

ANALISIS NUMERICO DEL FLUJO ENTRE DISCOS ROTANTES

Ariel R. Marchegiani

Departamento de Mecánica Aplicada, Facultad de Ingeniería
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL COMAHUE
Buenos Aires 1400 - (8300) Neuquén - ARGENTINA
E-mail: marchegi@uncoma.edu.ar

RESUMEN

El flujo laminar axialsimétrico de un fluido viscoso entre un disco estacionario y un disco rotante de dimensiones finitas es un problema con interés práctico y teórico. Las primeras investigaciones hechas sobre este tema se realizaron casi completamente en relación con flujos entre discos infinitos. En este caso la solución presenta similitud, reduciéndose el número de dimensiones espaciales a uno, con la consiguiente simplificación del problema. Sin embargo se ha comprobado que este tipo de soluciones en el caso de discos finitos representa adecuadamente el problema físico solo para una región próxima al radio medio de los discos, por lo tanto se hace necesaria una solución completa del flujo.

En el presente trabajo se estudia numéricamente el flujo laminar axialsimétrico entre discos mediante una solución cuasi 3D acoplada. Los resultados son comparados con datos experimentales, mostrando buena concordancia para el rango de parámetros estudiados.

ABSTRACT

The axialsymmetric laminar flow of a viscous fluid between a stationary disk and a rotating disk of finite dimensions is a problem with practical and theoretical interest. The first investigations made on this topic were carried out almost completely in connection with flows among infinite disks. In this case the solution presents similarity, decreasing the number of space dimensions to one, with the rising simplification of the problem. However, has been proven that this type of solutions in the case of finite disks represents the alone physical problem appropriately for a next region to the half radius of the disks, therefore it becomes necessary a complete solution of the flow.

In the present work is studied numerically the axialsymmetric laminar flow among disks by means of a coupled quasi 3D solution. The results are compared with experimental data, showing good agreement for the range of studied parameters.

INTRODUCCIÓN

El problema de flujos entre discos tienen aplicación técnica inmediata, pero además tienen un interés intrínseco, ya que ofrece la posibilidad de obtener soluciones exactas de las ecuaciones de Navier-Stokes.

El problema fue estudiado en primer lugar por Von Karman [1], y se refería a un flujo generado por un disco plano que gira con velocidad angular constante ω alrededor de un eje perpendicular a su plano en el seno de un fluido en reposo. Las primeras investigaciones se realizaban en relación con flujos entre

discos infinitos, con soluciones por similitud. Estas soluciones similares, cuando los discos son infinitos, reducen el número de dimensiones espaciales a uno. Es cuestionable que el modelo reducido represente adecuadamente el problema físico del flujo entre los discos finitos.

Batchelor [2] explica la naturaleza general de tales flujos, dando una extensión de la solución de Von Karman al flujo sobre un disco rotante. Sus predicciones son basadas en una reducción de las ecuaciones de Navier Stokes a un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias usando las transformaciones similares, y en las propiedades físicas del problema. Basado en un examen de las ecuaciones gobernantes, Batchelor predijo que a altos números de Reynolds una capa límite delgada se desarrollará en cada disco, cuando el fluido está encerrado entre dos discos rotantes infinitos, y que el cuerpo principal del fluido rotará a una velocidad angular constante[3].

Esta predicción fue desafiada por Stewartson, quién razonó que a grandes números de Reynolds el flujo fuera de las capas límites es completamente axial. Stewartson obtuvo soluciones similares de las ecuaciones para flujo entre dos discos rotantes como series de potencia en el número de Reynolds. Basado en las tendencias observadas en el aumento del número de Reynolds, concluyó que, para un disco rotante y el otro estacionario, la capa límite sólo se le formaría al disco rotante y el centro no rotaría. Por consiguiente, la solución límite sería la de Von Karmán para un disco rotante. Stewartson también predijo que el fluido en el centro no rotaría, cuando los discos rotan en sentido opuesto [4]. Hay gran cantidad de literatura publicada acerca de este problema. Durante las últimas décadas se han realizado muchos trabajos numéricos, pero las comprobaciones experimentales de esos resultados numéricos son escasas.

En el presente trabajo se estudia numéricamente el flujo laminar axialsimétrico entre discos rotantes. Los resultados hallados numéricamente son comparados con resultados experimentales, mostrando buena concordancia para el rango de Número de Reynolds Rotacional y Número de Reynolds Radial que definen este problema.

FORMULACIÓN MATEMÁTICA

La **Figura 1** muestra una representación esquemática del problema estudiado. Este consiste en un sistema de dos discos coaxiales de radio finito R_2 separados por una distancia a . El disco inferior está fijo, y desde un orificio central de radio R_1 , un caudal Q constante es forzado dentro del dominio radialmente y en forma uniforme. El disco superior junto con su llanta porosa giran a una velocidad de rotación ω .

Se asumen las siguientes hipótesis: El flujo es estacionario, laminar y axialsimétrico; el fluido es Newtoniano, y sus propiedades físicas son consideradas constantes; y todas las fuerzas externas se asumen despreciables. Bajo estas condiciones se aplican las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible, coordenadas cilíndricas, adimensionalizadas con los siguientes parámetros: r/a , v/a , y $\rho(v/a)$ para la longitud, velocidad y presión respectivamente se llega al siguiente sistema de ecuaciones adimensionalizadas

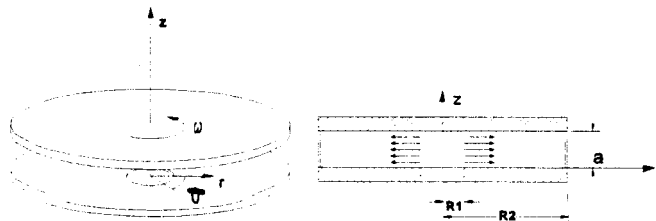


Figura 1

$$\frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial (v_r)}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \quad (2)$$

$$\frac{v_r v_\theta}{r} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} - \frac{v_\theta}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \quad (3)$$

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \quad (4)$$

Dichas ecuaciones están sujetas a las siguientes condiciones de borde. Sobre ambos discos, se asumen las usuales condiciones de no deslizamiento:

$$z = 0: v_r = 0, v_\theta = 0, v_z = 0; \quad z = 1: v_r = 0, v_\theta = \omega a^2 r / \nu, v_z = 0$$

En el orificio de entrada, el flujo es considerado puramente radial y uniforme, luego:

$$r = R_1 / a; \quad v_r = Q / 2\pi R_1 \nu; \quad v_\theta = 0; \quad v_z = 0$$

En la salida sobre la frontera porosa, prevalecen la condiciones de no deslizamiento:

$$r = R_2 / a; \quad v_\theta = R_2 \omega a^2 / a \nu; \quad v_z = 0$$

Para determinar el perfil de velocidad radial se adoptó el siguiente esquema: En la región correspondiente a la salida donde existe flujo saliente, es decir, $v_r > 0$, se adopta la "condición límite de salida" sugerida por Patankar [5], mientras que en la región correspondiente a la salida donde existe flujo entrante, es decir, $v_r < 0$, se adopta un procedimiento propuesto por Nesreddine y col. [6] para corregir estas velocidades durante el proceso de cálculo para satisfacer el equilibrio de masa global en el dominio. Dependiendo de los parámetros de flujo Re_r y Re_θ puede haber una posibilidad de recirculación, es decir, $v_r < 0$, a través de una parte de la llanta porosa. A fin de mantener las condiciones de borde apropiadas para v_r en tal situación, se asume que dentro de la región donde existe flujo entrante, la componente radial de velocidad v_r puede expresarse como $v_r^{(salida)} = \alpha \cdot v_r^{(interior)}$, donde los subíndices correspondientes a "salida" e "interior" se refieren al valor de v_r a través de la llanta porosa y al primer nodo interior adyacente a la llanta. respectivamente, y α es una constante que debe determinarse apropiadamente para asegurar que el equilibrio de masa global sea totalmente satisfecho. Esta constante α puede ser calculada usando la expresión $\alpha = Q_{ent.(ideal)} / Q_{ent.(real)}$, donde $Q_{ent.(real)}$ es el caudal entrante calculado por el código computacional y $Q_{ent.(ideal)}$ es el "caudal entrante correcto", dado por $Q_{ent.(ideal)} = Q_{sal.(llanta)} - Q_{ent.(orificio)}$, donde $Q_{sal.(llanta)}$ es el caudal de salida calculado a través de la llanta, y $Q_{ent.(orificio)}$ el caudal suministrado a través del orificio de entrada. La corrección de v_r negativa, mediante la ecuación anterior se realiza en cada iteración.

RESOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES

De las ecuaciones de gobierno del problema y de sus condiciones de borde surge que el mismo puede ser caracterizado por dos parámetros adimensionales, un Número de Reynolds Radial $Re_r = Q / 2\pi R_1 \nu$, y un Número de Reynolds Rotacional $Re_r = \omega a^2 / \nu$. Las ecuaciones de gobierno (1) a (4), junto con sus condiciones de borde, constituyen un sistema fuertemente no lineal y acoplado. En este trabajo dicho sistema se resuelve mediante el método numérico de volúmenes finitos, [5]. A fin de controlar la convergencia de la solución se han utilizado dos parámetros referidos a la "masa residual" que resulta de la integración de la ecuación de continuidad, sobre un volumen de control. Por otra parte, fin de asegurar que los resultados numéricos sean independientes del número de puntos de la grilla usada en el proceso de discretización se testearon diferentes mallas uniformes y no uniformes. En las mallas más densas los resultados no varían significativamente, pero el número de iteraciones necesarios para la convergencia crece en forma

apreciable Se adoptó finalmente para los cálculos realizados en el presente trabajo una malla de 50×100 no uniforme.

COMPARACIÓN CON RESULTADOS EXPERIMENTALES

La simulación numérica llevada se compara con datos experimentales disponibles en la bibliografía [3]. Se usa agua como fluido de experimentación y el radio exterior de los discos es $R_2 = 25.4$ cm. El valor del radio interno se fijó en $R_1 = 1.6934$ cm. Las condiciones de borde son provistas por placas plásticas porosas que permiten un flujo radial e imparten una velocidad tangencial al fluido igual a la de la frontera. En el centro del dispositivo la placa es estacionaria, lo que imparte al fluido una velocidad tangencial igual a cero. Se analizaron tres casos: 1) $a = 1.26$ cm, $n = 2.72$ r.p.m., $Q = 0$, $v = 0.803 \times 10^{-2}$ cm²/s, con $Re_r = 52$ y $Re_s = 0$, 2) $a = 0.3175$ cm, $n = 36.38$ r.p.m., $Q = 16.51$ cm³/s, $v = 0.818 \times 10^{-2}$ cm²/s, con $Re_r = 47$ y $Re_s = 190$, 3) $a = 0.3175$ cm, $n = 2.907$ r.p.m., $Q = 92.10$ cm³/s, $v = 0.818 \times 10^{-2}$ cm²/s, con $Re_r = 3.55$ y $Re_s = 1000$.

En la figura 2 se observan los valores experimentales y la solución numérica obtenida en el presente trabajo para posiciones sobre el radio de $r/R_2 = 0.3, 0.5, 0.7$ y 0.9 . En la figura 3 se aprecian los valores experimentales y la solución numérica obtenida para una posición sobre el radio de $r/R_2 = 0.5$, para el segundo caso analizado.

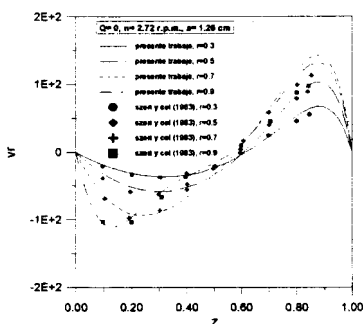


Figura 2

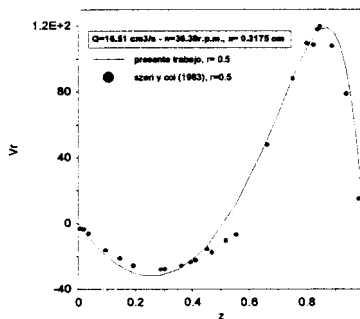


Figura 3

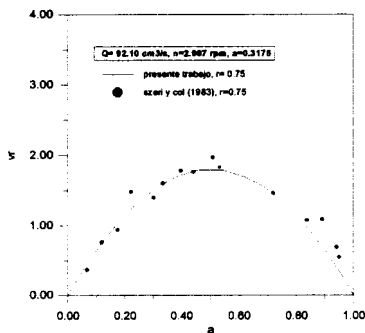


Figura 4

Para comprobar la influencia que tiene el aumento de caudal sobre la estructura del flujo y sobre los campos de velocidades cuando el flujo es netamente laminar se estudió un caso donde se mantuvo

constante el número de Reynolds rotacional, $Re_r = 50$ y se varió el número de Reynolds radial Re_s entre los valores 100 y 1500.

La figura 5 muestra las estructuras de flujos. Esta cambia drásticamente con el aumento de Re_s . Así, para un caudal bajo ($Re_s = 100$) (fig. 5.a), aparece una estructura con una sola zona de recirculación ocupando la mayor parte del espacio entre los discos. Cuando Re_s aumenta hasta 500 (fig. 5.b), aparece una segunda zona de recirculación sobre el disco fijo cerca del orificio de entrada (figura 5.c). En la región inmediata al orificio, el fluido en la parte central tiende a acelerarse; y en contraste, la velocidad disminuye severamente en las regiones cercanas a las paredes. Tal desarrollo se vuelve más pronunciado a caudales altos. Con el aumento del Re_s , crece la segunda zona de recirculación y disminuye la primera zona, desplazándose hacia fuera. El flujo se torna más recto, disminuyendo el tamaño de las zonas de recirculación. Esto indica claramente que los efectos del caudal son predominantes sobre los efectos de la rotación.

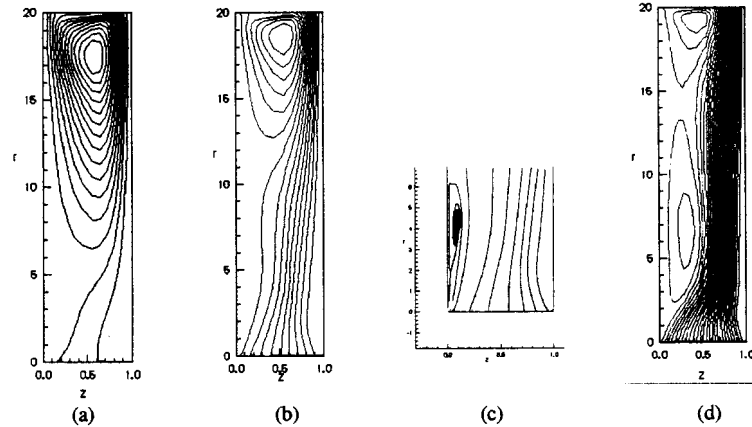


Figura 5: Estructura del flujo. $Re_r = 50$ - (a) $Re_s = 100$ - (b) $Re_s = 500$ - (c) $Re_s = 500$ -detalle - (d) $Re_s = 1000$

Las estructuras de flujo obtenidas son bastante consistentes con aquellas presentadas en otros trabajos [6] [7]. Los efectos de Re_s sobre los campos de velocidades pueden observarse en las figuras 6 y 7 que muestran los perfiles de velocidad radial y las figuras 8 y 9 de velocidad tangencial, respectivamente, obtenidos para los casos mencionados más arriba.

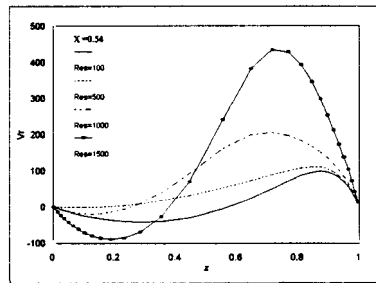


Figura 6

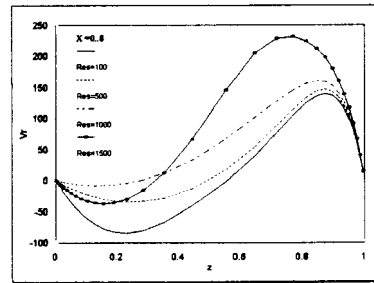


Figura 7

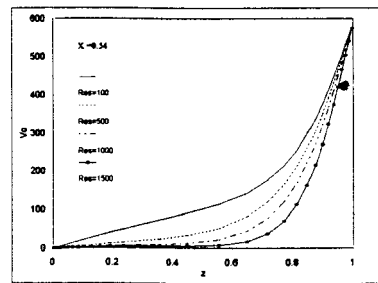


Figura 8

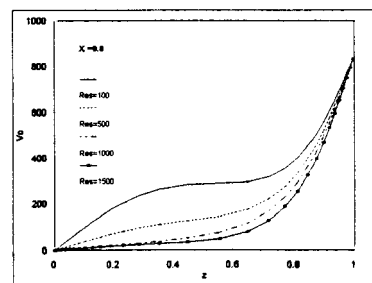


Figura 9

La componente tangencial de velocidad del fluido, puede verse que está influenciada drásticamente por el aumento de caudal. Nótese que el gradiente axial de v_θ generalmente es muy importante en la vecindad del disco rotante y aumenta con Re_r . Sin embargo, este gradiente es menos pronunciado dentro de la región adyacente al disco fijo.

Los resultados son graficados para tres posiciones del radio, a saber, $X = r/R_2 = 0.54$, y 0.8 . Se observa que la velocidad radial v_r del fluido aumenta con el caudal dentro de la zona adyacente al disco rotante, indicando que el flujo saliente se hace más importante a medida que aumenta el Re_r . En la región opuesta la variación de v_r es irregular debido a la presencia de la zona de recirculación que, se mueve progresivamente hacia afuera a medida que el Re_r aumenta. La zona de salida se agranda con el aumento de Re_r , y las zonas de recirculación se estrechan contra el disco fijo. Además, se observa que, en general, el gradiente axial de la velocidad radial aumenta notablemente con el Re_r , en inmediaciones del disco rotante.

CONCLUSIÓN

En este trabajo se estudia el problema de un flujo laminar axialsimétrico de un fluido viscoso entre un disco estacionario y un disco rotante. Los resultados obtenidos muestran en general una buena concordancia con los valores experimentales sobre todo en las proximidades del disco fijo, siendo menos precisas en la vecindad del disco rotante en la sección de salida. La influencia de la variación del Número de Reynolds Radial sobre la estructura del flujo y los correspondientes campos de velocidades se hace evidente. Se puede observar que la estructura de flujo cambia drásticamente con el aumento de Re_r , indicando que el flujo saliente se hace más importante a medida que aumenta dicho parámetro. Se ve claramente, con dicha variación, que los efectos del caudal son predominantes sobre los efectos de la rotación. La solución obtenida representa adecuadamente el efecto de los extremos de los discos sobre el flujo.

REFERENCIAS

- [1]Schlichting H., *Teoría de la capa límite*. Ediciones URMO, Bilbao, 1972.
- [2]Batchelor, G.K., *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, 1967.
- [3]Szeri A. Z., Schneider S.J. Labbe F., *Flow between rotating disks. Part 1. Basic flow*, J.Fluid Mech. Vol.134, 103-131, 1983.
- [4]Brady J. F., Durlofsky L., *On rotating disk flow*, J.Fluid Mech. Vol. 175, 363-394, 1987.
- [5]Patankar S.V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere Publ. Corp., 1980.
- [6]Nesreddine H., Nguyen C.T., and Vo-Ngoc D., *Laminar flow between a stationary and a rotating disk with radial throughflow*, Num. Heat Transf, Part A, vol. 27, pags. 537-557, 1995.
- [7]Disjktra D., Van Heijst G.J.F., *The flow between two finite rotating disk enclosed by a cylinder*, J.Fluid Mech. vol. 128, pags. 123-154, 1983.