



## VIBRACIONES TRANSVERSALES DE UNA PLACA ORTÓTROPA CON BORDES ELASTICAMENTE RESTRINGIDOS CONTRA ROTACIÓN Y UN ORIFICIO CIRCULAR

por D.V. Bambill, P.A.A. Laura, C.A. Rossit y R.D. De Dios  
Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur e Instituto  
de Mecánica Aplicada (CONICET) - 8000 - Bahía Blanca

### Resumen.

Se obtiene una solución aproximada del problema en cuestión utilizando el método energético. Se determina la frecuencia fundamental de vibración utilizando simples funciones coordenadas polinómicas que satisfacen las condiciones de bordes en el contorno exterior pero no las condiciones gobernantes en el orificio de bordes libres. Se obtiene buena concordancia tanto con resultados experimentales como con valores obtenidos mediante el método de elementos finitos, determinados en investigaciones anteriores, en el caso de una placa cuadrada empotrada en su contorno con un orificio concéntrico.

### Abstract.

The present paper deals with the approximate determination of the fundamental frequency coefficient of the structure described in the title in the case where the edge of the hole is free. Polynomial coordinate functions and the Rayleigh-Ritz method are employed. Good agreement with: a) experimental results and b) finite element values, is obtained in the case of an isotropic, clamped, square plate previously studied in the technical literature.

### Introducción.

El problema descrito en el título es resuelto en el caso en que el orificio practicado en la placa o losa posee su contorno libre.

La situación se presenta con frecuencia ya que es común el practicar agujeros en placas con rigidizadores, placas corrugadas, etc. por razones constructivas diversas: paso de conductos de ventilación o calefacción, cables eléctricos, etc.

Por otra parte el introducir un orificio en una plaqueta de circuito impreso (comumente de material anisótropo y como caso particular: ortótropo) puede ser beneficioso ya que conduce a rigidización dinámica del elemento estructural [1].

En este trabajo se presenta una solución variacional del problema determinándose la frecuencia fundamental de vibración para valores extremos del coeficiente de flexibilidad en cada borde. Se demuestra que la solución encontrada degenera apropiadamente en el caso de una placa isotropa habiéndose mostrado previamente que en esta situación existe buena coincidencia con valores obtenidos mediante el método de

elementos finitos y tambien con resultados experimentales [2].

### Solución Aproximada.

Siguiendo la metodología expuesta en [2] resulta conveniente aproximar al modo fundamental de vibración del elemento estructural en estudio mediante la expresión

$$W(x,y) \approx W_a(x,y) = A_1 (\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + x^4) (\beta_1 y + \beta_2 y^2 + \beta_3 y^3 + y^4) \quad (1)$$

donde  $x = \bar{x}/a/2$  ;  $y = \bar{y}/b/2$ .

Los  $\alpha_i$ 's y  $\beta_i$ 's son determinados substituyendo (1) en las condiciones de borde en el contorno exterior.

$$W(0,\bar{y}) = W(a,\bar{y}) = W(\bar{x},0) = W(\bar{x},b) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \bar{x}} \Big|_{\bar{x}=0} &= \theta_1 \left[ D_x \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{x}^2} + D_1 \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{y}^2} \right] \Big|_{\bar{x}=0} \\ \frac{\partial W}{\partial \bar{x}} \Big|_{\bar{x}=a} &= -\theta_2 \left[ D_x \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{x}^2} + D_1 \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{y}^2} \right] \Big|_{\bar{x}=a} \\ \frac{\partial W}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0} &= \theta_3 \left[ D_y \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{y}^2} + D_1 \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{x}^2} \right] \Big|_{\bar{y}=0} \\ \frac{\partial W}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=b} &= -\theta_4 \left[ D_y \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{y}^2} + D_1 \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{x}^2} \right] \Big|_{\bar{y}=b} \end{aligned} \quad (2)$$

donde los  $\theta_i$ 's son los coeficientes de flexibilidad rotacional en cada borde y:

$$D_x = \frac{E_x h^3}{12(1-\mu_x \mu_y)} ; \quad D_y = \frac{E_y h^3}{12(1-\mu_x \mu_y)} ; \quad D_k = \frac{G h^3}{12}$$

conviene recordar que según la nomenclatura clásica:

$$H_{xy} = D_1 + 2 D_k \quad ; \quad D_1 = \mu_x D_y = \mu_y D_x$$

Substituyendo (1) en la conocida funcional

$$J[W] = U_{\text{mdx}} - T_{\text{mdx}} \quad (3)$$

donde

$U_{\text{mdx}}$  = máxima energía de deformación.

$T_{\text{mdx}}$  = máxima energía cinética

y requiriendo

$$\frac{\partial J [W_\alpha]}{\partial A_1} = 0$$

se obtiene el coeficiente de frecuencia fundamental que será convenientemente expresado en la forma

$$\Omega_1 = \sqrt{\rho h / H_{xy}} \omega_1 a^2$$

#### Resultados Numéricos.

La Tabla 1 muestra una comparación de los valores obtenidos en este trabajo con aquellos determinados en la Referencia 2 para el caso de una placa cuadrada empotrada isótropa ( $\mu = 0.30$ ).

Se observa: a) una buena concordancia con los resultados obtenidos en [2] y b) que el efecto de minimizar al autovalor fundamental con respecto a un parámetro exponencial contenido en la función coordenada posee poco peso en este problema.

Se nota claramente el fenómeno de rigidización dinámica a medida que  $\eta$  aumenta (la frecuencia natural fundamental crece a medida que la losa se hace más liviana).

En cambio cuando la placa cuadrada isótropa está simplemente apoyada en sus cuatro bordes (Tabla 2) el coeficiente de frecuencia  $\Omega_1$

permanece prácticamente constante (aproximadamente igual al de la placa llena). Para valores de  $\eta > 0.3$  la metodología analítica da cotas superiores demasiado altas y por eso no han sido incluidas en la Tabla 2 (para  $\eta = 0.40$  el método analítico da un valor de  $\Omega_1$  que es

aproximadamente 10% más alto que el autovalor determinado mediante elementos finitos).

La Tabla 3 muestra una comparación de autovalores en el caso de placas simplemente conexas cuadradas empotradas ortótropas, con valores previamente publicados en la literatura.

Nótese que en este caso los coeficientes de frecuencia están referidos al parámetro  $H_{xy}$ . Se observa una buena concordancia entre los valores correspondientes.

Finalmente la Figura 2 muestra variaciones de  $\Omega_1$  en función de  $\eta$  para diversas combinaciones de  $D_y/D_x$  y  $D_x/D_x$  en el caso de una placa cuadrada empotrada en su contorno. Se observa en todos los casos el fenómeno de rigidización dinámica ya que  $\Omega_1$  aumenta a medida que se incrementa  $\eta$ , o sea: aumenta en función del decrecimiento de masa de la placa.

En estudios posteriores se incrementará el número de funciones coordenadas aproximantes y se efectuarán comparaciones con el método de elementos finitos en casos de ortotropía.

**Agradecimientos.**

El presente estudio es auspiciado por el CONICET (PID-BID 003/92 y PIA 1996-1997) y por la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur.

Los autores agradecen la valiosa cooperación de la Sra. María Susana Grenada en la preparación final del manuscrito.

**Referencias:**

- 1 - P.A.A. Laura, L. Ercoli y S. La Malfa. 1995. *Acústica* 81, 196-197. Dynamic stiffening of a printed circuit board.
- 2 - P.A.A. Laura, R.H. Gutierrez, L. Ercoli, J.C. Utjes y R. Carnicer. 1987. *Ocean Engineering* 14, 285-293. Free vibrations of rectangular plates elastically restrained against rotation with circular or square free openings.
- 3 - P.A.A. Laura y L.E. Luisoni. 1978. *Computers and Structures* 9, 527-532. Vibrations of orthotropic rectangular plates with edges possessing different rotational flexibility and subjected to in-plane forces.
- 4 - K.T. Sundara Raja Iyengar y K.S. Jagadish. 1964. *Applied Scientific Research, Section A*, 13, 37-42. Vibration of rectangular orthotropic plates.

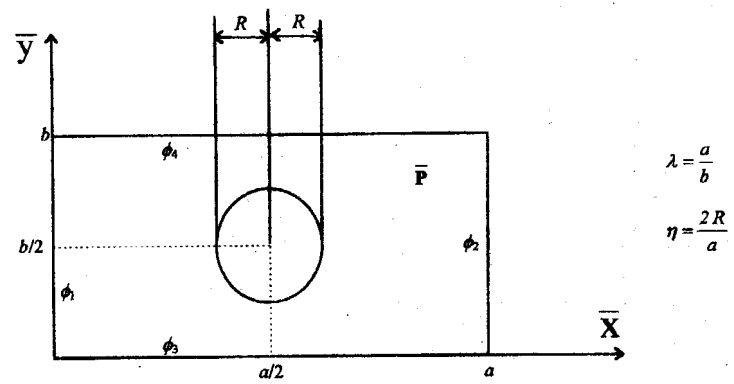


FIGURA 1- Placa elásticamente restringida contra rotación en el contorno exterior, con orificio circular central.

**TABLA 1** -. Coeficiente de frecuencia fundamental de una placa cuadrada, empotrada en el contorno exterior, con orificio circular concéntrico

| <b>Valores de <math>\Omega_1 = \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \omega_1 a^2</math></b> |       |       |                  |
|--|-------|-------|------------------|
| $\eta$   | *     | **    | Presente trabajo |
| $\eta \rightarrow 0$   | —     | —     | 36.747           |
| 0.01   | —     | 36.02 | 36.010           |
| 0.05   | —     | 35.94 | 36.104           |
| 0.10   | 36.40 | 35.84 | 36.427           |
| 0.20   | 37.83 | 36.52 | 36.857           |
| 0.30   | 40.63 | —     | 40.790           |
| 0.40   | 46.35 | 45.56 | 46.344           |

\* Método de Rayleigh-Ritz optimizado

\*\* Método de elementos finitos.

**TABLA 2** -. Coeficiente de frecuencia fundamental de una placa cuadrada, simplemente apoyada en el contorno exterior, con orificio circular concéntrico

| <b>Valores de <math>\Omega_1 = \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \omega_1 a^2</math></b> |       |       |                  |
|--|-------|-------|------------------|
| $\eta$   | *     | **    | Presente trabajo |
| $\eta \rightarrow 0$   | —     | —     | 19.747           |
| 0.01   | —     | 19.75 | 19.748           |
| 0.05   | —     | 19.69 | 19.777           |
| 0.10   | 19.86 | 19.55 | 19.867           |
| 0.20   | 20.24 | 19.31 | 20.246           |
| 0.30   | 20.95 | —     | 20.958           |
| 0.40   | —     | 20.48 | —                |

\* Método de Rayleigh-Ritz optimizado

\*\* Método de elementos finitos.

TABLA 3 -. Coeficiente de frecuencia fundamental de una placa cuadrada, empotrada

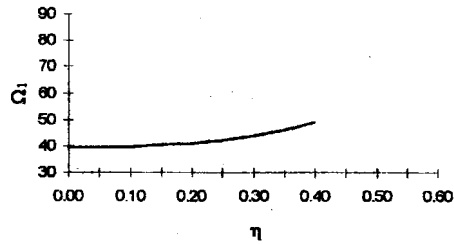
en el contorno exterior  $\Omega_1 = \sqrt{\frac{\rho h}{H_{xy}}} \omega_1 a^2$

| $D_x/H_{xy}$ | $D_y/H_{xy}$ |         |         |                  |
|--------------|--------------|---------|---------|------------------|
|              | 1/2          | 1       | 2       |                  |
| 1/2          | 28.1425      | 32.3110 | 39.3448 | Presente trabajo |
|              | 28.1440      | 32.3125 | 39.3463 | *                |
|              | 28.2131      | 32.3528 | 39.3381 | **               |
| 1            | 32.3110      | 36.0000 | 42.4264 | Presente trabajo |
|              | 32.3125      | 36.0000 | 42.4281 | *                |
|              | 32.3528      | 36.0506 | 42.4320 | **               |
| 2            | 39.3448      | 42.4264 | 48.0000 | Presente trabajo |
|              | 39.3463      | 42.4281 | 48.0018 | *                |
|              | 39.3381      | 42.4320 | 47.9863 | **               |

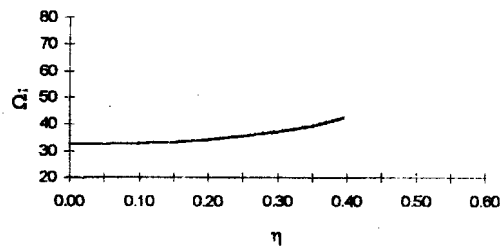
\* Referencia [ 3 ]

\*\* Referencia [ 4 ]

COEFICIENTE DE  
FRECUENCIA FUNDAMENTAL DE VIBRACION  
 $a/b = 1; D_y/D_x = 4; D_x/D_x = 2/5$



COEFICIENTE DE  
FRECUENCIA FUNDAMENTAL DE VIBRACION  
 $a/b = 1; D_y/D_x = 1/2; D_x/D_x = 0.425$



COEFICIENTE DE  
FRECUENCIA FUNDAMENTAL DE VIBRACION  
 $a/b = 1; D_y/D_x = 2; D_x/D_x = 1/5$

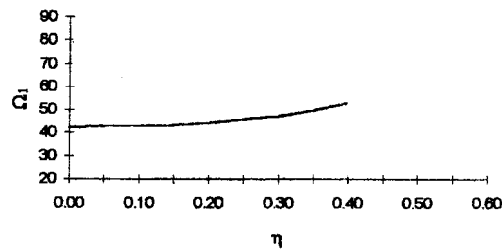


FIGURA 2- Variación de  $\Omega_1 = \sqrt{\frac{\rho h}{H_{xy}}} \omega_1 a^2$ , en función de  $\eta = \frac{2R}{a}$ ;  $\mu_x = 0.30$

(caso de placas ortótropas, cuadradas, empotradas con orificio circular concéntrico)