

**ANÁLISIS DINÁMICO DE PLACAS RECTANGULARES  
CON APOYOS LINEALES INTERMEDIOS PARCIALES RECTOS O CURVOS**

**Marta B. Rosales<sup>1</sup>, Carlos P. Filipich<sup>1,2</sup> y Mario R. Escalante<sup>1,3</sup>**

<sup>1</sup>Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur  
Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina.  
e-mail: mrosales@criba.edu.ar

<sup>2</sup>Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur  
Grupo de Análisis de Sistemas Mecánicos, FRBB, Universidad Tecnológica Nacional  
8000 Bahía Blanca, Argentina

<sup>3</sup>Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur  
FRCU, Universidad Tecnológica Nacional, 3260 C. del Uruguay, Argentina  
e-mail: escalam@frcu.utn.edu.ar

**RESUMEN**

En este trabajo se presenta el cálculo de las frecuencias naturales de placas rectangulares con una o más líneas de apoyos parciales intermedios, rectos o curvos, utilizando una metodología variacional original de los autores denominada MEC (Método del Elemento Completo). Para la consideración de los apoyos intermedios se utilizan series trigonométricas ampliadas con el agregado de multiplicadores de Lagrange. Son exploradas dos variantes como restricciones, a saber: la nulidad del trabajo de la reacción a lo largo del apoyo, y como variante se agrega la nulidad de la tangente direccional a la línea de apoyo. La segunda opción presenta alguna ventaja relativa en cuanto a tiempo computacional. Se resuelven numéricamente algunos ejemplos, en donde las frecuencias son halladas con precisión arbitraria, comparándose los resultados con los reportados por otros autores (apoyos lineales intermedios completos) y con el Método de Elementos Finitos, tratándose de apoyos parciales.

**ABSTRACT**

The natural frequencies of rectangular plates with one or more lines of partial, intermediate, supports, straight or curved, are herein obtained using an original variational methodology of the authors named WEM (Whole Element Method). The intermediate supports are taken into account by means of extended trigonometric series with the addition of Lagrange Multipliers. Two variants of restriction models are explored: The nullity condition for the work of the force along the support line, and as a variation the nullity of the directional tangent which present some relative advantage regarding the computational time. Several numeral examples are included. The frequencies are obtained with arbitrary precision. Comparison is made with results from other authors (complete intermediate supports) and with FEM when dealing with partial supports.

**INTRODUCCION**

El problema de vibraciones de placas delgadas sobre apoyos intermedios lineales rectos o curvos ha sido tratado por varios autores [1-5] para el caso que el apoyo sea completo (diagonales, paralelos a los bordes o inclinados), uniendo en todos los casos bordes de la placa. Sin embargo no ha sido estudiado con frecuencia en la literatura el tipo de vinculación parcial.

La metodología variacional que es usada para resolver el problema planteado ha sido desarrollada y aplicada por los autores a una gran variedad de problemas de valores en la frontera (aún no lineales) en dominios de una, dos y tres dimensiones. También han sido abordadas satisfactoriamente con este método ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales como así también ecuaciones diferenciales en derivadas parciales [6-10]. Básicamente el Método del Elemento Completo (MEC) consiste en establecer un funcional apropiado. Se introduce luego una secuencia extremante (minimizante). Tal secuencia es una combinación lineal de funciones pertenecientes a un conjunto completo en  $L_2$ . Solamente la satisfacción de las condiciones de borde esenciales (o geométricas) es requerida para la secuencia (y no para cada función coordenada). Esto es, si el problema es gobernado por una ecuación diferencial de orden  $2k$ , las condiciones o funciones esenciales son aquellas que involucran derivadas de orden  $\leq (2k-1)$ . Los autores han establecido y demostrado los teoremas y corolarios [10] que aseguran la exactitud de los autovalores y la convergencia uniforme de las funciones esenciales (aquí las formas modales y las respectivas derivadas primeras). Encontrar tal función para un problema bidimensional o de mayor orden (Ver [9]) es una de las mayores contribuciones del MEC. Las secuencias extremante son sistemáticamente generadas aún en problemas diversos. Aún más, el MEC es capaz de manejar problemas en los que el funcional no existe en el sentido clásico. En efecto, los autores han demostrado que el procedimiento desemboca con el planteo de un pseudo trabajo virtual en estas secuencias particulares. El nombre del método se origina en la ventaja que ofrece para el tratamiento de discontinuidades tales como cambios de sección, masas, resortes o apoyos intermedios. En efecto, en este método toda la placa es tratada como una pieza completa (un elemento).

### PLANTEO DEL PROBLEMA

El funcional correspondiente a las vibraciones libres de una placa rectangular simplemente apoyada en sus cuatro bordes y con un apoyo intermedio rígido recto o curvo (Figura A) es:

$$\mathfrak{J}(w) = \|w'' + \lambda^2 \bar{w}\|^2 - \Omega^2 \|w\|^2 - 2 \int_0^1 f(\varepsilon) w(\varepsilon) d\varepsilon \quad (1)$$

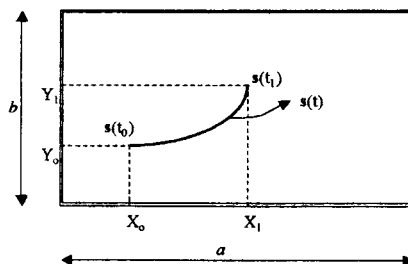


Figura A

en donde  $f(\varepsilon)$  es una función "multiplicador de Lagrange",  $w$  es el desplazamiento transversal y

$(\cdot)' \equiv \frac{\partial w}{\partial x}$ ;  $(\cdot)'' \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ , etc.. Se introduce un cambio de variables de forma tal de trabajar en el dominio

$\{D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  y  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ .

$$x \equiv \frac{X}{a}; y \equiv \frac{Y}{b}; \varepsilon \equiv \frac{t-t_0}{\Delta}; \Delta \equiv t_1 - t_0; \lambda \equiv \frac{a}{b} \quad (2)$$

Además  $f(\varepsilon)$  representa la reacción distribuida en el apoyo. La integral que aparece en (1) pone en evidencia la restricción a través de la nulidad del trabajo (reacción por desplazamiento).

El MEC requiere en este problema del planteo de una secuencia extremante (minimizante) en un dominio bidimensional. Debe verificarse que tanto la función desplazamiento como sus derivadas primeras sean de convergencia uniforme. Se demuestra [11] que una de dichas secuencias puede ser:

$$w_{MN} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N A_{ij} s_i s_j + y \left( \sum_{i=1}^M A_{i0} s_i + a_{00} \right) + x \left( \sum_{j=1}^N A_{0j} s_j + a_{00} \right) + \sum_{i=1}^M a_{i0} s_i + \sum_{j=1}^N a_{0j} s_j + A_{00} xy + a_0 \quad (3)$$

donde se define  $s_i \equiv \sin \alpha_i$ ;  $s_j \equiv \sin \beta_j$ ;  $\alpha_i \equiv i\pi$ ;  $\beta_j \equiv j\pi$ . En este trabajo se aplicará el MEC a una placa con sus cuatro bordes apoyados. Introduciendo las condiciones de borde esenciales (C.B.) en (3) la secuencia resultará

$$w_{MN}(x, y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N A_{ij} s_i s_j \quad (4)$$

Una alternativa es imponer que la reacción distribuida continua desconocida del apoyo se escriba como una expansión ampliada de Fourier tal cual venimos utilizando pero en una variable. Es decir

$$f(\varepsilon) = \sum_{p=1}^P a_p \sin p\pi\varepsilon + \varepsilon a_0 + k \quad (a) \quad \text{o bien} \quad f(\varepsilon) = \sum_{p=0}^P b_p \cos p\pi\varepsilon \quad (b) \quad (5)$$

donde  $a_p, a_0, k$  y  $b_p$  son constantes desconocidas. Como sabemos tanto (5)(a) como (5)(b) dan convergencia uniforme (C.U.) para una  $f(\varepsilon)$  continua entre 0 y 1. Luego el funcional a utilizar con (5)(b) será: (Ver (1) y (5)(b))

$$\mathfrak{J}_{MN} = \|w_{MN}^*\|^2 + \lambda^2 \|\bar{w}_{MN}\|^2 - \Omega^2 \|w_{MN}\|^2 - 2 \sum_{p=0}^P b_p \int_0^1 \cos \gamma_p \varepsilon w_{MN}(\varepsilon\Delta + t_0) d\varepsilon \quad (6)$$

siendo  $\gamma_p = p\pi$ ,  $p = 0, 1, \dots, P$ . Aplicando la condición de extremo del funcional e integrando obtenemos

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \delta A_{ij} \left\{ \frac{A_{ij} \Delta_{ij}}{4} - \sum_{p=0}^P b_p k_{pji} \right\} - \sum_{p=0}^P \delta b_p \left\{ \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N A_{ij} k_{pji} \right\} = 0 \quad (7)$$

siendo:

$$\Delta_{ij} = (\alpha_i^2 + \lambda^2 \beta_j^2)^2 - \Omega^2 \quad (a) ; \quad k_{pji} = \int_0^1 \cos \gamma_p \varepsilon \sin \alpha_i x [t_0 + \varepsilon\Delta] \sin \beta_j y [t_0 + \varepsilon\Delta] d\varepsilon \quad (b) \quad (8)$$

Para variaciones arbitrarias de  $\delta A_{ij}$  y  $\delta b_p$  debe cumplirse para satisfacer (7) que:

$$\frac{A_{ij} \Delta_{ij}}{4} - \sum_{p=0}^P b_p k_{pji} = 0 \quad \left( \begin{array}{l} i=1, 2, \dots, M \\ j=1, 2, \dots, N \end{array} \right) \quad (a) ; \quad \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N A_{ij} k_{pji} = 0 \quad (p=0, 1, 2, \dots, P) \quad (b) \quad (9)$$

Despejando  $A_{ij}$  de (9)(a) y reemplazándola en (9)(b) se tiene

$$\sum_{p=0}^P b_p k_{pq} = 0 \quad \text{con} \quad k_{pq} \equiv \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{k_{pji} k_{qji}}{\Delta_{ij}} \quad (p, q = 0, 1, 2, \dots, P) \quad (10)$$

La ecuación (10) representa un sistema lineal homogéneo de orden  $(P+1)$  del cual se pueden hallar  $(P+1)$  frecuencias  $\Omega_k$  ( $k=0, 1, 2, \dots, P$ ).

En el caso de múltiples apoyos intermedios lineales, el análisis es idéntico, con la sola particularidad de que en el funcional, habrá tantos sumandos análogos al último término de la ecuación (1) como apoyos intermedios tenga el caso a analizar.

### Apoyo parcial o completo sobre línea recta

Para este caso particular la ecuación paramétrica del segmento lineal de apoyo interno es

$$X = X_0 + (X_1 - X_0)t = X_0 + v_1 t \quad ; \quad Y = Y_0 + (Y_1 - Y_0)t = Y_0 + v_2 t \quad (11)$$

siendo  $v_1 = X_1 - X_0$  y  $v_2 = Y_1 - Y_0$ . Además  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 1$ ,  $\Delta = 1$  y  $\varepsilon = t$ . Luego (8)(b) queda:

$$k_{pq} = \int_0^1 \cos(p\pi\varepsilon) \operatorname{sen}[i\pi(x_0 + v_1\varepsilon)] \operatorname{sen}[j\pi(y_0 + v_2\varepsilon)] d\varepsilon$$

### Apoyo parcial o completo sobre línea curva

Se analizó, a modo de ejemplo, el caso de la placa rectangular delgada simplemente apoyada en sus cuatro bordes, con un apoyo lineal intermedio sobre un arco de elipse. Hacer extensivo el estudio a otro tipo de curvas de apoyo es análogo y muy simple. La ecuación paramétrica del arco de elipse estará dada por:

$$X = X_0 + A \cos t \quad ; \quad Y = Y_0 + B \operatorname{sen} t \quad \text{con } t_0 < t < t_1 \quad (12)$$

en donde  $(X_0, Y_0)$  representa las coordenadas del centro de la elipse,  $A$  y  $B$  los semiejes mayor y menor respectivamente. Haciendo el cambio de variables dado por (2), la ec. (8)(b) queda

$$k_{pq} = \int_0^1 \cos(p\pi\varepsilon) \operatorname{sen}[i\pi(x_0 + e_1 \cos(t_0 + \Delta\varepsilon))] \operatorname{sen}[j\pi(y_0 + e_2 \operatorname{sen}(t_0 + \Delta\varepsilon))] d\varepsilon$$

siendo  $e_1 = A/a$  y  $e_2 = B/b$ .

## RESULTADOS NUMÉRICOS

Se analizaron varios ejemplos numéricos. En Tabla I, se reportan las tres primeras frecuencias de algunos casos típicos halladas con MEC utilizando  $M = N = 300$  y  $P = 50$ . En la misma tabla se comparan valores del parámetro de frecuencia con los hallados por Takahashi y Chishaki [1], Young y Dickinson [3], Laura *et al.* [5], o con ALGOR [12] en aquellos en los que no existen resultados en la literatura. Como se observa se obtienen excelentes resultados. En general los valores hallados con MEC son inferiores. Los resultados extraídos de [1] resultan ser cotas inferiores ya que el apoyo es discretizado dando lugar a un modelo menos rígido, mientras que los dados por [3], [5] y [12] son cotas superiores. Se ha demostrado en forma teórica que el MEC conduce a las frecuencias exactas. Esto último, cuando se trata de resultados numéricos se traduce en valores de precisión arbitraria.





En la Tabla II se dan los valores la frecuencia fundamental de dos ejemplos con apoyos intermedios curvos y otros dos con apoyos intermedios múltiples, comparándose en los resultados obtenidos con MEC, con los hallados con ALGOR. En todos los casos se trata de placas rectangulares delgadas simplemente apoyadas en sus cuatro bordes. Los valores hallados con MEC, se obtuvieron tomando  $M = N = 300$  y  $P = 50$ . Los hallados con ALGOR se obtuvieron con un mallado sobre la placa rectangular de 1600 elementos y adaptándola luego según el apoyo intermedio en los dos primeros casos y un mallado regular de 1280 elementos en los dos últimos.

## CONCLUSIONES

Para resolver el problema del título se ha utilizado una herramienta denominada MEC que permite resolver prácticamente cualquier problema diferencial, asegurando la precisión arbitraria de los resultados. Su principal ventaja reside en el planteo sistemático de las funciones incógnitas. No es necesario proponer una "buena" función de prueba para cada caso. Como sabemos del método de Rayleigh-Ritz una "buena" elección intuitiva puede conducir a errores de significación como son pérdidas de fre-

cuencias. En tanto en el MEC *a priori* se parte de secuencias completas en  $L_2$  y si las funciones de interés son continuas se asegura la convergencia uniforme de la solución hacia las mismas.

Tabla I: Parámetros de frecuencias de placas rectangulares y cuadradas simplemente apoyadas en sus cuatro bordes con soporte lineal rígido intermedio recto. \*Rayleigh-Ritz. \*\*MEF.

MODELO	EC. DEL APOYO Y REL. DE LADOS	$\Omega$	MEC	OTROS MÉTODOS
	$x = 0.2$ $\lambda = 1$	$\Omega_1$ $\Omega_2$ $\Omega_3$	29.642 57.494 79.497	30.566*, 29.644** [5]
	$y = 1/2(x - 1)$ $\lambda = 2$	$\Omega_1$ $\Omega_2$ $\Omega_3$	100.358 110.109 191.174	101.12 [3]; 100.20 [1] 111.04 [3]; 110.04 [1] 192.16 [3]; 191.00 [1]
	$x = 0.25$ $0.25 \leq y \leq 0.5$ $\lambda = 1$	$\Omega_1$ $\Omega_2$ $\Omega_3$	30.917 55.593 76.673	30.931 [12] 55.627 [12] 76.745 [12]
	$y = x$ $0.25 \leq x \leq 0.25$ $\lambda = 1$	$\Omega_1$ $\Omega_2$ $\Omega_3$	49.348 52.642 72.674	49.355 [12] 52.729 [12] 72.714 [12]

Como alternativa se analizó también imponer mediante multiplicadores de Lagrange, la condición de trabajo de giro nulo sobre la curva. Esto es, que la derivada en la dirección tangencial a la curva de apoyo sea nula. Los resultados obtenidos son idénticos sólo que para obtener la misma precisión esta última variante exige tomar menor cantidad de términos en las expansiones de las reacciones.

En la presente contribución se logra convergencia uniforme de las formas modales y frecuencias de precisión arbitraria.


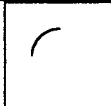


La consideración de otras condiciones de borde para la placa (empotramientos, bordes libres) solo representan el agregado de cierta complejidad algebraica. El caso de los bordes empotrados ya ha sido estudiado y los resultados serán publicados próximamente.

#### REFERENCIAS

- [1] Takahashi, K. and Chishaki, T., *Journal of Sound and Vibration* **60**, 299-304. Free vibrations of a rectangular plate on oblique supports, 1978
- [2] Gorman D. J., *Journal of Sound and Vibration* **66**, 239-246. Solutions of the Lévy type for the free vibration analysis of diagonally supported rectangular plates, 1979
- [3] Young, P.G. and Dickinson, S.M., *Journal of Sound and Vibration* **162**, 123-135. On the free flexural vibration of rectangular plates with straight or curved internal line supports, 1993
- [4] Kim, C. S., *Journal of Sound and Vibration* **180**, 769-784. Free vibration of rectangular plates with an arbitrary straight line support, 1995
- [5] Laura, P. A., Bambill, D. V., and Rossi, R. E., *Journal of Sound and Vibration* **223**, 834-841. Vibrations of continuous, rectangular plates in the case of oblique intermediate supports, 1999
- [6] Filipich, C. P., and Rosales, M. B., *Journal of Sound and Vibration* **170**, 263-269. Beams and arcs: exact frequencies via a generalized solution, 1994
- [7] Filipich, C. P., and Rosales, M. B., *Applied Mechanics Review* **50**, S50-S55. A variational solution for an initial conditions problem, 1997

- [8] Filipich, C. P., and Rosales, M. B., *Proceedings of the 4<sup>th</sup> World Congress on Computational Mechanics (WCCM)*. Buenos Aires, Argentina. CD-ROM 16 pp. Dynamic behavior of a uniform linear beam supported with non-linear rotational springs, 1999
- [9] Filipich, C. P., and Rosales, M. B. and Bellés, P. M., *Journal of Sound and Vibration* 212, 599-610. Natural vibration of rectangular plates considered as tridimensional solids, 1998
- [10] Rosales, M. B., *Tesis Doctoral, Universidad Nacional del Sur, Argentina*. Un método variacional no clásico y sus aplicaciones a estática y dinámica de elementos estructurales, 1997
- [11] Filipich, C. P., and Rosales, M. B., *Journal of Sound and Vibration* 230, 521-539. Arbitrary precision frequencies of a free rectangular thin plate, 1999
- [12] ALGOR Software. Versión 12.04 WIN 1999. Pittsburg, USA: Algor Inc.

Tabla II: parámetros de frecuencia fundamental de placas rectangulares simplemente apoyadas en sus cuatro bordes con soportes lineales rígidos intermedios rectos múltiples y curvos.

MODELO	APOYO	$\Omega_1$		
		MEC	MEF	REF. [3]
	$\lambda = 1$ $C = (0.5, 0.5); r = 0.25$ $0 \leq t \leq 2\pi$	98.899	99.177	98.913
	$\lambda = 1$ $C = (0.5, 0.5); r = 0.25$ $\pi/2 \leq t \leq \pi$	37.069	37.103	
	$\lambda = 1.25$ $x = 0.2; 0.25 \leq y \leq 0.75$ $y = 0.25; 0.2 \leq x \leq 0.5$	49.746	50.122	
	$\lambda = 1.25$ $x = 0.2; 0.25 \leq y \leq 0.5$ $y = 0.25; 0.2 \leq x \leq 0.5$ $x = 0.5; 0.25 \leq y \leq 0.5$	63.245	63.578	