

ANÁLISIS NUMÉRICO DE ONDAS DE FARADAY. ESTUDIO DE LA INFLUENCIA DEL ESPESOR DEL FILM

Sebastián Ubal, María D. Giavedoni, Fernando A. Saita
INTEC (UNL – CONICET)

Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina, e-mail: subal@alpha.arcricle.edu.ar

Carlos M. Corvalán

Facultad de Ingeniería – UNER

Ruta Prov. No. 11 km. 10, 3101 Oro Verde, Entre Ríos, Argentina

RESUMEN

En este trabajo se determina numéricamente la mínima fuerza de excitación necesaria para que se generen ondas de Faraday bidimensionales, para varios espesores de película.

ABSTRACT

For several film thicknesses, it is numerically determined the minimum excitation force needed for two-dimensional Faraday waves to be produced.

INTRODUCCIÓN

Cuando un recipiente con líquido en su interior se somete a un movimiento oscilatorio vertical, pueden llegar a formarse ondulaciones en la superficie libre (SL) si se dan las condiciones apropiadas. El fenómeno se conoce como ondas de Faraday, pues él fue el primero en reportarlo [1] y en observar que la frecuencia de las ondas en la SL era igual a la mitad de la frecuencia de oscilación del recipiente

Este problema es de importancia en el análisis de la seguridad en el transporte y almacenaje de líquidos, donde el contenedor puede verse expuesto a movimientos. El análisis de las ondas de Faraday tiene también aplicación en procesos de formación de spray, para efectuar operaciones de transferencia de masa. En estos casos, es importante el tamaño de gota logrado que, en la mayoría de las aplicaciones debe ser pequeño. Ejemplos de esto son algunas plantas de humidificación de aire, o la atomización de combustibles con el objeto de facilitar una rápida combustión en motores diesel o en cámaras de combustión como las de turbinas de gas.

Benjamin y Ursell [2] dieron una explicación a éste fenómeno analizando el movimiento irrotacional de un fluido ideal cuando la amplitud de las oscilaciones es infinitesimalmente pequeña. A partir de entonces, se han realizado numerosos trabajos sobre el problema de ondas de Faraday, principalmente examinando la resonancia interna entre distintos modos. Miles y Henderson [3] realizaron una adecuada revisión. Milner [4] y Miles [5] investigaron la selección que se produce entre diversos patrones regulares de ondas (rollos, cuadrados, exágonos) bajo diferentes geometrías del recipiente.

Todos los trabajos teóricos mencionados hasta aquí tratan al fluido como inviscido, en movimiento irrotacional, aunque algunos autores introdujeron términos de amortiguamiento, lineales y no lineales con el objeto de incorporar efectos disipativos viscosos.

El problema de las ondas de Faraday también se ha investigado numéricamente. Giavedoni [6] estudió el movimiento de ondas bidimensionales utilizando una técnica basada en el método de elementos finitos. Mediante este procedimiento, resolvió el sistema Navier-Stokes – Continuidad junto a las condiciones de contorno apropiadas, y analizó la influencia de la condición inicial, la amplitud de la aceleración externa y las propiedades fisico-químicas del líquido.

El objetivo de este trabajo es analizar el efecto de la variación del espesor de líquido sobre las características de estabilidad de las ondas que se forman en la superficie libre cuando el líquido se somete a una aceleración vertical periódica de alta frecuencia. Se supone que las ondas producidas son bidimensionales, hipótesis que se sustenta en las observaciones experimentales de [7] para el caso en que la inestabilidad es incipiente. La técnica numérica empleada se basa en la utilizada en [6].

FORMULACIÓN MATEMÁTICA

Un líquido Newtoniano e incompresible, de viscosidad μ y densidad ρ , está ubicado sobre una placa plana, horizontal y rígida (ver Figura 1); el aire que se encuentra encima del líquido es inviscido, siendo σ la tensión interfacial. La temperatura del sistema es uniforme y constante y no hay agentes tensoactivos presentes, por lo que μ , ρ y σ son constantes. En reposo, la película de líquido posee un espesor uniforme y constante, de valor H_0 . La placa del fondo tiene un movimiento vertical de la forma $a_0 \cos(\omega t)$, donde a_0 es la amplitud de la oscilación y ω es la frecuencia angular del movimiento. Por conveniencia, se ubica el origen del sistema coordenado de referencia sobre la placa móvil, y así el movimiento oscilatorio se traduce en una fuerza externa periódica que se suma a la aceleración gravitatoria. En base a [7], se supone que las ondas superficiales son bidimensionales.

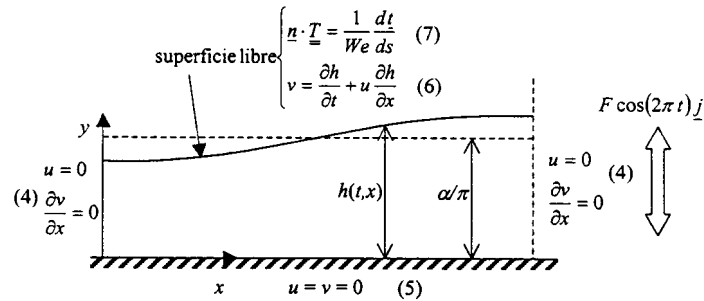


Figura 1: Esquema del dominio de flujo, de las condiciones de contorno y del sistema coordenado adoptado.

El movimiento del líquido está gobernado por las leyes de conservación de masa y cantidad de movimiento, que bajo las hipótesis enunciadas se expresan como

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla \cdot [\nabla \underline{v} + (\nabla \underline{v})^T] + \frac{1}{Fr} [F \cos(2\pi t) - 1] \underline{j} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad (2)$$

donde $\underline{v} = u \underline{i} + v \underline{j}$ es el vector velocidad, p es la presión, t es el tiempo, ∇ es el operador gradiente, e \underline{i} y \underline{j} son los versores en las direcciones x e y respectivamente. Las longitudes, tiempos, velocidades y presiones (lo mismo que los esfuerzos), se miden en unidades de $\pi H_0 / \alpha$, $2\pi / \omega$, $\omega H_0 / 2\alpha$ y $\rho [\omega H_0 / 2\alpha]^2$ respectivamente. Mediante esta adimensionalización, en (1) aparecen el número de Reynolds $Re = (\pi \rho \omega / 2\mu) (H_0 / \alpha)^2$, el número de Froude $Fr = (\omega^2 / 4\pi g) (H_0 / \alpha)$, y un parámetro que relaciona la magnitud de la aceleración externa con la gravitatoria, $F = a_0 \omega^2 / g$.

La perturbación inicial impuesta a la SL, necesaria para permitir el movimiento del líquido es

$$h(0, x) = \alpha / \pi [1 + \varepsilon \sin(\pi x - \pi/2)] \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1 \quad (3)$$

siendo $h(t,x)$ una función que mide la distancia entre la placa y la SL para el instante de tiempo t en la posición x , y ε la amplitud de la perturbación. El fluido se encuentra inicialmente inmóvil.

Las condiciones de contorno necesarias para resolver el problema se muestran en la Figura 1. La extensión del dominio en la dirección x equivale a media longitud de onda de la perturbación inicial. Se supone que este dominio representa una parte de un patrón que se repite infinitamente hacia ambos lados, para $x > l$ y para $x < 0$. Así, en estos extremos se imponen condiciones de simetría. El patrón repetitivo puede caracterizarse por lo que llamaremos *celda elemental*, que dependiendo de las condiciones, podrá estar contenido un número entero positivo de veces dentro del dominio. Sobre la placa inferior, se imponen condiciones de no deslizamiento. En la superficie se aplican la condición cinemática y la continuidad de tensiones. En la ecuación que expresa esta última condición de contorno aparece el número de Weber $We = (\pi \rho \omega^2 / 4 \sigma) (H_0 / \alpha)^3$, \underline{T} es el tensor de tensiones, \underline{n} es el vector normal a la SL, apuntando hacia fuera de la fase líquida y dt/ds es la curvatura de la SL (\underline{t} es un vector unitario tangente a la SL y s la longitud de arco).

METODOLOGÍA NUMÉRICA

La técnica numérica utilizada en la resolución del problema descrito en la sección anterior es la misma empleada por Giavedoni [6]. Basada en el método de elementos finitos, esta técnica fue originalmente desarrollada en la Universidad de Minnesota ([8], [9]) primero para flujos en estado estacionario y posteriormente para flujos transientes.

La discretización espacial se realiza formulando los residuos ponderados de Galerkin del sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales que gobiernan el problema (1), (2), (6). Esto genera un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, que luego de ser discretizadas temporalmente mediante diferencias finitas, se reducen a un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales.

La posición de la superficie libre se parametriza mediante el método de los spines [8], y los campos de velocidad y presión se aproximan mediante funciones base bicuadráticas y bilineales respectivamente.

El avance en el tiempo se realiza mediante un predictor de Adams-Bashforth y un corrector trapezoidal, ambos de segundo orden [9]. Este esquema permite estimar el error de truncamiento local y seleccionar un salto de tiempo que impida que este error supere un nivel preseleccionado. La aproximación de las derivadas temporales mediante la regla del trapecio conduce a un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales que se resuelve mediante el método de Newton-Raphson. El predictor de Adams-Bashforth provee una primera aproximación lo suficientemente buena como para asegurar la convergencia en la primera iteración del procedimiento de Newton.

RESULTADOS

En las simulaciones numéricas realizadas se adoptó una frecuencia de oscilación del recipiente $f = 29 \text{ KHz}$, y se trabajó con las siguientes propiedades físico-químicas, correspondientes aproximadamente a las del agua pura a 20°C : $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\sigma = 7 \times 10^{-2} \text{ N/m}$, $\mu = 10^{-3} \text{ Pa s}$.

A fin de evaluar la influencia de la variación del espesor de la película de líquido, se construyeron mapas de estabilidad en el plano $F - \alpha$, para distintas alturas de líquido. La Figura 2 muestra el mapa correspondiente a un espesor de película $H_0 = 5 \times 10^{-3} \text{ m}$. Cada uno de los puntos del gráfico representa una corrida. En base a los datos especificados anteriormente, puede determinarse el valor de los parámetros adimensionales:

$$\alpha^2 Re = 715.5463 \quad \alpha^3 We = 46.56478 \quad \alpha Fr = 13480$$

Las corridas se inician imponiendo una perturbación sinusoidal a la superficie libre relativamente pequeña, $\varepsilon = 0.05$, partiendo de un líquido en estado inmóvil. Luego de seguir la evolución de la película durante un tiempo determinado (variable según la corrida), se determina si el comportamiento fue estable o inestable. Se considera que las evoluciones estables (círculos) son aquellas en las que la

amplitud de la onda superficial decrece desde su perturbación inicial, tendiendo a un valor cero a medida que transcurre el tiempo; en caso contrario son inestables (cruces).

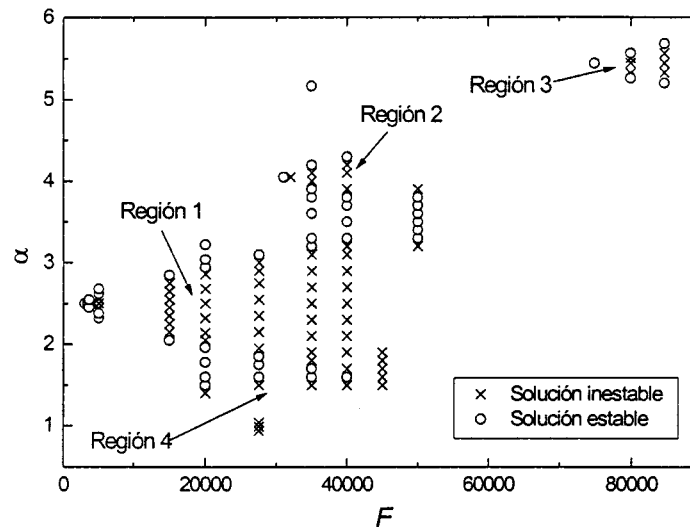


Figura 2: Mapa de estabilidad para $\alpha^2 Re = 715.5463$, $\alpha^3 We = 46.56478$ y $\alpha Fr = 13480$.

En el gráfico pueden distinguirse cuatro regiones:

- Región 1: se observa resonancia subarmónica; es decir, la frecuencia de oscilación predominante de la superficie libre es igual a la mitad de la frecuencia de la aceleración externa.
- Región 2: existe resonancia armónica; o sea que la superficie libre se mueve a la misma frecuencia que la oscilación externa.
- Región 3: presenta resonancia superarmónica, a una frecuencia aproximadamente 1.5 veces superior a la de la onda forzadora.
- Región 4: existe resonancia subarmónica; la interfase oscila a la mitad de la frecuencia de la onda forzadora, pero a diferencia de lo que ocurre en las tres regiones anteriores se observan dos celdas elementales en el dominio de flujo, en vez de sólo una.

Además, para valores de F lo suficientemente grandes, es posible observar solapamiento entre las regiones 1 y 4. En la Figura 2 se puede apreciar que este fenómeno se produce aproximadamente en $F = 45000$. En el rango de valores de F estudiado, no se observó superposición entre las regiones 1 y 2, ni entre 2 y 3. Asimismo, para valores pequeños de α se observaron más de dos celdas elementales, pero estas regiones, similares a la 4, no fueron prácticamente exploradas.

Para la región 1, puede verse que el mínimo valor de F necesario para lograr la inestabilización de la superficie libre, se encuentra entre 3400 y 3600, para un $\alpha \approx 2.5$. Evidentemente, para este valor del número de onda existe la mayor sintonización entre la frecuencia natural del sistema y la de la oscilación impuesta. La región 2, en cambio, tiene un umbral con un F entre 31000 y 32000, para un $\alpha \approx 4.05$. Como ya se mencionó, en esta región el modo dominante oscila a la misma frecuencia que la aceleración externa. En la región 3 el mínimo umbral se encuentra entre $F = 75000$ y $F = 80000$, siendo el número de onda $\alpha \approx 5.44$. En este caso, la frecuencia de oscilación más importante de la onda dominante se encuentra en relación 3:2 con respecto a la de la excitación externa.

Puede observarse que todas las regiones presentan un ensanchamiento del intervalo de inestabilidad a lo largo de la coordenada α a medida que se incrementa la fuerza aplicada F . Esto significa que para fuerzas pequeñas la resonancia sólo se produce si existe una buena "sintonización" entre la frecuencia natural del sistema (que depende, entre otras cosas, del número de onda α) y la frecuencia de vibración impuesta externamente. Si se aumenta la fuerza, la resonancia se produce aunque la sintonización no sea tan ajustada.

En las regiones 1 a 3 se observa sólo una celda elemental en el dominio. Por el contrario, en la región 4 existen dos celdas. Puede intentarse una explicación intuitiva a la presencia de estos puntos. Considérese por ejemplo uno de los casos inestables pertenecientes a la región 1. Esta inestabilidad se produce para un determinado número de onda α (o sea, para una longitud del dominio en particular). Si se redujera a la mitad el número de onda (se duplicara la longitud), podría esperarse que se produzca el mismo fenómeno, pero contenido dos veces en el dominio, excepto en el caso en que el modo contenido una sola vez sea más dominante en las condiciones dadas.

En la Figura 2 se puede observar que el mínimo umbral o valor de F necesario para inestabilizar la superficie libre se presenta para oscilaciones correspondientes a la región 1, para algún valor del número de onda α . Las otras regiones poseen umbrales mínimos mayores que la región 1.

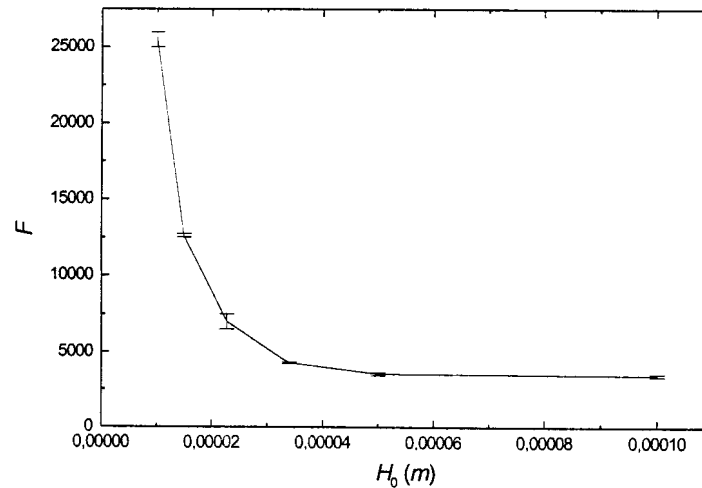


Figura 3: Variación del umbral mínimo de la región 1 en función de la altura de líquido.

El análisis de estabilidad presentado en los párrafos precedentes se realizó también utilizando otros valores de H_0 . Se construyeron mapas relativamente detallados para $H_0 = 2.27 \times 10^{-5} m$ y $H_0 = 10^{-5} m$. En ellos se observaron en general las mismas regiones y características ya vistas en la Figura 2. Además se exploró la zona de la región 1 más próxima al mínimo umbral para $H_0 = 1.5 \times 10^{-5} m$, $3.4 \times 10^{-5} m$ y $10^{-4} m$. Esto permitió elaborar una curva que muestra cómo varía el valor mínimo de F a medida que se modifica el espesor de la película, la cual se puede ver en la Figura 3.

Inmediatamente se puede apreciar que existe una relación inversa entre el espesor inicial y la fuerza mínima. Esto dice que a medida que disminuye la altura inicial de la película, aumenta la fuerza necesaria para inestabilizar la interfase líquido-gas, aunque este efecto comienza a ser importante a partir de $H_0 \approx 5 \times 10^{-5} m$. Efectivamente, para valores de H_0 mayores no existe ya prácticamente variación en el umbral mínimo, mientras que para espesores más pequeños se observa un rápido aumento del límite de estabilidad F .

Este fenómeno puede explicarse si se tiene en cuenta que la mayor parte del movimiento del líquido se produce en una delgada capa junto a la superficie libre. Cuando el espesor de fluido es mayor que la capa mencionada, el movimiento ocurre prácticamente sin interacción con el fondo del recipiente; en consecuencia, la dinámica cerca de la superficie libre no se verá afectada si la altura de líquido es incrementada aún más. Por el contrario, si el espesor es lo suficientemente pequeño, del orden del que posee la región donde se produce el movimiento, entonces sí habrá interacción con el fondo. La pared no sólo desvía el flujo en sus cercanías, sino que además la condición de contorno de no-deslizamiento impuesta en ella se transmite al seno del líquido por efecto viscoso.

Por lo tanto, los resultados que se muestran en la Figura 3 indican que, para el líquido y la frecuencia de trabajo elegidos, es necesario reducir realmente mucho el espesor de fluido a fin de que comiencen a hacerse notar los efectos del fondo del recipiente.

CONCLUSIONES

Se ha estudiado numéricamente la estabilidad de una película líquida sometida a una aceleración vertical periódica, investigándose el efecto que posee el variar el espesor de fluido. Se encontró que la mínima fuerza de excitación necesaria para inestabilizar la interfase líquido-gas aumenta a medida que la altura de fluido disminuye.

Se comprobó que la técnica numérica empleada resulta muy adecuada para el estudio del problema, permitiendo no sólo cumplir con los objetivos principales de este trabajo, sino que además brinda una gran cantidad de información detallada del campo de flujo, que mediante postprocesos relativamente simples permite conocer, por ejemplo, líneas de corriente, función de disipación viscosa (y por lo tanto tasa de disipación viscosa total) y energías cinética y superficial.

El método utilizado podría adaptarse con algunas modificaciones al estudio de ondas de Faraday axisimétricas en recipientes cilíndricos, lo cual introduciría el problema de la línea de contacto dinámica sobre la pared vertical. El estudio del problema 3D sería también factible si los recursos computacionales estuvieran disponibles.

REFERENCIAS

- [1] Faraday, M., *On the forms and states assumed by fluids in contact with vibrating elastic surfaces*, Philos. Trans. R. Soc. London, Vol. 121, 1831, págs. 319-340.
- [2] Benjamin, T. B. y Ursell, F., *The stability of the plane free surface of a liquid in a vertical periodic motion*, Proc. R. Soc. London A, Vol. 225, 1954, págs. 505-515.
- [3] Miles, J. W. y Henderson, D., *Parametrically forced surface waves*, Ann Rev. Fluid Mech., Vol. 22, 1990, pág. 143.
- [4] Milner, S. T., *Square patterns and secondary instabilities in driven capillary waves*, J. Fluid Mech., Vol. 225, 1991, págs. 81-100.
- [5] Miles, J. W., *Faraday waves: rolls versus squares*, J. Fluid Mech., Vol. 269, 1994, págs. 353-371.
- [6] Giavedoni, M. D., *A numerical study of the two-dimensional dynamic behavior of a thin liquid film subject to a vertical oscillation*, Ind. Eng. Chem. Res. Des., Vol. 34, 1995, págs. 356-365.
- [7] Hasegawa, E., Umehara, T. y Atsumi, M., *The critical condition for the onset of waves on the free surface of a horizontal liquid layer under a vertical oscillation*, Bull. of JSME, Vol. 27-230, 1984, págs. 1625-1630.
- [8] Kistler, S. F. y Scriven, L. E., *Coating flow computations*. En *Computational analysis of polymer processing* (eds. Pearson, J. R. A., Richardson, S. M.), Cap. 8, pág. 243, London: Applied Science Publishers, 1983.
- [9] Khesghi, H. S. y Scriven, L. E., *Penalty finite element analysis of unsteady free surface flows*. En *Finite elements in fluids* (eds. R. H. Gallagher & J. T. Oden), Vol. 5, Cap. 19, pág. 393, New York: John Wiley & Sons Limited, 1984.