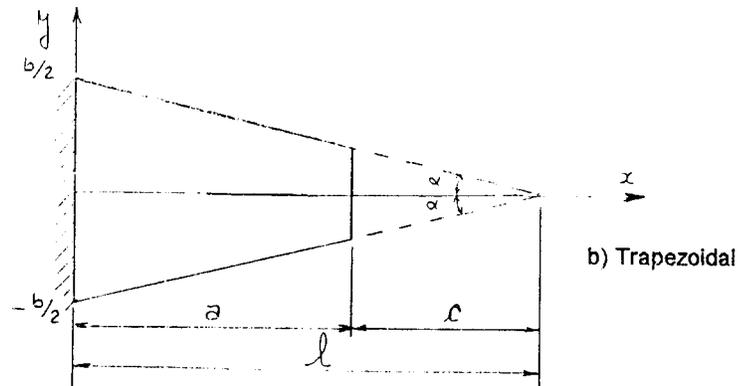
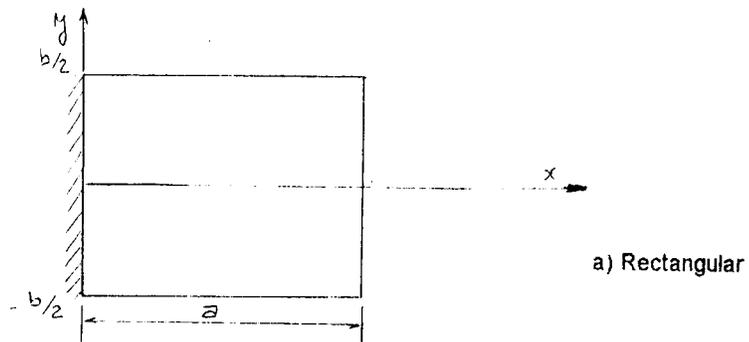


Figura 1: Placas en Voladizo Vibrando en el Modo Fundamental.

método de Rayleigh - Ritz [1]. Por supuesto: si uno desea una solución numérica es el método de elementos finitos el que se presta admirablemente bien para este tipo de problema de la mecánica estructural.

Por otra parte no existen prácticamente resultados en la literatura técnico-científica para el caso de placas de materiales ortotropos.

En este trabajo se presenta una solución aproximada del problema de vibraciones transversales de una placa rectangular ortótropa en voladizo expresando al modo fundamental de vibración en la forma:

$$W(x,y) \approx W_a(x,y) = \sum_{j=1}^J A_j \sin^2 \frac{\pi x}{\gamma_j a} \cos \frac{\pi y}{\gamma_{j+1} b}; \gamma_1, \gamma_2 > 1 \quad (1)$$

Mediante la utilización del clásico método de Rayleigh-Ritz se genera el determinante secular cuya raíz menor constituye el coeficiente de frecuencia en estudio. Dicho parámetro de frecuencia es luego minimizado con respecto a los  $\gamma_j$  y  $\gamma_{j+1}$  contenidos en los argumentos de las funciones trigonométricas contenidas en la expresión (1).

Esta optimización de autovalores\* fue sugerida por Lord Rayleigh hace más de un siglo. El uso de funciones coordenadas trigonométricas conteniendo parámetros de optimización en su argumento ha sido sugerido recientemente [5].

#### APLICACIÓN DEL MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ OPTIMIZADO.

Substituyendo (1) en la funcional gobernante [6]:

$$J[W] = \frac{1}{2} \int_0^a \int_{-b/2}^{b/2} \left[ D_1 \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + 2 D_1 \nu_2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + D_2 \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 4 D_k \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy - \frac{\rho \omega^2}{2} h \iint W^2 dx dy \quad (2)$$

donde  $D_k = \frac{1}{2} (D_3 - \nu_2 D_1)$  y siendo  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_3$ : las rigideces flexional de la placa ( $D_1 = D_2 = D$  en el caso de una placa isotropa), y minimizando la funcional energética (2) con respecto a las  $A_j$ 's se obtiene un sistema lineal de

\* La Referencia 2 contiene un tratamiento completo del problema. Stodola utilizó el criterio al determinar la frecuencia fundamental de un alabe [3]; Linus Pauling y Bright Wilson en problemas de física cuántica [4]; Timoshenko y Goodier en un problema de torsión y Schmidt y Bert (EE.UU.) en diversos problemas de vibraciones y pandeo [2]. Como se señala en la Referencia 2 diversas aplicaciones se han realizado en Argentina en el Instituto de Mecánica Aplicada, la Facultad Regional Bahía Blanca y la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata.

ecuaciones homogéneas en las  $A$ 's. De la condición de no trivialidad resulta un determinante-ecuación cuya raíz menor es el coeficiente de frecuencia fundamental,

$$\Omega_1 = \sqrt{\rho h/D_1} \omega_1 b^2$$

Dado que

$$\Omega_1 = \Omega_1(r_1, r_2, \dots, r_n) \quad (3)$$

minimizando  $\Omega_1$  con respecto a los parámetros  $r_i$ , se optimiza valor de  $\Omega_1$ .

#### RESULTADOS NUMÉRICOS Y CONCLUSIONES.

La Tabla 1 presenta valores de  $\Omega_1$  determinados por los autores en la Referencia 10 tomado  $J = 3$  en (1).

En el caso de la placa isotropa los valores determinados analíticamente están en excelente acuerdo con los obtenidos por A.W. Leissa [7] quien utilizó funciones "viga" y obtuvo los autovalores de un determinante-ecuación de  $36 \times 36$ .

Por otra parte se ha utilizado el método de elementos finitos para calcular  $\Omega_1$  haciéndose uso del elemento

desarrollado en [8]. Estos resultados, de gran precisión, son ligeramente inferiores a los determinados en [7].

También se muestran en la Tabla 1 resultados de  $\Omega_1$  para el

caso de una placa ortótropa. Los valores determinados mediante elementos finitos han sido hallados usando el algoritmo presentado en [9] que es una extensión de [8]. El acuerdo entre valores analíticos y los calculados mediante elementos finitos es muy satisfactorio.

El enfoque analítico en cuestión ha sido utilizado en la Referencia 10 para calcular las frecuencias fundamentales de placas trapezoidales y triangulares, Figura 1 (b) y (c) respectivamente. Se ha usado la misma expresión aproximada (1) y luego se ha evaluado la funcional energética para los contornos geométricos correspondientes. Es de interés hacer notar el hecho de que en el caso en que  $tg\alpha = 1/2$  y  $c/l = 0.6$ , Figura 1(b), se encontró un error en la literatura

técnico-científica ya que la Referencia 1 muestra un valor

de  $\Omega_1 = \sqrt{\rho h/D_1} \omega_1 b^2 = 18.397$ . El presente enfoque analítico brinda  $\Omega_1 = 24.786$  que está en buen acuerdo con el que se acuerda con el que se obtiene usando el conocido código de elementos finitos ALGOR.

También resulta útil efectuar el siguiente razonamiento: tomando una placa rectangular en voladizo tal que  $a/b = 0.4$  se tiene  $\Omega_1 = 21.9418$  según Leissa [1], ver Tabla 1. Esta

placa rectangular "enmarca" a la placa trapezoidal en cuestión. Por el conocido fenómeno de rigidización dinámica uno deduce que al rebajar los lados horizontales de la placa rectangular, Figura 1(b), para lograr la placa trapezoidal, uno espera una estructura con mayor frecuencia fundamental ya que el efecto de la reducción en masa debe ser mayor que el efecto de la reducción en rigidez ya que se quita masa en mayor grado en la zona de la placa cuyo extremo está libre.

	a/b	2/5	2/3	1	3/2	5/2
	[7]	21.9418	7.8804	3.4917	1.5454	0.5530
Placa Isótropa $\nu = 0.30$	I	21.9552	7.8840	3.4959	1.5496	0.5558
	II	21.8605 *(1392)	7.8419 *(1008)	3.4714 *(624)	1.5349 *(1040)	0.5485 *(1456)
Placa Ortótropa $D_2/D_1 = 1/2$ $D_k/D_1 = 1/3$ $\nu_2 = 0.30$	I	21.9514	7.8662	3.4803	1.5387	0.5497
	II	21.7954 *(1392)	7.8014 *(1008)	3.4432 *(624)	1.5160 *(1040)	0.5380 *(1456)

TABLE 1 - Coeficiente de Frecuencia Fundamental de Placas Isótropas

( $\Omega_1 = \sqrt{\rho h/D} \omega_1 b^2$ ) y Ortótropas ( $\Omega_1 = \sqrt{\rho h/D_1} \omega_1 b^2$ ).

I - Método Optimizado de Rayleigh-Ritz.

II - Elementos Finitos.

\* Número de Grados de Libertad.

En consecuencia el  $\Omega_1$  del trapecoide debe ser mayor que el  $\Omega_1$  de la placa rectangular y por consiguiente: debe ser mayor que 21.9418.

El mismo fenómeno de rigidización dinámica se observa con placas triangulares isósceles, isótopas, en voladizo, enmarcadas en placas rectangulares en voladizo.

Expresando al coeficiente de frecuencia en términos del lado "a" uno tiene que el  $\Omega_1$  de la placa rectangular es del orden de 3.5; o sea

$$\Omega_1 = \sqrt{\rho h/D} \omega_1 a^2 \approx 3.50$$

para cualquier relación de lados.

En el caso de placas triangulares isósceles en voladizo resulta

$$\Omega_1 = \sqrt{\rho h/D} \omega_1 a^2 \approx 7$$

haciéndose muy evidente el fenómeno de rigidización dinámica.

#### AGRADECIMIENTOS.

El presente estudio ha sido auspiciado por la Secretaría General de Ciencia y Técnica de la Universidad Nacional del Sur y la Comisión de Investigaciones Científicas de la Pcia. de Buenos Aires.

#### REFERENCIAS.

- 1 - A.W. Leissa. 1969. Vibration of Plates. NASA SP 160.
- 2 - P.A.A. Laura. 1995. Ocean Engineering 22, 235-250. Optimization of variational methods.
- 3 - A. Stodola. 1927. Steam and Gas Turbines (traducido del idioma alemán) Mc Graw Hill Book Co., New York, N.Y.
- 5 - P.A.A. Laura, D.V. Bambill, V.A. Jederlinic, K. Rodríguez y P. Diaz. 1997. Journal of Sound and Vibration 200, 557-561. Rayleigh's optimization concept and the use of sinusoidal coordinate functions.
- 6 - S.G. Lekhnitskii. 1968. Anisotropic Plates Gordon and Breach Science Publishers, New York, N.Y.
- 7 - A.W. Leissa. 1973. Journal of Sound and Vibration 31, 257-293. The free vibration of rectangular plates.
- 8 - F.K. Bogner, R.L. Fox y L.A. Schmidt. 1966. Matrix methods in structural mechanics AFFDL-TR-66-80, 397-443. The generation of inter-element compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulas.
- 9 - R.E. Rossi. 1997. Department of Engineering, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina. Publication N°

97-1. A finite element code for vibrating orthotropic plates.

10 - D.V. Bambill, P.A.A. Laura y R.E. Rossi. 1997, Instituto de Mecánica Aplicada (CONICET). Publicación N° 97-30. Transverse vibrations of rectangular, trapezoidal and triangular orthotropic cantilever plates.

