

MINIMIZACION DEL FLUJO DE CALOR EN UN PROBLEMA ELIPTICO MIXTO CON RESTRICCIONES SOBRE LA TEMPERATURA

María C. Sanziel* - Domingo A. Tarzia**

*Consejo de Investigaciones de la Univ. Nacional de Rosario
Inst.de Matemática B. Levi - Fac.de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura, U.N.R.
Av. Pellegrini 250, (2000) Rosario, Argentina.
E-mail: sanziel@fceia.unr.edu.ar

**Dpto.de Matemática - CONICET, Fac.de Cs. Empresariales, Univ.Austral
Paraguay 1950, (S2000FZF) Rosario, Argentina
E-mail: Domingo.Tarzia@fce.austral.edu.ar

Palabras clave: conducción del calor, cambio de fase, elementos finitos, optimización.

Resumen

Se considera un problema estacionario de conducción del calor en un material que ocupa un dominio poligonal bidimensional acotado. La frontera del dominio está compuesta de dos porciones Γ_1 y Γ_2 de interiores disjuntos. En la porción de frontera Γ_2 se mantiene un flujo de calor saliente, en tanto que en la frontera Γ_1 el flujo de calor verifica una ley de tipo Newton con coeficiente de transferencia positivo. En el presente trabajo se obtiene un método numérico que permite resolver el problema de minimizar el flujo total impuesto sobre Γ_2 de manera que todo el material se encuentre en la fase sólida. Para ello se utiliza el método de los elementos finitos y se transforma el problema de optimización en un problema de programación lineal que se resuelve a través de un programa construido en MATLAB, el cual permite obtener el valor del flujo óptimo, en cada nodo de la correspondiente porción de frontera Γ_2 .

I.- INTRODUCCION

Se considera un problema estacionario de conducción del calor en un material Ω que ocupa un dominio poligonal acotado en \mathbb{R}^n , con frontera regular Γ . Se supone una temperatura de cambio de fase de 0°C . La frontera del dominio está compuesta de dos porciones de interiores disjuntos, Γ_1 y Γ_2 , de medida $(n-1)$ dimensional positiva. En la porción de frontera Γ_2 se mantiene un flujo de calor q mientras que sobre Γ_1 se tiene una condición convectiva de tipo Newton con coeficiente de transferencia $\alpha > 0$ y temperatura del entorno $b > 0$.

En un trabajo de E.D. Tabacman y D.A. Tarzia¹ se estudió este problema y se estableció que se trata de un problema de Stefan estacionario a dos fases, si el flujo constante q sobre Γ_2 se encuentra entre un flujo mínimo q_m y un flujo máximo q_M , los que dependen del coeficiente α y de la temperatura exterior b , es decir si q verifica: $q_m(\alpha, b) < q < q_M(\alpha, b)$

En el trabajo de R.L.V. González y D.A. Tarzia² se resolvió el problema de optimizar el flujo total impuesto sobre la frontera Γ_2 , para el caso en que sobre Γ_1 se imponga una condición de temperatura positiva, con la restricción de que la temperatura sea toda positiva en el dominio Ω (es decir que el material esté en su fase líquida).

Por otra parte, en el trabajo de R.L.V. González y D.A. Tarzia³ se encontró el flujo total máximo a imponer sobre la frontera Γ_2 , de manera que todo el material se encuentre en la fase líquida, para el problema con condición convectiva de tipo Newton sobre Γ_1 .

Siguiendo la idea de los trabajos mencionados, el objetivo del presente es disponer de un método numérico que permita minimizar el flujo impuesto sobre la frontera Γ_2 de manera que todo el material se encuentre en la fase sólida, para el caso particular $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Para ello se utiliza el método de los elementos finitos y se lleva el problema de optimización a un problema de programación lineal, el que se resuelve a través de un programa construido en MATLAB, el cual permite obtener el valor del flujo óptimo, en cada nodo de la frontera Γ_2 .

Los resultados obtenidos siguen siendo válidos si la frontera Γ de Ω es la unión de tres porciones Γ_1 , Γ_2 y Γ_3 tales que, sobre Γ_1 y Γ_2 las condiciones que se imponen son las ya enunciadas, en tanto que Γ_3 es una frontera impermeable al calor, es decir que sobre Γ_3 se impone una condición de flujo nula.

II.- MODELIZACIÓN DEL PROBLEMA

Si θ representa la temperatura en Ω y se hace la sustitución $u = k_l \theta^+ - k_s \theta^-$ (k_l y k_s son los coeficientes de conductividad térmica de las fases líquida y sólida respectivamente), entonces las siguientes ecuaciones modelan el problema:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} &= 0 && \text{en } \Omega \\ - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_1} &= \alpha(\mathbf{u} - B) \\ - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_2} &= q \end{aligned} \quad (1)$$

donde $B = k_l b$ y $b > 0$ es la temperatura exterior.

Se desea minimizar el flujo total de calor sobre Γ_2 con la restricción que la totalidad del material se encuentre en la fase sólida, es decir, el problema a resolver consiste en

$$\text{Hallar } \mathbf{q}^* \in L^2(\Gamma_2) \text{ tal que } \mathbf{J}(\mathbf{q}^*) = \underset{u \leq 0 \text{ in } \Omega}{\text{Inf}} \mathbf{J}(\mathbf{q}) \quad (2)$$

donde

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \int_{\Gamma_2} q \, d\gamma, \quad q \in L^2(\Gamma_2).$$

La formulación variacional del problema (1) viene dada por

$$u \in V: \quad a_\alpha(u,v) = L_\alpha(v), \quad \forall v \in V, \quad (3)$$

con

$$a_\alpha(u,v) = a(u,v) + \alpha \int_{\Gamma_1} uv \, d\gamma; \quad L_\alpha(v) = L(v) + \alpha B \int_{\Gamma_1} v \, d\gamma$$

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx; \quad L(v) = - \int_{\Gamma_2} q v \, d\gamma; \quad V = H^1(\Omega).$$

A continuación, discretizando el dominio Ω mediante elementos finitos de primer orden, se transforma el problema de optimización (2) en un problema de programación lineal.

III.- EL PROBLEMA DE PROGRAMACION LINEAL

A fin de obtener un problema discreto, se realiza una triangulación regular τ_h , del dominio poligonal Ω con triángulos de Lagrange de tipo 1, constituida por elementos finitos afín equivalentes de clase C^0 , y se aproxima al espacio V por V_h :

$$V_h = \left\{ v_h \in C^0(\bar{\Omega}) / v_h|_T \in P_1(T), \forall T \in \tau_h \right\},$$

donde P_1 es el conjunto de los polinomios de grado menor o igual a 1.

El problema variacional aproximado consiste en hallar $u_{h\alpha} \in V_h$ de manera que

$$a_\alpha(u_{h\alpha}, v_h) = L_\alpha(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (4)$$

Se designa con N a la cantidad total de nodos de la triangulación, con r a la cantidad de nodos sobre la frontera Γ_1 y con p a la cantidad de nodos sobre la frontera Γ_2 . Sea $\{\omega_i\}_{i=1}^N$ una base del espacio V_h . Puede pensarse a esta base como

$$\{\omega_i\}_{i=1}^N = \{\omega_i^1\}_{i=1}^r \cup \{\omega_i^\Omega\}_{i=r+1}^{N-p} \cup \{\omega_i^2\}_{i=N-p+1}^N$$

donde se ha indicado con ω_i^j a la función base que vale 1 en el nodo N_i , de la frontera Γ_1 si $j=1$, de la frontera Γ_2 si $j=2$ o del interior de Ω si $j=\Omega$, y cero en los otros nodos. Entonces el elemento $u_{h\alpha} \in V_h$ puede expresarse de la siguiente manera

$$u_{h\alpha} = \sum_{i=1}^r u_i^1 \omega_i^1 + \sum_{i=r+1}^{N-p} u_i^\Omega \omega_i^\Omega + \sum_{i=N-p+1}^N u_i^2 \omega_i^2 \quad (5)$$

donde los coeficientes u_i^1 ($i=1, \dots, r$), u_i^Ω ($i=r+1, \dots, N-p$) y u_i^2 ($i=N-p+1, \dots, N$) son los valores de la incógnita en los nodos correspondientes.

Teniendo en cuenta la expresión (5) y considerando $v_h = \omega_i^j$ en la ecuación variacional (4), para cada $i, j=1, \dots, N$, se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 \mathbf{u}^1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{u}^\Omega + \mathbf{A}_3 \mathbf{u}^2 &= \mathbf{b}_\alpha \\ \mathbf{A}_4 \mathbf{u}^1 + \mathbf{A}_5 \mathbf{u}^\Omega + \mathbf{A}_6 \mathbf{u}^2 &= \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_7 \mathbf{u}^1 + \mathbf{A}_8 \mathbf{u}^\Omega + \mathbf{A}_9 \mathbf{u}^2 &= \mathbf{b}(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (6)$$

donde $\mathbf{u}^1 \in \mathbf{R}^r$, $\mathbf{u}^2 \in \mathbf{R}^p$, $\mathbf{u}^\Omega \in \mathbf{R}^{N-(p+r)}$, las matrices $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_9$ vienen dadas por:

$$\mathbf{A}_1 = (a_{ij}^1) \in \mathbf{R}^{r \times r}, \quad a_{ij}^1 = a_\alpha(\omega_j^1, \omega_i^1); \quad \mathbf{A}_2 = (a_{ij}^2) \in \mathbf{R}^{r \times N-(p+r)}, \quad a_{ij}^2 = a(\omega_j^\Omega, \omega_i^1);$$

$$\mathbf{A}_3 = (a_{ij}^3) \in \mathbf{R}^{r \times p}, \quad a_{ij}^3 = a(\omega_j^2, \omega_i^1); \quad \mathbf{A}_4 = (a_{ij}^4) \in \mathbf{R}^{N-(p+r) \times r}, \quad a_{ij}^4 = a(\omega_j^1, \omega_i^\Omega);$$

$$\mathbf{A}_5 = (a_{ij}^5) \in \mathbf{R}^{N-(p+r) \times N-(p+r)}, \quad a_{ij}^5 = a(\omega_j^\Omega, \omega_i^\Omega);$$

$$\mathbf{A}_6 = (a_{ij}^6) \in \mathbf{R}^{N-(p+r) \times p}, \quad a_{ij}^6 = a(\omega_j^2, \omega_i^\Omega); \quad \mathbf{A}_7 = (a_{ij}^7) \in \mathbf{R}^{p \times r}, \quad a_{ij}^7 = a(\omega_j^1, \omega_i^2);$$

$$\mathbf{A}_8 = (a_{ij}^8) \in \mathbf{R}^{p \times p}, \quad a_{ij}^8 = a(\omega_j^\Omega, \omega_i^2); \quad \mathbf{A}_9 = (a_{ij}^9) \in \mathbf{R}^{p \times p}, \quad a_{ij}^9 = a(\omega_j^2, \omega_i^2);$$

y las componentes de los vectores $\mathbf{b}^\alpha = (b_i^\alpha)_{i=1}^r \in \mathbf{R}^r$, $\mathbf{b}(\mathbf{q}) = (b_i(\mathbf{q}))_{i=N-p+1}^N \in \mathbf{R}^p$ están dadas por las expresiones siguientes:

$$b_i^\alpha = \alpha B \int_{\Gamma_1} \omega_i^1 d\gamma, \quad b_i(\mathbf{q}) = - \int_{\Gamma_2} q \omega_i^2 d\gamma.$$

El sistema de ecuaciones lineales (6) puede ser expresado en forma matricial por

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}, \quad (7)$$

donde $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^\Omega, \mathbf{u}^2) \in \mathbf{R}^N$, $\mathbf{b} = (\mathbf{b}^\alpha, \mathbf{0}, \mathbf{b}(\mathbf{q})) \in \mathbf{R}^N$ y $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{N \times N}$ es la matriz de elementos finitos, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_4 & \mathbf{A}_5 & \mathbf{A}_6 \\ \mathbf{A}_7 & \mathbf{A}_8 & \mathbf{A}_9 \end{pmatrix}$.

Los elementos b_i^α y $b_i(\mathbf{q})$ se obtienen a través del cálculo numérico de las correspondientes integrales, por ejemplo usando la regla del trapecio. Para ello se considera que la curva Γ_i ($i = 1, 2$) puede decomponerse en la forma

$$\Gamma_i = \bigcup_{j=1}^s \Gamma_i^j, \quad \text{con } s = p - 1 \text{ si } \Gamma_i \text{ es abierta ó } s = p \text{ si } \Gamma_i \text{ es cerrada,}$$

con lo cual se tiene la integración aproximada dada por:

$$\int_{\Gamma_i} f \, d\gamma = \sum_{j=1}^s \int_{\Gamma_i^j} f \, d\gamma \approx \sum_{j=1}^s \frac{1}{2} |\Gamma_i^j| \left(f(\mathcal{N}_j) + f(\mathcal{N}_{j+1}) \right),$$

donde se ha llamado Γ_i^j a la porción de la curva Γ_i cuyos extremos son los nodos \mathcal{N}_j y \mathcal{N}_{j+1} y se ha indicado con $|\Gamma_i^j|$ a la medida de esa porción de curva.

De esta forma el sistema de ecuaciones lineales (7) se transforma en

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{M}\tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{b}}$$

donde :

- $\tilde{\mathbf{q}} = (\tilde{q}_i) \in \mathbf{R}^p$ y \tilde{q}_i es el valor del flujo \mathbf{q} en el nodo \mathcal{N}_{N-p+i} ;
- $\tilde{\mathbf{b}} = (\tilde{b}_i) \in \mathbf{R}^N$, \tilde{b}_i aproxima al valor de b_i^α ($i = 1, \dots, r$) y $\tilde{b}_i = 0$ ($i = r+1, \dots, N$);

- $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}^1 \\ \mathbf{M}^2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{N \times p}$, $\mathbf{M}^1 \in \mathbf{R}^{(N-p) \times p}$ es la matriz nula,
 $\mathbf{M}^2 = (m_{ii})_{i=N-p+1}^N \in \mathbf{R}^{p \times p}$ es una matriz diagonal, con

$$m_{ii} = \begin{cases} -\frac{1}{2} |\Gamma_2^i| & \text{si } i = N - p + 1 \text{ o } i = N, \\ -\frac{1}{2} (|\Gamma_2^{i-1}| + |\Gamma_2^i|) & \text{si } i = N - p + 2, \dots, N - 1, \end{cases}$$

si Γ_2 es una curva abierta, o

$$m_{ii} = -\frac{1}{2}(|\Gamma_2^{i-1}| + |\Gamma_2^i|) \quad \text{con } i = N - p + 1, \dots, N,$$

si Γ_2 es una curva cerrada, (en este caso se ha considerado $\Gamma_2^{N-p} = \Gamma_2^N$), y la i -ésima componente del vector $\mathbf{M} \tilde{\mathbf{q}}$ aproxima al valor de $b_i(\mathbf{q})$, es decir $(\mathbf{M} \tilde{\mathbf{q}})_i \approx b_i(\mathbf{q})$.

Después de estas consideraciones, el problema de optimización (2) se transforma en el siguiente problema de programación lineal:

$$\text{Minimizar}_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \hat{F}(\tilde{\mathbf{q}}) = \langle \mathbf{T}_{\Gamma_2}, \tilde{\mathbf{q}} \rangle_{\mathbf{R}^p} \quad (8)$$

donde

$$\mathbf{T}_{\Gamma_2} = \begin{cases} \frac{1}{2}(|\Gamma_2^1|, (|\Gamma_2^1| + |\Gamma_2^2|), \dots, (|\Gamma_2^{p-2}| + |\Gamma_2^{p-1}|), |\Gamma_2^{p-1}|) & \text{si } \Gamma_2 \text{ es abierta,} \\ \frac{1}{2}((|\Gamma_2^p| + |\Gamma_2^1|), (|\Gamma_2^1| + |\Gamma_2^2|), \dots, (|\Gamma_2^{p-1}| + |\Gamma_2^p|)) & \text{si } \Gamma_2 \text{ es cerrada,} \end{cases}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{R}^p}$ es el producto escalar usual en \mathbf{R}^p y el conjunto \mathbf{U} se define de la siguiente manera

$$\mathbf{U} = \{ \tilde{\mathbf{q}} \in \mathbf{R}^p : \mathbf{C} \tilde{\mathbf{q}} \leq \mathbf{d}, \mathbf{C} \in \mathbf{R}^{N \times p}, \mathbf{d} \in \mathbf{R}^N \},$$

con $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{M}$ y $\mathbf{d} = -\mathbf{A}^{-1} \tilde{\mathbf{b}}$.

Teniendo en cuenta que $\hat{F}(\tilde{\mathbf{q}}) \geq 0, \forall \tilde{\mathbf{q}} \geq 0$ resulta que el problema de programación lineal (8) admite al menos una solución⁷.

III RESULTADOS NUMÉRICOS

Se realiza una implementación en MATLAB del método de elementos finitos⁸ para obtener las matrices y los vectores que aparecen en el problema de programación lineal (8) y luego se resuelve dicho problema de programación lineal con las correspondientes rutinas de MATLAB.

A continuación se muestran dos ejemplos considerando dominios bidimensionales.

Ejemplo 1: Se consideran los siguientes datos:

$$\begin{aligned} n &= 2, & \Omega &= [0, 4] \times [0, 4], \\ \Gamma_1 &= \{0\} \times [0, 4], & \Gamma_2 &= \{4\} \times [0, 4], & \Gamma_3 &= [0, 4] \times \{0\} \cup [0, 4] \times \{4\}. \end{aligned}$$

Se realiza un mallado del dominio consistente en 64 triángulos y 45 nodos. Se obtienen los valores del flujo óptimo que se muestran en la Fig. 1, para diferentes valores del coeficiente de transferencia α y diferentes valores de la temperatura ambiente B .

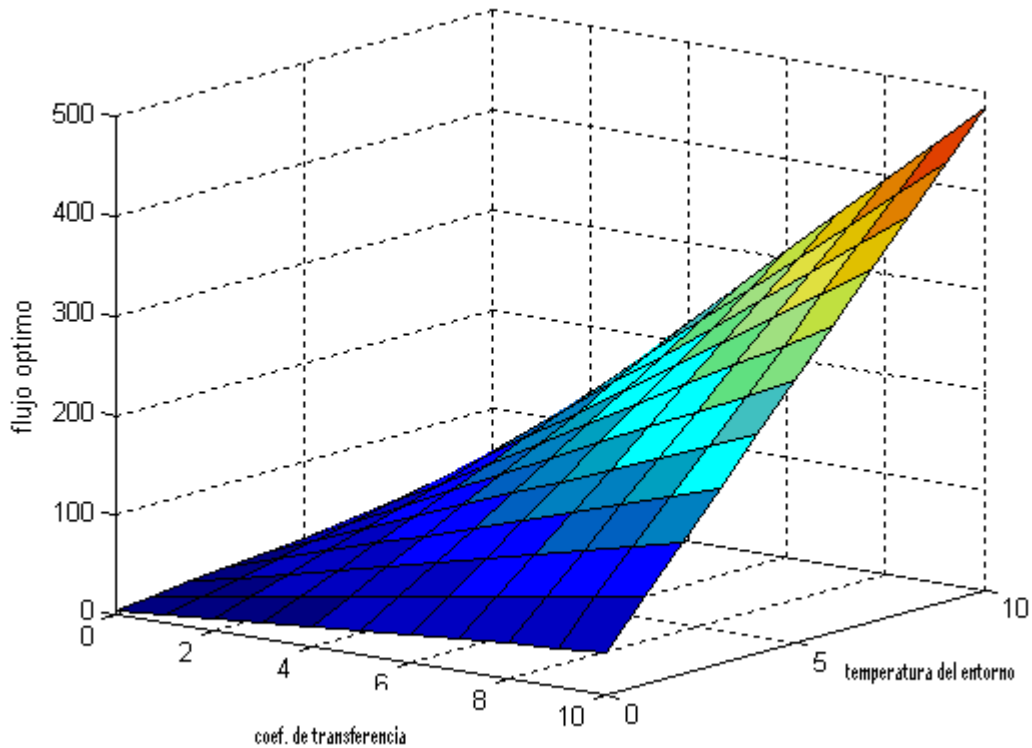


Fig. 1: Flujo óptimo vs. α y B para el caso de un dominio rectangular (Ej. 1)

Ejemplo 2:

El dominio Ω es un anillo bidimensional ($n = 2$), cuyas fronteras interior y exterior son respectivamente Γ_1 (un dodecágono regular inscrito en una circunferencia C_1 de radio $r_1 = 1$) y Γ_2 (un dodecágono regular inscrito en una circunferencia C_2 de radio $r_2 = 2$, concéntrica con C_1). Se realiza un mallado del dominio consistente en 48 triángulos y 36 nodos. Se obtienen los valores del flujo óptimo que se muestran en la Fig. 2 para diferentes valores del coeficiente de transferencia α y diferentes valores de la temperatura ambiente B .

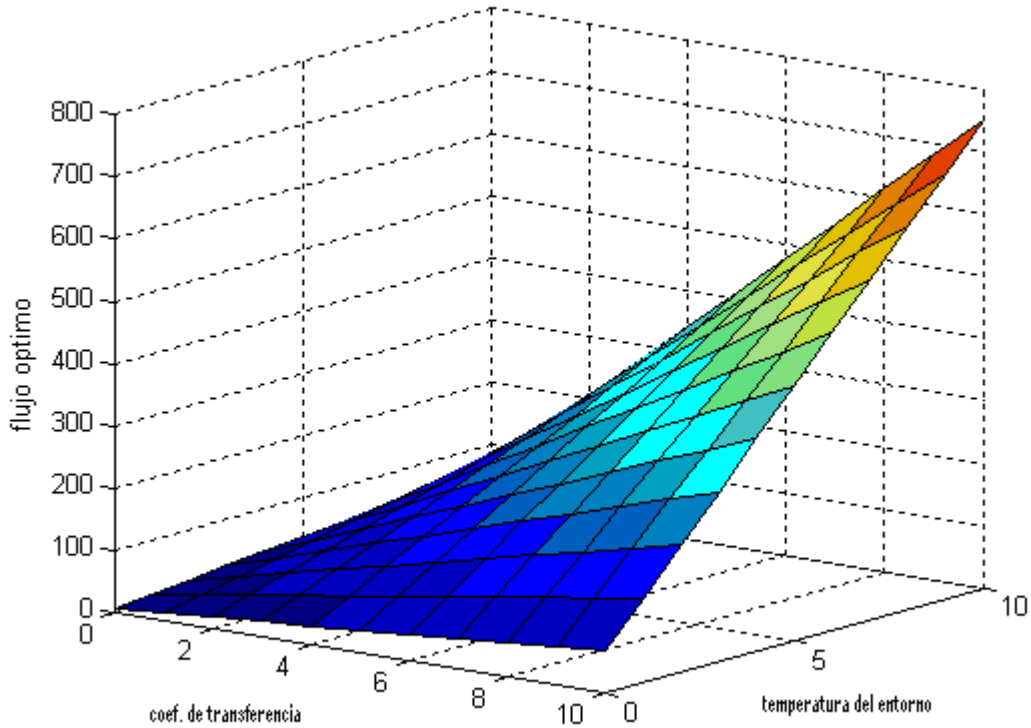


Fig. 2: Flujo óptimo vs. α y B para el caso de un dominio anillo bidimensional (Ej.2)

IV CONCLUSIONES

En los ejemplos numéricos que se han presentado en la sección precedente se observa que, si se llama \mathbf{u}_{q^*} a la temperatura que se obtiene como solución del problema (1) para el flujo óptimo q^* hallado en cada caso, se verifica que

$$\mathbf{u}_{q^*} \Big|_{\Gamma_1} = 0$$

A partir de estos resultados se puede intuir que el flujo óptimo mínimo está dado por $q^* = - \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2}$ donde \mathbf{u}^* es la solución del siguiente problema elíptico.

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}^* &= 0 & \text{in } \Omega \\ \mathbf{u}^* \Big|_{\Gamma_1} &= 0 & \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} = \alpha B. \end{aligned} \tag{9}$$

Para el Ejemplo 1 se dispone de solución exacta del problema (9), la cual viene dada por

$$\mathbf{u}^*(x,y) = -B\alpha x$$

y se observa en este caso que los valores del flujo óptimo hallado numéricamente son los correspondientes al flujo $q^* = B\alpha$ obtenido como $q^* = -\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2}$.

Para el Ejemplo 2 se muestran en la tabla de la Figura 3, los valores del flujo q_h^* hallados numéricamente y los de q^* obtenidos como $q^* = -\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2}$ siendo $\mathbf{u}^*(r) = -B\alpha r_1 \log(\frac{r}{r_1})$ la solución exacta del problema (9) cuando se considera como dominio al anillo circular

$$\Omega = \{(x, y) : 1 < r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} < 2\},$$

siendo en este caso las fronteras: $\Gamma_1 = \{(x, y) : r = 1\}$, $\Gamma_2 = \{(x, y) : r = 2\}$

| α | B | q_h^* | q^* |
|----------|----|-------------|-------|
| 1 | 1 | 0.49825110 | 0.50 |
| 1 | 6 | 2.98950662 | 3.00 |
| 1 | 11 | 5.48076213 | 5.50 |
| 1 | 16 | 7.97202361 | 8.00 |
| 1 | 21 | 10.46327526 | 10.50 |
| 3 | 1 | 1.49475326 | 1.50 |
| 3 | 6 | 8.96851986 | 9.00 |
| 3 | 11 | 16.44228640 | 16.50 |
| 3 | 16 | 23.91605209 | 24.00 |
| 3 | 21 | 31.38981922 | 31.50 |
| 5 | 1 | 2.49125552 | 2.50 |
| 5 | 6 | 14.94753270 | 15.00 |
| 5 | 11 | 27.40381067 | 27.50 |
| 5 | 16 | 39.86008818 | 40.00 |
| 5 | 21 | 52.31636573 | 52.50 |
| 7 | 1 | 3.48775773 | 3.50 |
| 7 | 6 | 20.92654633 | 21.00 |
| 7 | 11 | 38.36533494 | 38.50 |
| 7 | 16 | 55.80412355 | 56.00 |
| 7 | 21 | 73.24291224 | 73.50 |

Figura 3: Flujos q_h^* y q^* vs. α y B para el caso de un dominio anillo bidimensional (Ej.2)

REFERENCIAS:

- [1] E.D. Tabacman - D.A. Tarzia, "Sufficient and/or necessary condition for the heat transfer coefficient on Γ_1 and the heat flux on Γ_2 to obtain a steady-state two-phase Stefan Problem", J. Diff. Eq., Vol .77, N° 1, (1989), 16-37.
- [2] R.L.V. González - D.A. Tarzia, "Optimization of heat flux in domain with temperature constraints", J. Optim. Th. Appl., Vol.65, N° 2 (1990), 245-256.
- [3] R.L.V. González - D.A. Tarzia, "On some thermic flux optimization problems in a domain with Fourier boundary conditions and state restrictions", Math. Notae, 34 (1990), 21-32.
- [4] G. Duvaut, "Problèmes à frontière en théorie des milieux continus", Rapport de Recherche #185, LABORIA-IRIA, Roquencourt, (1976).
- [5] D.A. Tarzia, "Sur le problème de Stefan à deux phases", C.R.Acad.Sci.Paris, 288A (1979), 941-944.
- [6] P.G. Ciarlet, "The finite element method for elliptic problems", North Holland Publishing Company, 1976, Amsterdam.
- [7] P.G.Ciarlet, "Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation", Masson, 1990, París.
- [8] J. Alberty - C. Carstensen - S. Funken, "Remarks around 50 lines of Matlab: short finite element implementation", Numerical Algorithms, 20 (1999), 117-137.