



VIBRACIONES TRANSVERSALES DE UNA PLACA RECTANGULAR ELASTICAMENTE  
RESTRINGIDA CONTRA ROTACION EN SUS CUATRO BORDES Y SOMETIDA A UNA  
DISTRIBUCION LINEAL DE ESFUERZOS EN DOS BORDES OPUESTOS

por P.A.A. Laura, R.H. Gutierrez, J.A. Reyes y S. Reyes  
Instituto de Mecánica Aplicada (CONICET) y Departamento de Ingeniería,  
Universidad Nacional del Sur. 8000 - Bahía Blanca

**Resumen.**

Se obtiene la frecuencia fundamental de vibración del sistema estructural en cuestión mediante un enfoque variacional. La amplitud de desplazamiento es aproximada mediante simples aproximaciones polinómicas que satisfacen las condiciones de contorno y que contienen un parámetro exponencial que permite optimizar el autovalor buscado.

Se puntualizan algunos errores existentes en la literatura al tratar situaciones de placas o losas vibrantes sometidas a esfuerzos no uniformes en el plano.

**Abstract.**

An approximate value of the fundamental frequency coefficient of the structural system described in the title is determined in the present paper using the optimized Rayleigh-Ritz method. The displacement amplitude is expressed in terms of polynomial coordinate functions which satisfy, identically, the governing boundary conditions.

Some errors existing in the technical literature when dealing with vibrating plates, subject to non-uniform in-plane stresses, are pointed out.

**Introducción.**

Sea el sistema estructural que se muestra en la Figura 1. Constituye el único caso (obviamente el de distribución uniforme constituye una situación particular) donde, de acuerdo a la teoría matemática de la elasticidad, la distribución de esfuerzos en la placa es determinada en forma inmediata obteniéndose

$$N_x = S_0 y/b \quad ; \quad N_x = N_{xy} = 0 \quad (1)$$

Curiosamente algunos especialistas en vibraciones mecánicas han cometido el grave error de suponer que si la distribución de esfuerzos en los bordes obedece una relación funcional diferente de la lineal, por ejemplo  $S_0 \text{ sen } \pi y/b$ , la distribución de esfuerzos en la placa estará dada por

$$N_x = S_0 \text{ sen } \pi y/b \quad ; \quad N_y = N_{xy} = 0 \quad (2)$$

Evidentemente (2) no satisface la ecuación biarmónica de Airy y por consiguiente la solución es incorrecta. A título ilustrativo se menciona el hecho de que un trabajo publicado recientemente en un prestigioso medio de difusión científica contiene una solución errónea

similar a la (2) [1] y ha sido puntualizado en [2].

En este trabajo se propone una solución variacional del problema de la determinación de la frecuencia fundamental de vibración de una placa sometida a esfuerzos en el plano y definidos por (1). La solución obtenida es válida para cualquier combinación de las condiciones de borde "clásicas" y también, obviamente, para valores intermedios de los coeficientes de flexibilidad  $\theta$ . Se demuestra que los valores obtenidos están en buen acuerdo con los determinados utilizando un código "standard" de elementos finitos [3].

#### Placas Rectangulares con Esfuerzos No Uniforme en su Plano.

El sistema mecánico en estudio se muestra en la Fig. 1. La funcional es:

$$J(W) = D \iint_P \left[ \left( W_{xx} + W_{yy} \right)^2 - 2(1-\nu) \left( W_{xx} W_{yy} - W_{xy}^2 \right) \right] dx dy + \iint_P N(\bar{y}) W_x^2 dx dy - \rho h \omega^2 \iint_P W^2 dx dy \quad (3)$$

Con  $N(\bar{y}) = N_0 \bar{y}/b$  siendo  $N_0$ : constante (positivo o negativo según que  $N(\bar{y})$  sea de tracción o de compresión respectivamente), efectuando el cambio de variables

$$\bar{x} = ax, \quad \bar{y} = by$$

y llamando  $\lambda = a/b$ , la (3) resulta

$$\frac{\lambda a^2}{D} J(W) = \iint_P \left[ \left( W_{xx} + \lambda^2 W_{yy} \right)^2 - 2(1-\nu)\lambda^2 \left( W_{xx} W_{yy} - W_{xy}^2 \right) \right] dx dy + \lambda^2 \alpha \iint_P y W_x^2 - \Omega^2 \iint_P W^2 dx dy \quad (4)$$

$$\text{con } \alpha = \frac{b^2 N_0}{D}, \quad \Omega^2 = \frac{\rho h a^4 \omega^2}{D}$$

Para el empleo del método de Ritz adoptamos la función aproximante [4-5]

$$W_\alpha = \sum_{j=1}^k C_j \varphi_j(x,y) \quad (5)$$

con

$$\varphi_j(x,y) = (x^q + \alpha_{j3} x^3 + \alpha_{j2} x^2 + \alpha_{j1} x)(y^q + \beta_{j3} y^3 + \beta_{j2} y^2 + \beta_{j1} y)$$

siendo  $q = p+j-1$ , y  $p$ : parámetro. Los coeficientes  $\alpha_{j3}, \dots, \beta_{j1}$  se calculan de modo que las  $\varphi_j(x,y)$  satisfagan las condiciones de

contorno que correspondan. Por ejemplo si el borde  $\bar{x} = a$  está elásticamente restringido contra rotación se tendrá

$$W(a,\bar{y}) = 0 \quad (6a)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x}(a,y) = -\theta_2 D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=a} \quad (6b)$$

donde  $\theta_2$  es el coeficiente de flexibilidad del borde  $\bar{x} = a$ . Si dicho borde está rigidamente empotrado, se tiene  $\theta_2 = 0$ . Si está simplemente apoyado:  $\theta_2 \rightarrow \infty$ .

**Resultados Numéricos.**

La Tabla 1 muestra valores de  $\Omega_1 = \sqrt{\rho h/D} \omega_1 a^2$  para diversas combinaciones de valores de  $\lambda = a/b$  y de  $\alpha = (N_0/D) b^2$  en el caso de una placa simplemente apoyada en los cuatro bordes ( $\theta_i \rightarrow \infty$ ). También se muestran en la Tabla 1 los valores obtenidos en [1] mediante a) el uso de un código de elementos finitos [3] y b) la técnica tipo Levy, desarrollada en [1] utilizando 40 términos de la correspondiente serie\*. La máxima diferencia con el autovalor determinado en el presente estudio es del orden del 0.3%.

La Tabla 2 contiene resultados de  $\Omega_1$  en el caso de una placa empotrada ( $\theta_i \rightarrow 0$ ) para las mismas combinaciones de valores de  $\lambda$  y  $\alpha$ .

Dada la buena concordancia de valores obtenida en el caso de la Tabla 1, es razonable suponer que al menos desde el punto de vista de las aplicaciones prácticas, la metodología propuesta brinda apreciables ventajas dada su simplicidad.

**Agradecimientos.**

El presente estudio ha sido auspiciado por el CONICET (PID-BID 003/92) y por la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur (Proyecto: 1986-1987, Director: Profesor Ing. Raúl E. Rossi).

**Referencias.**

- (1) S. Kukla y B. Skalmierski. 1995. Journal of Sound and Vibration 187, 339-343. Free vibrations of a rectangular plate loaded by a non-uniform in-plane force.
- (2) P.A.A. Laura, D.R. Avalos y H.A. Larrondo. 1996. Journal of Sound and Vibration (a ser publicado). Comments on "Free vibrations of a rectangular plate loaded by a non-uniform in-plane force".
- (3) COSMOS/M 1991. User Guide, Versión 1.65, Structural Research and Analysis Corporation, Santa Mónica, California.
- (4) P.A.A. Laura, L.E. Luisoni y C.P. Filipich. 1977. Journal of Sound and Vibration 55, 327-333. A note on the determination of the fundamental frequency of vibration of thin, rectangular plates with edges possessing different rotational flexibility coefficients.
- (5) P.A.A. Laura. 1995. 1995. Ocean Engineering 22(3), 235-250. Optimization of variational methods.

\*

Este caso es el único tratado correctamente en [1].

$\lambda$	$\alpha =$				50	
	10	20	30	50	Elem. Finitos Analit. [1]	Elem. Finitos Analit. [1]
0.25	10.633	10.777	10.919	11.197		
0.50	12.828	13.298	13.753	14.617		
1.00	20.951	22.092	23.175	25.196		
1.25	26.771	28.169	29.497	31.982		
1.50	33.762	35.363	36.891	39.764	39.72	39.74
2.00	51.309	53.193	55.011	58.489		

$\lambda$	$\alpha =$				-50	
	-10	-20	-30	-50	Elem. Finitos Analit. [1]	Elem. Finitos Analit. [1]
0.25	10.339	10.188	10.036	9.723		
0.50	11.826	11.291	10.729	9.508		
1.00	18.446	17.048	15.527	11.867		
1.25	23.716	22.022	20.180	15.850		
1.50	30.295	28.395	26.353	21.691	21.63	21.659
2.00	47.305	45.165	42.913	37.995		

TABLA 1 - Valores de  $\Omega_1$  en el caso de una placa rectangular simplemente apoyada en los cuatro bordes.

$\lambda$	$\alpha$	10	20	30	50
0.25		22.924	23.008	23.091	23.256
0.50		24.937	25.238	25.535	26.118
1.00		36.823	37.628	38.414	39.939
1.25		47.730	48.701	49.651	51.497
1.50		61.952	63.033	64.093	66.158
2.00		99.747	100.952	102.141	104.473

$\lambda$	$\alpha$	-10	-20	-30	-50
0.25		22.757	22.673	22.588	22.418
0.50		24.321	24.006	23.686	23.032
1.00		35.156	34.287	33.393	31.517
1.25		45.721	44.677	43.605	41.364
1.50		59.721	58.570	57.391	54.948
2.00		97.283	96.024	94.745	92.127

Tabla 2 - Valores de  $\Omega_1$  en el caso de una placa rectangular empotrada los cuatro bordes.

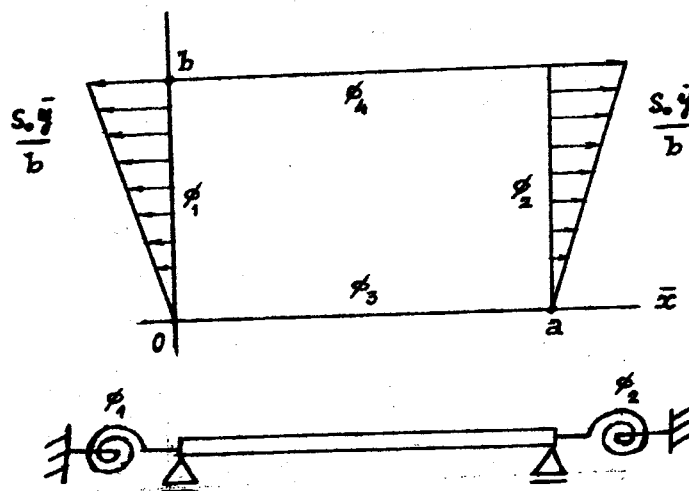


FIGURA 1 - Placa Elásticamente Restringida Contra Rótación en los Cuatro Bordos y Sometida a Una Distribución Lineal de Esfuerzos en Su Plano.