

## **SUPERFICIES DE RESPUESTA PARA CÁLCULO DE LA PROBABILIDAD DE FALLA DE ESTRUCTURAS SISMORRESISTENTES**

**Oscar Möller**

Instituto de Mecánica Aplicada y Estructuras (I.M.A.E.)  
Universidad Nacional de Rosario – Riobamba y Berutti, 2000 Rosario – Argentina  
e-mail: [moller@fceia.unr.edu.ar](mailto:moller@fceia.unr.edu.ar)

### **RESUMEN**

Se utiliza el método de la superficie de respuesta para aproximar la respuesta dinámica no lineal de estructuras sismorresistentes, con el objetivo de evaluar la probabilidad de excedencia anual de múltiples niveles de performance.

Se presentan dos funciones cuadráticas explícitas para la superficie de respuesta, en función de variables aleatorias básicas. La dispersión de la superficie debida a variables aleatorias adicionales y al ajuste por mínimos cuadrados es también considerada, además de la incertidumbre de modelo.

A través de una aplicación a estructura tipo péndulo invertido se evalúan las funciones propuestas, comparando los resultados de probabilidad de falla con simulación (adaptive sampling) usando directamente la respuesta dinámica no lineal.

### **ABSTRACT**

The response surface method is utilized to approximate the non linear dynamic response of earthquake resistant structures, to evaluate the annual probability of exceedance of multiple performance levels.

Two explicit second order polynomial expression are presented for the response surface in terms of basic random variables. The spread of the surface, due to additional random variables and the adjust by least-squares method, is also considered, besides of the model uncertainty.

The proposed functions are evaluated through an application to an inverted pendulum structure, comparing the results of probability of failure with simulation (adaptive sampling) using directly the non linear dynamic response.

### **INTRODUCCIÓN**

La ocurrencia de los últimos terremotos importantes en el mundo, con enormes daños y cuantiosas pérdidas de vida y materiales, ha generado el desarrollo de la "Ingeniería sísmica basada en la performance" [1]. Tiene por objetivo lograr construcciones de comportamiento sísmico predecible y cuantificable, para controlar el riesgo sísmico con un predeterminado nivel de aceptabilidad, de manera de minimizar el costo durante toda la vida útil de la construcción.

La implementación de este proceso de diseño [2] necesita de un cambio desde el análisis convencional basado principalmente en la experiencia y factores semiempíricos, hacia un proceso fundamentado en procedimientos realistas del comportamiento estructural bajo descripciones apropiadas de la acción sísmica.

Las incertidumbres presentes en las variables que gobiernan las demandas y capacidades, hacen que la cuantificación del comportamiento deba realizarse en términos probabilísticos, calculando la probabilidad de excedencia anual para cada objetivo de performance.

La evaluación de la probabilidad de falla en problemas de dinámica no lineal, donde no existe una relación explícita entre las variables básicas y los parámetros de respuesta, debe realizarse con métodos de simulación [3]. Sin embargo el método de Monte Carlo standard requiere de un enorme esfuerzo computacional, y son entonces necesarias técnicas aproximadas.

Es conveniente realizar simplificaciones en el modelo mecánico, es decir en el espacio de las variables con significado físico, antes que en el modelo probabilístico [4]. Para ello puede ser utilizado el método de la "superficie de respuesta" en el cual la función de estado límite o verdadera respuesta de la estructura, que en general es compleja e implícita, es reemplazada por una función explícita aproximada en término de las variables aleatorias básicas, a partir de la cual el cálculo de la probabilidad de falla se efectúa sin dificultad.

En este trabajo se realiza un análisis crítico de diferentes formas matemáticas de superficies de respuesta que pueden ser utilizadas en la evaluación de la confiabilidad de una estructura sismorresistente. También se discuten las funciones de falla que representan los diferentes estados límites (niveles de performance), así como la estrategia de elección de las variables aleatorias.

Se presentan aplicaciones a una estructura para tanque elevado utilizando datos de la sismicidad local del área del Gran Mendoza. La probabilidad de falla es verificada con método de simulación orientada (adaptive sampling) usando directamente los resultados de análisis dinámico no lineal.

### GENERACIÓN DE SUPERFICIES DE RESPUESTA

La respuesta de una estructura, por ejemplo desplazamientos, esfuerzos internos, distorsiones de piso, índices de daño, etc., puede representarse por:

$$R(\mathbf{X}) = R(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (1)$$

en la cual  $X$  es un conjunto de variables aleatorias básicas. En general  $R(X)$  tiene sólo forma implícita. El método de la superficie de respuesta consiste en reemplazarla por una función explícita aproximada.

Wong [5,6] propuso como función un polinomio cuadrático completo usando información obtenida de puntos alrededor de los valores medios de las variables. Para mejorar la precisión Bucher [4] propuso estimar un punto de diseño  $x_D$  a partir de esta primera superficie, y luego realizar una nueva interpolación alrededor de  $x_D$ . Trabajó con una función cuadrática pero sin incluir los términos cruzados. Faravelli [7] consideró un factor de corrección para representar el error entre la función real y la aproximada, y Rajashekhar and Ellinwood [8] propusieron un proceso iterativo para mejorar la precisión. Otro proceso iterativo, utilizando una superficie sólo con términos lineales y una técnica de proyección de vector para ubicar los puntos que definen la superficie fue tratado por Kim y Na [9].

En este trabajo se analizan dos formas para la superficie de respuesta

- a) Superficie cuadrática ajustada alrededor del punto de diseño

$$F(\mathbf{X}) = a + \sum_{i=1}^N b_i X_i + \sum_{i=1}^N c_i X_i^2 \quad (2)$$

Se utiliza un proceso iterativo [10] para ajustar la superficie (2) por mínimos cuadrados y alrededor del punto de diseño en cada estado límite o modo de falla.

- b) Superficie cuadrática ajustada para cumplir condiciones de borde

En el análisis de estructuras con acciones sísmicas, si la aceleración pico del suelo  $a_G = 0$ , entonces la respuesta será  $R(X) = 0$ . Esta condición de borde es tenida en cuenta con la siguiente función:

$$F(\mathbf{X}) = a_G \left( a + \sum_{i=1}^N b_i X_i + \sum_{i=1}^N c_i X_i^2 \right) + a_G^2 \left( a^* + \sum_{i=1}^N b_i^* X_i + \sum_{i=1}^N c_i^* X_i^2 \right) \quad (3)$$

Se elige una secuencia de  $a_G$  barriendo el rango de posibles valores de acuerdo a la sismicidad del sitio. Para cada valor de  $a_G$  se realizan simulaciones numéricas con  $\mu$  y  $\mu \pm 1.5 \sigma$ . Con todos los resultados se obtienen los coeficientes de (3) por mínimos cuadrados.

El modelo probabilístico que se utiliza en este trabajo considera un conjunto de variables aleatorias básicas y otras variables aleatorias adicionales como son los ángulos de fase en la generación de miembros del proceso aleatorio que representan los acelerogramas.

En cada punto donde es necesario evaluar la respuesta para definir la superficie de respuesta (2) ó (3), se analizan diferentes secuencias de ángulos de fase generadas aleatoriamente, obteniéndose un conjunto de resultados. La dispersión en los resultados puede ser tratada de dos formas:

- a) Coeficiente de variación promedio

Con los resultados de todos los puntos evaluados  $Np$  y todas las secuencias de ángulos de fase consideradas  $Ns$ , se obtiene una superficie promedio  $\bar{F}(X)$  por mínimos cuadrados. Se calcula luego un coeficiente de variación promedio con:

$$COVRS = \sqrt{\frac{1}{N_E - 1} \sum_{j=1}^{N_E} \left( \frac{R(\mathbf{x})_j - \bar{F}(\mathbf{x})_j}{\bar{F}(\mathbf{x})_j} \right)^2} \quad (4)$$

Siendo el número total de evaluaciones  $N_E = N_p N_s$ . Finalmente la superficie de respuesta se representa con

$$F(\mathbf{X}) = \bar{F}(\mathbf{X}) + COVRS * \bar{F}(\mathbf{X}) * R_N \quad (5)$$

donde  $R_N$  es una variable normal standard.

b) Superficie cuadrática de desvios standard

Siendo los resultados de la simulación  $R_{i,j}(\mathbf{X})$  con  $i = 1, N_p$  y  $j = 1, N_s$ , para cada punto  $i$  se calcula el valor medio y desvio standard

$$\bar{F}_i = \frac{1}{N_S} \sum_{j=1}^{N_S} R_{i,j} \quad \sigma_i^2 = \frac{1}{N_S - 1} \sum_{j=1}^{N_S} (R_{i,j} - \bar{F}_i)^2 \quad (6)$$

Con los  $\bar{F}_i$  se ajusta una superficie media  $\bar{F}(\mathbf{X})$  por mínimos cuadrados con la forma de (2) ó (3), y con los  $\sigma_i$  se construye otra superficie cuadrática  $\sigma(\mathbf{X})$  también con forma de (2) ó (3). Resulta entonces:

$$F(\mathbf{X}) = \bar{F}(\mathbf{X}) + \sigma(\mathbf{X}) * R_N \quad (7)$$

Comparando las expresiones (5) y (7) se observa que en COVRS se tiene en cuenta no sólo la dispersión por las diferentes secuencias de ángulos de fase de los acelerogramas, sino también la originada por el ajuste por mínimos cuadrados. Esto último no es contemplado en  $\sigma(\mathbf{X})$ .

### PROBABILIDAD DE FALLA

Las funciones de falla que representan los niveles de performance de una estructura sismorresistente pueden expresarse en forma genérica por:

$$G(\mathbf{X}) = RLIM - R(\mathbf{X}) \quad (8)$$

Donde  $RLIM$  es el valor límite de algún parámetro de respuesta y  $R(\mathbf{X})$  es la respuesta de la estructura, función de un conjunto de variables aleatorias básicas  $X_i$  con  $i = 1, N$ .

$R(\mathbf{X})$  se reemplaza por la superficie de respuesta aproximada (5) o (7). Además se tiene en cuenta la incertidumbre de modelo incorporando la variabilidad de  $RLIM$  a través de su coeficiente de variación  $COVRL$ .

La función de falla (8), utilizando (5), resulta:

$$G(\mathbf{X}) = RLIM - (\bar{F}(\mathbf{X}) + COVRS * \bar{F}(\mathbf{X}) * X_{N+1}) + COVRL * RLIM * X_{N+2} \quad (9)$$

Si en cambio se trabaja con (7), se obtiene:

$$G(\mathbf{X}) = RLIM - (\bar{F}(\mathbf{X}) + \sigma(\mathbf{X}) * X_{N+1}) + COVRL * RLIM * X_{N+2} \quad (10)$$

donde  $X_{N+1}$ ,  $X_{N+2}$ , son variables normales standard.

Cada una de las expresiones para la función de falla (9) y (10) dan lugar a dos variantes, según se utilice (2) ó (3) como forma para  $\bar{F}(\mathbf{X})$  y  $\sigma(\mathbf{X})$ .

La probabilidad de falla  $P[G(\mathbf{X}) \leq 0]$  se evalúa con FORM (first order reliability method) [3].

### APLICACIONES

Se trata de un depósito elevado de 110 m<sup>3</sup>, solicitado por la acción sísmica de la ciudad de Mendoza.

Se modeliza como una estructura tipo péndulo invertido. La masa superior  $m = 17.533 \text{ ts}^2/\text{m}$  tiene una inercia rotacional  $I_g = 96.483 \text{ tms}^2$ . La columna anular posee las siguientes propiedades:  $A = 1.511 \text{ m}^2$ ,  $I = 1.5186 \text{ m}^4$ ,  $m = 0.369 \text{ ts}^2/\text{m}^2$ . Se consideran variables aleatorias:  $M_f$ , momento de fluencia,  $\phi$ , curvatura última y  $(EI)$  rigidez.

El movimiento del terreno se representa como un proceso estocástico tipo ruido blanco filtrado con función de densidad espectral de potencia  $S_{xx}(f)$  [11], no estacionario en amplitudes con función de modulación  $I(t)$ , a partir de la cual se generan los acelerogramas. Se consideran variables aleatorias la aceleración pico del suelo  $a_G$  y el contenido de frecuencias con la frecuencia central del filtro del suelo  $f_g$ . Los parámetros son obtenidos de la información contenida en el estudio de Microzonificación Sísmica del Gran Mendoza [12]. Las secuencias de ángulos de fase de los acelerogramas generados son consideradas variables aleatorias adicionales.

La tabla I resume los datos de las variables aleatorias descriptas.

Tabla I: Variables aleatorias

X (I)	Tipo	$\bar{X}$	$\sigma_X$	Significado
X(1): a	Lognormal	94 cm/s <sup>2</sup>	130 cm/s <sup>2</sup>	$a_G = X(1) * (1.0 + X(2))$
X(2): $\sigma_a$	Normal	0	0.25	
X(3): $F_c$	Normal	2.50 Hz	0.375 Hz	Frec. central filtro del suelo
X(4): $\delta M_y$	Normal	0	0.075	En cada sección: $R = R_M (1.0 + X(I))$ $R_M$ valores medios de: $M_y = 1140tm$
X(5): $\delta \phi_y$	Normal	0	0.10	
X(6): $\delta(EI)$	Normal	0	0.075	$\phi_b = 0.02494rad/m$ , $(EI) = 914190tm^2$
X(7): N+1	Normal	0	1	Dispersión sup. Respuesta
X(8): N+2	Normal	0	1	Incertidumbre de modelo

El análisis dinámico no lineal realizado en cada simulación necesaria para construir la superficie de respuesta, se llevó a cabo con un modelo de elementos de barra [13].

Los niveles de performance, cuya probabilidad de excedencia anual se pretende cuantificar, son:

- Estado límite de servicio, comportamiento "elástico". En este caso  $R(X)$  de la ec. (8) es  $M_{max}/M_y$ , y el valor límite  $RLIM = 1.00$ . Se trabaja con una relación semejante que es  $\phi_{max}/\phi_y$ .
- Estado límite de control de daños:  $R(X)$  de la ec. (8) es el índice de daño de Park and Ang [14]  $DIES$ , y el valor límite  $RLIM = 0.40$
- Estado límite de colapso: que se alcanza cuando el índice de daños es  $RLIM = 1.00$

Se analizan las siguientes funciones de falla

- RS1: función de falla de ec. (9) con superficie de respuesta de forma dada por la ec. (2).
- RS2: función de falla de ec. (10) con superficie de respuesta de forma dada por la ec. (2).
- RS3: función de falla de ec. (9) con superficie de respuesta de forma dada por la ec. (3).
- RS4: función de falla de ec. (10) con superficie de respuesta de forma dada por la ec. (3).

En la figura 1 se muestran las superficies de respuesta media  $\bar{F}(X)$  generadas por los procesos descriptos: RS1, RS2, RS3 y RS4, en función de la variable aceleración pico  $a_G$ . Se utilizaron cinco secuencias diferentes de ángulos de fase en la generación de acelerogramas.

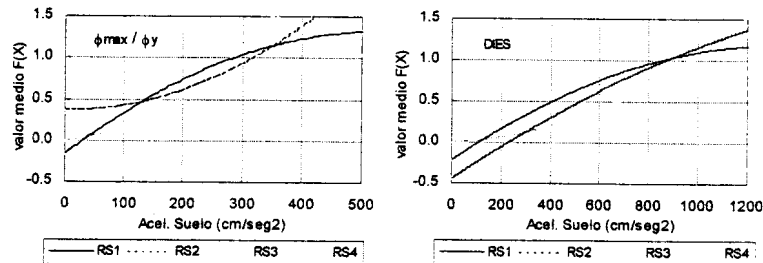


Figura 1: Superficies de respuesta media

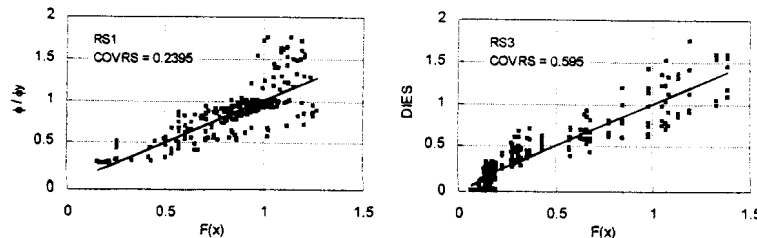


Figura 2: Dispersión de la superficie de respuesta con C.O.V. promedio.

El criterio de considerar la dispersión de acuerdo a ec. (4) se muestra en la Fig.2, como ejemplo, en los casos de RS1 para  $\phi_{max} / \phi_y$  y RS3 para *DIES*, mientras que en la Fig.3 se representan las superficies de desvios standard comparando los dos criterios:  $\sigma(X) = COVRS * F(X)$  utilizado en RS1 y RS3, y  $\sigma(X)$  generado a partir de ec.(6) utilizado en RS2 y RS4.

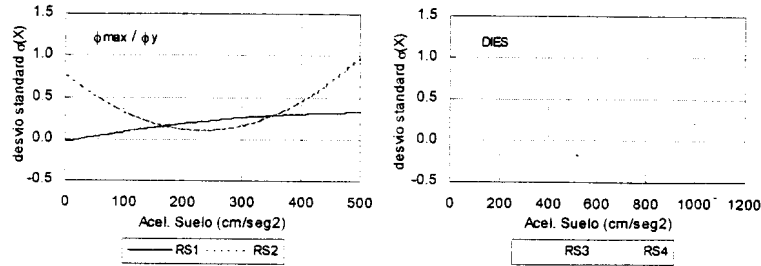


Figura 3: Superficie cuadrática de desvío standard.

Se calcula la probabilidad de falla si ocurre un evento sísmico  $P_{fE}$  y su correspondiente índice de confiabilidad  $\beta_E$ , utilizando FORM. Considerando la ocurrencia de terremotos como un proceso de Poisson con frecuencia anual  $\nu = 0.2$ , se obtiene la probabilidad de falla anual con:

$$P_f(t=1) = 1 - \exp(-\nu P_{fE} t) \quad (11)$$

La tabla II resume los resultados encontrados.

Tabla II: Probabilidad de falla para estructura péndulo invertido.

Estado límite	Aprox.	COVRS	$P_{fE}$	$\beta_E$	$P_f(\nu=0.2)$	$\beta$
Servicio $\phi_{max} / \phi_y$	RS1	0.239	$4.903 \cdot 10^{-2}$	1.654	$9.759 \cdot 10^{-3}$	2.335
	RS2		$7.762 \cdot 10^{-2}$	1.779	$7.496 \cdot 10^{-3}$	2.433
	RS3	1.726	$8.123 \cdot 10^{-2}$	1.397	$1.612 \cdot 10^{-2}$	2.141
	RS4		$5.410 \cdot 10^{-2}$	1.606	$1.076 \cdot 10^{-2}$	2.299
Control daños DIES = 0.40	RS1	0.392	$1.537 \cdot 10^{-2}$	2.160	$3.070 \cdot 10^{-3}$	2.740
	RS2		$1.447 \cdot 10^{-2}$	2.184	$2.890 \cdot 10^{-3}$	2.760
	RS3	0.595	$1.127 \cdot 10^{-2}$	2.281	$2.251 \cdot 10^{-3}$	2.841
	RS4		$0.941 \cdot 10^{-2}$	2.349	$1.881 \cdot 10^{-3}$	2.897
Colapso DIES = 1.00	RS1	0.298	$3.806 \cdot 10^{-3}$	2.669	$7.609 \cdot 10^{-4}$	3.171
	RS2		$3.203 \cdot 10^{-3}$	2.726	$6.405 \cdot 10^{-4}$	3.220
	RS3	0.595	$3.021 \cdot 10^{-3}$	2.745	$6.040 \cdot 10^{-4}$	3.237
	RS4		$2.401 \cdot 10^{-3}$	2.820	$4.802 \cdot 10^{-4}$	3.302

#### Observaciones

- Los valores de  $\beta$  son menores (mayor  $P_f$ ) con RS1 que con RS2 y similarmente con RS3 que con RS4. Se explica porque en la evaluación de la dispersión de la superficie de respuesta con (4) en RS1 y RS3 se tiene en cuenta, no sólo las diferentes secuencias de ángulo de fase, sino también el error en la aproximación por mínimos cuadrados. Esto último no es considerado con (6) en RS2 y RS4.

- En cuanto a la forma de la superficie de respuesta, en RS1 y RS2 se utiliza la ec.(2) con proceso de ajuste iterativo, mientras que en RS3 y RS4 se utiliza la ec. (3) que cumple condiciones de borde con relación a  $a_G$ . En este ejemplo resultan diferencias en  $\beta_E$ , promedio entre estas dos formas de  $F(X)$ , de 12.5 % para servicio, 6.6 % para control de daños y 3.2 % para colapso.

- La diferencia en el estado límite de servicio se debe a que para  $\phi_{max} / \phi_y = 1.00$  se produce un cambio brusco de rigidez al pasar del régimen elástico al plástico. El ajuste iterativo alrededor del punto de diseño, justo en  $\phi_{max} / \phi_y = 1.00$ , utilizado en RS1 y RS2 es más preciso, ver en tabla II el menor COVRS, mientras que en RS3 y RS4 este quiebre aparece "suavizado" con menor  $\phi_y$  y en consecuencia mayor  $P_{fE}$  o menor  $\beta_E$ .

- En los estados límites de control de daños y colapso, la superficie de respuesta no presenta variaciones bruscas, y las diferencias se deben más a la influencia de la condición de borde para  $a_G = 0$ , más significativo justamente para control de daños.

Para el estado límite de control de daños se verifican los resultados con simulación orientada (adaptive sampling) utilizando la siguiente función de falla:

$$G(\mathbf{X}) = RLIM - R(\mathbf{X}) + COVRL * RLIM * X_{N+1} \quad (12)$$

siendo  $RLIM = 0.40$  índice de daño límite y  $R(\mathbf{X})$  el índice de daño calculado en cada simulación, directamente con análisis dinámico no lineal sin utilizar superficie de respuesta. La convergencia se logró luego de 7 iteraciones de 2000 muestras cada una. Se obtuvo  $\beta_E = 2.250$  con  $P_E = 1.223 \cdot 10^{-2}$

Resulta, para este ejemplo, que con la superficie de respuesta de ec.(3) con dispersión evaluada según ec.(4) y función de falla según ec.(9), es decir RS3:  $\beta_E = 2.281$  y  $P_E = 1.127 \cdot 10^{-2}$  (ver tabla II), se aproxima mejor al resultado "exacto" obtenido por simulación, con diferencia en  $\beta_E$  de sólo 1,4%.

### CONCLUSIONES

- El método de la superficie de respuesta consiste en reemplazar la respuesta real de la estructura por una superficie explícita, aproximada, en término de las variables aleatorias básicas, con la cual el cálculo de la probabilidad de falla se realiza sin dificultad.
- La superficie de respuesta ajustada iterativamente alrededor del punto de diseño es más conveniente cuando la función de falla presenta cambios bruscos de pendiente en esa zona.
- Cuando la variación de la respuesta es suave, resulta recomendable utilizar la otra forma de superficie de respuesta analizada porque, además de cumplir con condiciones de borde, se puede generar en forma independiente de la evaluación de la probabilidad de falla. Esta posibilidad permite utilizar software standard de elementos finitos.
- Los resultados de simulación (adaptive sampling) utilizando directamente la respuesta dinámica no lineal, indican para este ejemplo, y estado límite de control de daños, que la mejor aproximación es utilizar la superficie de respuesta que cumple condiciones de borde junto con el coeficiente de variación promedio que considera la dispersión debido a las variables aleatorias adicionales y el ajuste de la superficie promedio por mínimos cuadrados.
- Finalmente se destaca la utilidad del método de la superficie de respuesta para evaluar la probabilidad de excedencia anual de múltiples niveles de performance.

### REFERENCIAS

- [1] SEAOC (1995). Vision 2000 "Performance based seismic engineering of buildings". Structural Engineers Association of California, Sacramento, California, USA.
- [2] Krawinkler, H. (1997). "Research issues in performance based seismic engineering". Seismic Design Methodologies for the Next Generation of Codes". Fajfar & Krawinkler (eds.), Balkema, Rotterdam.
- [3] Melchers, R.E. (1987). "Structural Reliability - Analysis and Prediction". John Wiley & Sons.
- [4] Bucher, C.G., Bourgund, U. (1990). "A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems". Structural Safety, Vol. 7, 57-66.
- [5] Wong, F.S. (1984). "Uncertainties in dynamic soil-structure interaction". J. Eng. Mech., ASCE, Vol. 110, 308-324.
- [6] Wong, F.S. (1985). "Slope reliability and response surface method". J. Geot. Eng., ASCE, Vol. 111, 32-53.
- [7] Faravelli, L. (1989). "Response surface approach for reliability analysis". J. Eng. Mech., ASCE, Vol. 115, 2763-2781.
- [8] Rajashekhar, M.R., Ellingwood, B.R., (1993). "A new look at the response surface approach for reliability analysis". Structural Safety, Vol. 12, 205-220
- [9] Kim, S-H., Na, S-W., (1997). "Response surface method using vector projected sampling points". Structural Safety, Vol. 19, 3-19.
- [10] Möller, O. (1999). "Probabilidad de falla en estructuras con comportamiento no lineal bajo acciones sísmicas, con el método de la superficie de respuesta". Mecánica Computacional Vol. Especial, AMCA, 519-528.
- [11] Clough, R.W., Penzien, J. (1975). Dynamic of Structures. Mc Graw Hill.
- [12] INPRES (1995). "Microzonificación Sísmica del Gran Mendoza". Publ. Téc. N° 19.
- [13] Möller, O., Etse, G., Giuliano, A.P., Rubinstein, M. (1998). "Computational analysis of non linear dynamic behavior of reinforced concrete frames". Comp. Mech.: New Trends and Applications (Ed. S. Idelsohn, E. Oñate, E. Dvorkin) Part II, Sec. 5, Title 9, IACM.
- [14] Park, Y.J., Ang, A-H.S. (1985). "Mechanistic seismic damage model for reinforced concrete", J. Struct. Eng., Vol III, 4, 722-739.