

CAMPO DE VALIDEZ DE TEORIAS APROXIMADAS PARA LA RESPUESTA
DINAMICA DE BARRAS CON NO LINEALIDAD FISICA Y GEOMETRICA

Oscar Möller , Marcelo Rubinstein
Instituto de Mecánica Aplicada y Estructuras (IMAE) , Facultad de
Cs. Exactas , Ingeniería y Agrimensura , Universidad Nacional de Rosario .
Riobamba y Berutti , 2000 Rosario , Argentina .

RESUMEN

Se analiza el comportamiento de barras con material elastoplástico , bajo la acción de cargas transversales aplicadas en forma estática o dinámica . Se evalúa el campo de aplicación de teorías aproximadas de flexión de vigas y cables frente a la "exacta" que incluye la rigidez a flexión y axial , y el comportamiento no lineal geométrico y físico .

Se presenta un modelo matemático que utiliza una formulación lagrangiana actualizada , y la solución numérica es obtenida con un proceso incremental iterativo con el algoritmo de Newmark y el esquema de Newton Raphson modificado .

Se analizan ejemplos de barras con varias esbelteces y distintos tipos de carga . Por consideraciones energéticas se justifican resultados del comportamiento dinámico . La discusión de la validez de las teorías aproximadas se realiza en función de la esbeltez , obteniéndose resultados de aplicación práctica .

ABSTRACT

The behaviour of elastic plastic bars is analysed under static or dynamic transversal loads . It is assessed the field application of approximate beam flexion and cable theories with regard to the "exact" theory which includes flexural and axial stiffness with geometrical and material nonlinearities .

A mathematical model is presented using updated Lagrangian description and the numerical solution is obtained through an incremental iterative process with Newmark method and modified Newton Raphson scheme .

Examples of bars with different slender ratios and types of loadings are analysed . Results of dynamic behaviour are justified through energetic principles . The discussion of approximate theories performance is carried out with regard to the slender ratio and practical results are obtained .

INTRODUCCION

En el comportamiento de una viga con cargas transversales intervienen sus rigideces a flexión y axial . La primera gobierna exclusivamente la respuesta mientras el análisis sea posible en el campo de las deformaciones infinitesimas , para deformaciones finitas se deben considerar ambas , y a medida que éstas aumentan va ganando importancia relativa la segunda , pudiendo llegar a ser prácticamente determinante . De este modo , de acuerdo con el grado de deformación , asociado con el nivel de la carga y con la esbeltez de la barra , el comportamiento será flexional , denominado en adelante tipo viga , mixto , o gobernado por los esfuerzos axiales , denominado en adelante tipo cable .

En este trabajo se investiga el campo de aplicación de estas teorías aproximadas y resulta una ampliación de [1] , al introducir , con material elastoplástico ideal , la no linealidad física , que hace posible el tratamiento de problemas con curvaturas concentradas , como ocurre en empotramientos o bajo cargas concentradas , donde para barras muy esbeltas se producen plastificaciones para valores reducidos de las cargas . Se consideran cargas estáticas y el caso dinámico frecuente de aplicación súbita , con integración de la carga en la masa activa de la barra .

Para juzgar las soluciones aproximadas se utilizan los resultados de un análisis no lineal geométrico y físico, incluyendo las rigideces a flexión y axial, denominados en adelante resultados de la teoría "exacta". La no linealidad geométrica se tiene en cuenta con una formulación lagrangiana actualizada [2], aplicando el método de elementos finitos [3] para estructuras aperticadas planas, bajo la acción de cargas estáticas y dinámicas. Se consideran grandes desplazamientos y rotaciones, y relación no lineal entre desplazamientos y deformaciones, a través de la actualización de coordenadas y la matriz de rigidez no lineal [4,5,6,7,8,9]. La no linealidad física corresponde a un material elastoplástico ideal con plasticidad asociada. Con la hipótesis de plasticidad concentrada en las secciones extremas del elemento se deriva la matriz elastoplástica [3,10,11,12,13,14]. La resolución numérica se efectúa planteando un proceso incremental iterativo con aplicación del método de integración directa de Newmark para el problema dinámico y el esquema de Newton-Raphson modificado para el problema no lineal [2,3].

Los ejemplos analizados corresponden al caso de una barra recta de sección rectangular constante, empotrada en sus extremos, con dos estados de carga, concentrada en el centro de la luz y repartida uniformemente en toda la longitud aplicados de la manera ya expuesta. Definiendo a la esbeltez como la relación entre la luz y la altura de la sección recta, se han considerado valores dentro del intervalo (2, 500), habiéndose elegido el límite inferior por razones de compatibilidad con la ley de Navier-Bernoulli para la flexión. Las respuestas se representan por la relación de las variables adimensionales $\bar{P} = P/\sigma_e A$ vs. $\bar{u} = u/\epsilon_e L$, donde P es la carga total aplicada, A es el área de la sección recta, σ_e , ϵ_e son la tensión y deformación de fluencia, u es el desplazamiento transversal del centro de la barra, para el caso dinámico es el valor máximo, y L la luz.

El campo de aplicación de las teorías aproximadas se define en función de la esbeltez, en lugar de la relación flecha-espesor utilizada en [1], resultando un cambio conceptual y prácticamente más conveniente. Para las teorías aproximadas y el caso de carga estática se utilizan las soluciones analíticas correspondientes. Resultados del comportamiento dinámico se predicen o justifican, por consideraciones energéticas, a partir de la respuesta estática correspondiente.

ANÁLISIS CON NO LINEALIDAD FÍSICA Y GEOMÉTRICA

ECUACION DE EQUILIBRIO DINAMICO

En una formulación lagrangiana actualizada, el equilibrio dinámico en un instante genérico $t+\Delta t$ puede expresarse a partir del principio de desplazamientos virtuales, donde las variables se refieren a una configuración de equilibrio conocida en el tiempo t , utilizándose las tensiones del 2^{do} tensor de Piola-Kirchhoff y las deformaciones del tensor de Green-Lagrange. Se realiza una descomposición incremental y se linealizan las ecuaciones resultantes, que luego se mejoran por iteración [1,2].

La utilización del método de elementos finitos permite transformar las ecuaciones diferenciales en un sistema de ecuaciones algebraicas. Para un elemento, y referido a las coordenadas locales resulta:

$$\tilde{K}_{ep} \Delta \hat{u} = {}^{t+\Delta t} \tilde{P} - \tilde{M} {}^{t+\Delta t} \hat{u} - \tilde{C} {}^{t+\Delta t} \dot{\hat{u}} - {}^t \tilde{P} \quad (1)$$

donde \tilde{K}_{ep} , \tilde{M} , \tilde{C} son las matrices de rigidez elastoplástica, masa y amortiguamiento, $\Delta \hat{u}$ el incremento de desplazamientos nodales, \hat{u} , $\dot{\hat{u}}$ son las aceleraciones y velocidades nodales evaluadas en $t + \Delta t$, \tilde{P} son las fuerzas sobre los nodos necesarios para el equilibrio del elemento y \tilde{P} las fuerzas internas sobre los nodos evaluadas en t .

ELEMENTO DE BARRA

Se desarrolla un elemento de barra para pórtico plano que tiene en cuenta no linealidad geométrica a través de grandes desplazamientos y rotaciones, con pequeñas deformaciones y relación no lineal entre desplazamientos y deformaciones; no linealidad física con hipótesis de material elastoplástico sin endurecimiento, plasticidad asociada y desplazamientos plásticos concentrados en las secciones extremas de la zona deformable; zonas rígidas en los extremos para considerar no despreciables.

La fig. 1 muestra el sistema de coordenadas locales utilizado para todo el elemento ($\tilde{\cdot}$), y el sistema local referido a la zona deformable ($\hat{\cdot}$) excluyendo los extremos rígidos.

El campo de incrementos de desplazamientos de un punto genérico de la barra en dirección axial y transversal, referido al sistema \bar{x}_1 , \bar{x}_2 es:

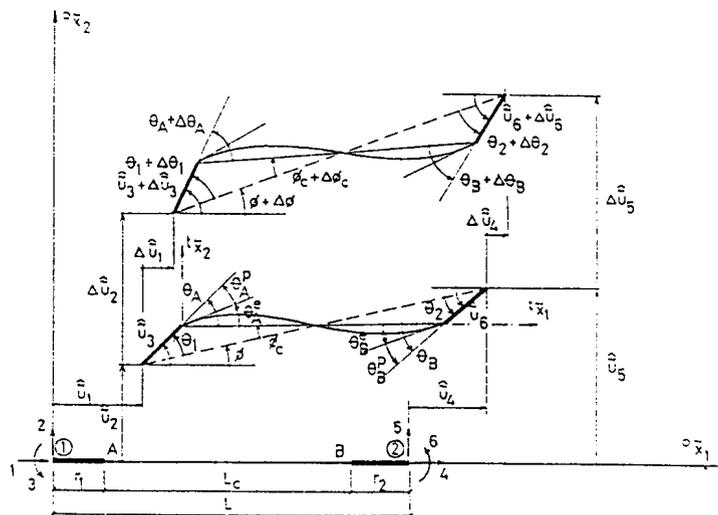


Figura 1 : Sistemas de referencia local e incrementos de desplazamientos .

$$\Delta \bar{u} = \begin{Bmatrix} \Delta \bar{u}_1 \\ \Delta \bar{u}_2 \end{Bmatrix} = H \Delta \bar{u} \quad (2)$$

donde $\Delta \bar{u}$ contiene los incrementos de desplazamientos de las secciones extremas A y B. H es la matriz de las funciones de forma [1], donde se ha supuesto variación lineal para los desplazamientos axiales y cúbica para los transversales, considerando al elemento sin cargas de tramo.

Para el estado elástico las ecuaciones constitutivas de la sección son :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & \\ & EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_{1,1} \\ \bar{u}_{2,11} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

donde N es el esfuerzo normal, M es el momento flector, E es el módulo de elasticidad, A el área e I el momento de inercia de la sección recta. No se tienen en cuenta deformaciones por corte, luego el esfuerzo de corte Q se obtiene por equilibrio del elemento.

En estado plástico se utiliza la siguiente función de fluencia para sección rectangular [3,10] :

$$Y(F) = \frac{|M|}{M_p} + \left(\frac{N}{N_p} \right)^2 - 1 = 0 \quad (4)$$

donde $M_p = \sigma_e Z$ es el momento plástico, con σ_e tensión de fluencia del material y Z el módulo plástico de la sección; $N_p = \sigma_e A$ es el esfuerzo normal plástico.

La relación entre incrementos de fuerzas y de desplazamientos en las secciones A y B, referido al sistema local \bar{x}_1, \bar{x}_2 es :

$$\Delta \bar{F} = \bar{K}_{ep} \Delta \bar{u} \quad (5)$$

$$\text{donde} \quad \Delta \bar{u} = \Delta \bar{u}^e + \Delta \bar{u}^p = \bar{K}^{-1} \Delta \bar{F} + \frac{\partial Y}{\partial \bar{F}} \Lambda \quad (6)$$

$\Delta \bar{u}^e$ es el incremento de desplazamientos elásticos, en el cual $\bar{K} = \bar{K}_L + \bar{K}_{NL}$ con \bar{K}_L matriz de rigidez lineal elástica [1], \bar{K}_{NL} matriz de rigidez no lineal [1], $\Delta \bar{u}^p$ es el incremento de desplazamientos plásticos, con $\partial Y / \partial \bar{F}$ matriz gradiente de la función de fluencia y $\Lambda^T = [\lambda_A, \lambda_B]$ contiene escalares positivos.

Las fuerzas internas son $\bar{F}^T = [N_A, Q_A, M_A, N_B, Q_B, M_B]$. A partir de la relación elástica $\Delta \bar{F} = \bar{K} \Delta \bar{u}^e$ y la condición de consistencia $Y(\bar{F}) = 0 \rightarrow \Delta Y = \partial Y / \partial \bar{F}^T \Delta \bar{F} = 0$, se obtiene la matriz elastoplástica [10,14] :

$$\Delta \widehat{\mathbf{F}} = \left[\bar{\mathbf{K}} - \bar{\mathbf{K}} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \widehat{\mathbf{F}}} \mathbf{E}^{-1} \frac{\partial \mathbf{Y}^T}{\partial \widehat{\mathbf{F}}} \bar{\mathbf{K}} \right] \Delta \widehat{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{K}}_{sp} \Delta \widehat{\mathbf{u}} \quad (7)$$

$$\text{con } \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{Y}^T}{\partial \widehat{\mathbf{F}}} \bar{\mathbf{K}} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \widehat{\mathbf{F}}} \quad , \quad \mathbf{A} = \mathbf{E}^{-1} \frac{\partial \mathbf{Y}^T}{\partial \widehat{\mathbf{F}}} \bar{\mathbf{K}} \Delta \widehat{\mathbf{u}} \quad (8)$$

La evaluación de las fuerzas internas $\widehat{\mathbf{F}}$ es el elemento principal en la precisión numérica de los resultados. Para el incremento en cada paso, en lugar de evaluarlo con la relación (7) linealizada, se obtiene una mejor aproximación teniendo en cuenta el acoplamiento entre desplazamientos axiales y transversales. Con el incremento de desplazamientos $\Delta \widehat{\mathbf{u}}$ se obtienen, por relaciones geométricas, los incrementos de giros en las secciones A y B: $\Delta \theta_A$, $\Delta \theta_B$ con respecto a la cuerda L_c , y el incremento de alargamiento $\Delta(\Delta l) = {}^{++}\Delta L_c - L_c$

Luego resultan las siguientes expresiones explícitas para los incrementos de fuerzas internas:

$$\begin{aligned} \Delta N_B = -\Delta N_A = & [k_{11} - k_{11}^2 (Y_{11}^2 E'_{11} - 2 Y_{11} Y_{42} E'_{12} + Y_{42}^2 E'_{22})] \Delta(\Delta l) \\ & + k_{11} [k_{33} Y_{11} Y_{31} E'_{11} + (k_{36} Y_{11} Y_{62} - k_{33} Y_{31} Y_{42}) E'_{12} - k_{36} Y_{42} Y_{62} E'_{22}] \Delta \theta_A \\ & + k_{11} [k_{36} Y_{11} Y_{31} E'_{11} + (k_{33} Y_{11} Y_{62} - k_{36} Y_{31} Y_{42}) E'_{12} - k_{33} Y_{42} Y_{62} E'_{22}] \Delta \theta_B \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Delta M_A = k_{11} & [k_{33} Y_{11} Y_{31} E'_{11} + (k_{36} Y_{11} Y_{62} - k_{33} Y_{31} Y_{42}) E'_{12} - k_{36} Y_{42} Y_{62} E'_{22}] \Delta(\Delta l) \\ & + [k_{33} - (k_{33}^2 Y_{31}^2 E'_{11} + 2 k_{33} k_{36} Y_{31} Y_{62} E'_{12} + k_{36}^2 Y_{62}^2 E'_{22})] \Delta \theta_A \\ & + [k_{36} - (k_{33} k_{36} Y_{31}^2 E'_{11} + (k_{33}^2 k_{36}^2) Y_{31} Y_{62} E'_{12} + k_{33} k_{36} Y_{62}^2 E'_{22})] \Delta \theta_B \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Delta M_B = k_{11} & [k_{36} Y_{11} Y_{31} E'_{11} + (k_{33} Y_{11} Y_{62} - k_{36} Y_{31} Y_{42}) E'_{12} - k_{36} Y_{42} Y_{62} E'_{22}] \Delta(\Delta l) \\ & + [k_{36} - (k_{33} k_{36} Y_{31}^2 E'_{11} + (k_{33}^2 k_{36}^2) Y_{31} Y_{62} E'_{12} + k_{33} k_{36} Y_{62}^2 E'_{22})] \Delta \theta_A \\ & + [k_{33} - (k_{36}^2 Y_{31}^2 E'_{11} + 2 k_{33} k_{36} Y_{31} Y_{62} E'_{12} + k_{33}^2 Y_{62}^2 E'_{22})] \Delta \theta_B \end{aligned} \quad (11)$$

$$\Delta Q_A = -\Delta Q_B = (\Delta M_A + \Delta M_B) / L_c \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \text{donde } k_{11} = \frac{EA + N_B}{L_c} \quad k_{33} = \frac{4EI}{L_c} + \frac{2L_c N_B}{15} \quad k_{36} = \frac{2EI}{L_c} - \frac{L_c N_B}{30} \\ Y_{11} = \frac{2N_A}{N_p^2} \quad Y_{31} = \frac{\text{Sig. } M_A}{M_p} \quad Y_{42} = \frac{2N_B}{N_p^2} \quad Y_{62} = \frac{\text{Sig. } M_B}{M_p} \\ E_{11} = Y_{11}^2 k_{11} + Y_{31}^2 k_{33}, \quad E_{12} = -Y_{11} Y_{42} k_{11} + Y_{31} Y_{62} k_{36}, \quad E_{22} = Y_{42}^2 k_{11} + Y_{62}^2 k_{33} \end{aligned} \quad (13)$$

con E'_{ij} componentes de \mathbf{E}^{-1} , teniendo en cuenta que:

Si solamente está plastificada la sección A, es: $Y_{42} = Y_{62} = E'_{12} = E'_{22} = 0$, $E'_{11} = 1 / E_{11}$.

Si solamente está plastificada la sección B, es: $Y_{11} = Y_{31} = E'_{11} = E'_{12} = 0$, $E'_{22} = 1 / E_{22}$.

Para la barra con comportamiento elástico es: $Y_{11} = Y_{31} = Y_{42} = Y_{62} = E'_{11} = E'_{12} = E'_{22} = 0$

Para los desplazamientos plásticos resulta:

$$\begin{aligned} \lambda_A = -k_{11} & (Y_{11} E'_{11} - Y_{42} E'_{12}) \Delta(\Delta l) + (k_{33} Y_{31} E'_{11} + k_{36} Y_{62} E'_{12}) \Delta \theta_A \\ & + (k_{36} Y_{31} E'_{11} + k_{33} Y_{62} E'_{12}) \Delta \theta_B \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \lambda_B = k_{11} & (-Y_{11} E'_{12} - Y_{42} E'_{22}) \Delta(\Delta l) + (k_{33} Y_{31} E'_{12} + k_{36} Y_{62} E'_{22}) \Delta \theta_A \\ & + (k_{36} Y_{31} E'_{12} + k_{33} Y_{62} E'_{22}) \Delta \theta_B \end{aligned} \quad (15)$$

$$\Delta \theta_A^p = Y_{31} \lambda_A \quad , \quad \Delta \theta_B^p = Y_{62} \lambda_B \quad , \quad \Delta(\Delta l)^p = Y_{42} \lambda_B - Y_{11} \lambda_A \quad (16)$$

En la implementación computacional del cálculo de $\Delta \widehat{\mathbf{F}}$ se han tenido en cuenta los siguientes detalles:

(a) Si dentro de un incremento de desplazamientos $\Delta \widehat{\mathbf{u}}$ se detecta la plastificación de una sección, se evalúa la fracción $r \Delta \widehat{\mathbf{u}}$ para alcanzar la superficie de fluencia, y con $(1-r) \Delta \widehat{\mathbf{u}}$ y la rigidez modificada por la plastificación se completa el análisis del paso. (b) Por las hipótesis usadas, el incremento de fuerzas en una sección plastificada es un vector tangente a la superficie de fluencia. El módulo de ese vector se iguala a la longitud de arco sobre la superficie de fluencia para lograr siempre $Y(\mathbf{F}) = 0$. (c) Si en un incremento $\Delta \widehat{\mathbf{u}}$, en

una sección plastificada resulta $\lambda < 0$ según (14) ó (15) significa descarga elástica. En ese caso se recalcula el incremento con la rigidez elástica correspondiente.

El desarrollo de las matrices de masa \bar{M} , y amortiguamiento \bar{C} puede verse en [1].

Los términos descriptos se han referidos a la configuración t y al sistema local ${}^t\bar{x}_1, {}^t\bar{x}_2$, y deben transformarse para referirlos a la longitud total y al sistema local inicial ${}^0\bar{x}_1, {}^0\bar{x}_2$. Para ello se utiliza una matriz de rotación T_ϕ en función del ángulo ϕ_c (ver fig.1), luego una transformación por extremos rígidos G y otra matriz de rotación T_ϕ en función del ángulo ϕ , teniendo en cuenta las relaciones geométricas:

$$\Delta \bar{u} = T_{\phi_c} G T_\phi \Delta \bar{u}^{\tilde{}} \quad , \quad \Delta \bar{F}^{\tilde{}} = T_\phi^T G^T T_{\phi_c}^T \Delta \bar{F} \quad (17)$$

SOLUCION

Los términos de la ecuación (1) se transforman a coordenadas globales de la estructura x_i mediante la matriz de rotación T_α en función del ángulo α entre los ejes globales y locales iniciales. Realizada la rotación, las fuerzas \bar{P} cambiadas de signo (acción sobre los nodos de la estructura) se ensamblan y junto con las cargas directamente aplicadas sobre los nodos \bar{R} definen el equilibrio dinámico del sistema:

$${}^{t+\Delta t}\bar{P} + {}^{t+\Delta t}\bar{R} = 0 \quad (18)$$

Reemplazando ${}^{t+\Delta t}\bar{P}$ de acuerdo a (1) se obtiene el sistema de ecuaciones de equilibrio dinámico en desplazamientos a resolver, sobre el que se aplica el algoritmo de Newmark de integración directa y el esquema iterativo de Newton-Raphson modificado en cada paso [2].

APLICACIONES

DATOS DE LOS EJEMPLOS

Se analiza el caso de una barra recta empotrada en sus extremos. Las cargas son: concentrada en el centro de la luz y repartida uniformemente en toda la longitud, aplicadas en forma estática y dinámica por imposición súbita, con incorporación de la carga como masa activa, manteniéndose luego constante.

Las características de los casos analizados son: $E = 210000 \text{ MPa}$, $\sigma_s = 240 \text{ MPa}$, luz $L = 240 \text{ cm}$, sección rectangular constante con $b = 2 \text{ cm}$, $h = 120, 24, 12, 2.4, 1.2$ y 0.48 cm , obteniéndose esbelteces $\lambda = L/h = 2, 10, 20, 100, 200$ y 500 . Se considera amortiguamiento nulo.

Aprovechando la simetría se discretizó media barra con 1 elemento para carga concentrada y 3 elementos iguales para carga repartida. En este caso para evitar la plastificación simultánea de dos secciones adyacentes a un nodo, que provoca una singularidad en la matriz de rigidez, se define al elemento intermedio como elástico.

SIMULACION DE LAS TEORIAS ANALIZADAS

El elemento de barra desarrollado en este trabajo fué implementado en un código de computación, en lenguaje FORTRAN, para análisis estático y dinámico de estructuras por elementos finitos, que considera no linealidad física y geométrica, con formulación lagrangiana actualizada, integración directa paso a paso con algoritmo de Newmark para el problema dinámico y esquema iterativo de Newton-Raphson modificado para el problema no lineal. Así se representa el comportamiento "exacto" con teoría de grandes desplazamientos.

La respuesta para la teoría de flexión de vigas se obtiene eliminando la actualización de coordenadas y la formación de la matriz de rigidez no lineal. La respuesta para la teoría de cables se obtiene eliminando la rigidez y resistencia a flexión. Numéricamente se representa con valores del momento de inercia y el módulo plástico muy pequeños, del orden del 1% de sus valores reales.

El análisis de la barra para carga estática con teoría de vigas y teoría de cable no se realiza con el programa de computación y su correspondiente solución numérica, sino que se utilizan soluciones analíticas conocidas.

INTERPRETACION DE LA RESPUESTA DINAMICA

Los resultados del comportamiento dinámico se predicen o justifican, aplicando consideraciones energéticas y utilizando la respuesta estática correspondiente. Debido a que interesa el valor máximo del desplazamiento transversal del centro de la viga y éste se alcanza en los primeros instantes del movimiento, cuando los efectos del amortiguamiento casi no se han manifestado, resulta posible por simplicidad, considerar al sistema con amortiguamiento nulo.

Carga concentrada en el centro de la luz : Aplicando el principio de conservación de la energía , entre la posición inicial y la de máximo desplazamiento transversal , y teniendo en cuenta que la variación correspondiente de energía cinética es nula , resulta

$$\Delta E = \Delta E_p + \Delta E_d + \Delta E_t + \Delta E_f = 0 \quad (19)$$

donde $\Delta E_p = -P_d u_{\max}$ es la variación de energía potencial , siendo P_d la carga aplicada súbitamente . ΔE_d , ΔE_t , ΔE_f son respectivamente la variación de energía de deformación , la energía mecánica transformada en calor cuando se incursiona en el campo plástico , y exclusivamente para el caso de cables , el incremento de energía potencial por cambio de forma . Su suma se puede calcular a través del trabajo de una carga concentrada aplicada en forma estática en el centro de la viga que provoca un desplazamiento igual al desplazamiento máximo para carga súbita , debido a que ésta se incorpora a la viga como masa activa y la masa de la barra resulta despreciable , luego la carga activa y la fuerza de D'Alembert son cargas concentradas en el centro de la viga . Luego de (19) resulta :

$$P_d u_{\max} = \int_0^{u_{\max}} P(u) du \quad (20)$$

Esta ecuación es independiente de la esbeltez e implica que , para las teorías de viga y cables , en las figs.2 y 3 , por compensación de áreas debe ser $A_1 = A_2$.

En el campo elástico , a partir de (20) , el factor de amplificación dinámica resulta $D = 2$ para la teoría de vigas , valor clásicamente conocido , y para cables , teniendo en cuenta que la respuesta se puede aproximar con una parábola cúbica , $D = \sqrt[3]{4} = 1.59$, valor que concuerda con los obtenidos del análisis numérico . El límite de la respuesta en el campo elástico corresponde a $u_{\max} = u_e$ o $P_d = P_e/2$ para vigas , y $P_d = P_e/4$ para cables .

En el campo plástico , a partir de $A_1 = A_2$ se concluye que , debido a la pérdida de rigidez , el coeficiente de amplificación dinámica resulta mayor al correspondiente al período elástico y particularmente para la teoría de vigas , se verifica que para $P_d \rightarrow P_e$, ($u_{est} \rightarrow u_e$) : $u_{\max} \rightarrow \infty$ y $D \rightarrow \infty$, conclusiones que se comprueban en los resultados del análisis numérico .

Carga uniformemente repartida en toda la luz : Por consideraciones análogas al caso de carga concentrada resulta , en correspondencia con (20) , la siguiente ecuación

$$P_d u_{\max}(x=L/2) \cong \int_0^{u_{\max}(x=L/2)} p(u) du(x=L/2) \quad (21)$$

donde p_d y $p(u)$ son cargas uniformemente repartidas aplicadas en forma súbita y estática respectivamente . En su deducción se tuvo en cuenta que $u(x) = u(x=L/2) f(x)$ y el carácter aproximado se debe a que las fuerzas de inercia , asociadas con p_d no son uniformes .

Aplicando (21) en el campo elástico resulta , para la teoría de vigas $D = 2$, y para cables , aproximando $p = p(u)$ con una parábola cuadrática , $D = \sqrt{3}$, valor que concuerda con los obtenidos numéricamente . En el campo elastoplástico , debido a la pérdida de rigidez , resultan valores mayores , cumpliéndose en vigas que para $p_d \rightarrow p_e$, $D \rightarrow \infty$.

De acuerdo a (20) y (21) , la respuesta dinámica se deduce de la estática , y así se concluye que mientras la respuesta estática de la teoría exacta tiende a coincidir con la de una de las teorías aproximadas , la misma coincidencia se debe dar entre las respuestas dinámicas , como se observa en los resultados numéricos .

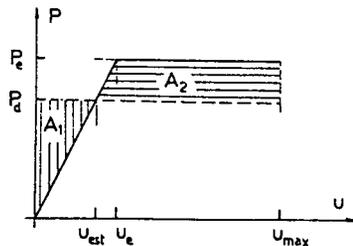


Figura 2 : Teoría de vigas

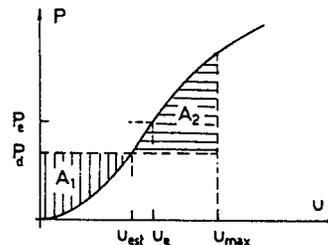


Figura 3 : Teoría de cables

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Se representan las relaciones adimensionales $\bar{P} = P/\sigma_y A$ vs. $\bar{u} = u/\epsilon_y L$ simultáneamente para la respuesta estática y máxima respuesta dinámica con las teorías "exacta", flexión de vigas y cables. Las figs.4 y 5 corresponden a $\lambda = 20$ y 200 para carga concentrada.

Carga estática :

- Comportamiento general : Se distingue una primera etapa donde la respuesta es elástica , que finaliza cuando al menos una sección plastifica , luego sigue un período elastoplástico , con pérdida de rigidez , hasta la plastificación del número necesario de secciones para formar un mecanismo , tres en este caso . Luego comienza una etapa donde notoriamente se produce una redistribución de esfuerzos internos en las secciones plastificadas , manteniéndose la combinación de esfuerzos internos sobre la superficie de fluencia , disminuyen los momentos flectores y aumentan los esfuerzos normales , hasta alcanzar momento flector nulo . La última etapa consiste en resistir la carga con cambio de forma y esfuerzos internos constantes , de manera que para el desplazamiento en el centro de la luz tendiendo a infinito , la carga tiende al valor $2\sigma_y A$. Manteniendo estas características generales se observa que la respuesta está condicionada por la esbeltez y , si bien debe ser una función continua de esta variable , pueden distinguirse comportamientos típicos para esbelteces reducidas ($\lambda \leq 20$) y para esbelteces grandes ($\lambda \geq 200$) que difieren notablemente entre sí .

- Esbeltez reducida ($\lambda \leq 20$) , ver fig.4 : Etapa elástica : la respuesta demuestra linealidad geométrica y en consecuencia coinciden con los resultados de la teoría de vigas . Etapa elastoplástica : para este tipo de carga no existe debido a que se plastifican las secciones de apoyo y centro de tramo simultáneamente . Etapa de redistribución de esfuerzos internos : esta etapa comienza con rigidez muy pequeña debido a que el mecanismo que se ha formado al final de la etapa anterior es prácticamente de flexión , con pequeños desplazamientos y en consecuencia son necesarios incrementos importantes de los mismos para que la barra tenga configuraciones apropiadas para soportar incrementos de carga con esfuerzos normales . Esta etapa finaliza con la plastificación de la barra exclusivamente por esfuerzos axiales . En la última etapa el incremento de carga es equilibrado debido al cambio de forma y la respuesta coincide con la obtenida por la teoría de cables .

- Esbeltez grande ($\lambda \geq 200$) , ver fig.5 : Etapa elástica : desde el inicio la respuesta aparece fuertemente influenciada por la no linealidad geométrica , con intervención dominante de la rigidez axial , de modo que , para esbelteces crecientes , tiende a identificarse con deformaciones por defecto con la obtenida aplicando teoría de cables . Etapa de redistribución de esfuerzos internos : en comparación con la respuesta para esbelteces bajas se nota una rigidez sensiblemente mayor en el comienzo de la etapa , debido a que la plastificación de las secciones críticas se produce con desplazamientos y esfuerzos normales significativos . Por otra parte la disminución de rigidez debido a la conformación del mecanismo , hace que en esta etapa se invierta la tendencia en la aproximación a los resultados de la teoría de cables , presentándose deformaciones por exceso . Al finalizar la redistribución se produce la plastificación de la barra exclusivamente por esfuerzos axiales y de ahí en adelante la coincidencia con la respuesta tipo cable .

Carga dinámica :

El análisis de resultados ya ha sido , en gran parte , realizada bajo el título "Interpretación de la respuesta dinámica" . La conclusión allí establecida sobre la coincidencia de la respuesta dinámica exacta con los resultados de una de las teorías aproximadas cuando lo mismo ocurre con las respuestas estáticas se ve confirmada por los resultados numéricos obtenidos , ver figs.4,5 . En la fig.6 se ha representado el factor de amplificación dinámica $D = u_{din,max}/u_{est}$, y se observa que para esbelteces bajas ($\lambda \leq 20$) los resultados "exactos" son similares a los de la teoría de vigas hasta alcanzar un pico para la carga correspondiente a la formación del mecanismo plástico y superada esta carga bajan abruptamente , tendiendo a coincidir con los de la teoría de cables . En cambio para esbelteces altas ($\lambda \geq 100$) se observa un comportamiento general similar al de la teoría de cables con valores numéricos casi iguales .

Cargas límites :

Esta cargas se representan en función de la esbeltez λ para la respuesta estática y dinámica máxima con las diferentes teorías analizadas . La fig.7 muestra el caso de carga concentrada en donde P_p : carga límite entre las etapas elásticas y de redistribución , P_B : carga límite entre las etapas de redistribución y de cambio de forma . Acción estática : la carga última P_p^v de teoría de vigas coincide con P_p "exacta" hasta $\lambda=20$, luego se aparta con diferencia de 10% para $\lambda=50$. La carga P_B^c límite elástico de la teoría de cables se aproxima a P_B "exacta" para esbelteces grandes , siendo las diferencias de 21% para $\lambda=100$, 10% para $\lambda=200$ y 3.5% para $\lambda=500$. Acción dinámica : para la carga P_p el comportamiento es similar al caso estático , mientras que para P_B las diferencias de la teoría de cables con la "exacta" son : 48% para $\lambda=100$, 29% para $\lambda=200$ y 12% para $\lambda=500$, mayores que para el caso estático . Relación $P_p(din)/P_p(est)$: con teoría de vigas es constante e igual a 0.5 , con teoría "exacta"

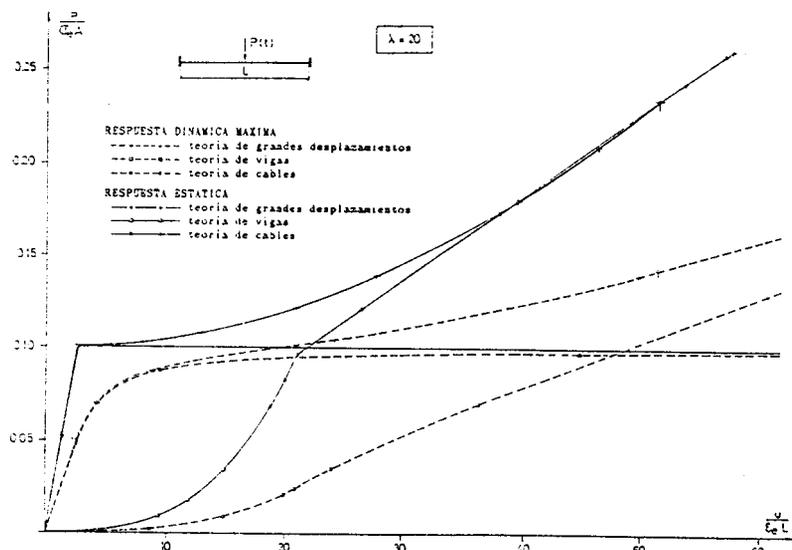


Figura 4 : Relación $P/\sigma_0 A$ vs. $u/\epsilon_0 L$ para carga concentrada y esbeltez $\lambda = L/h = 20$.

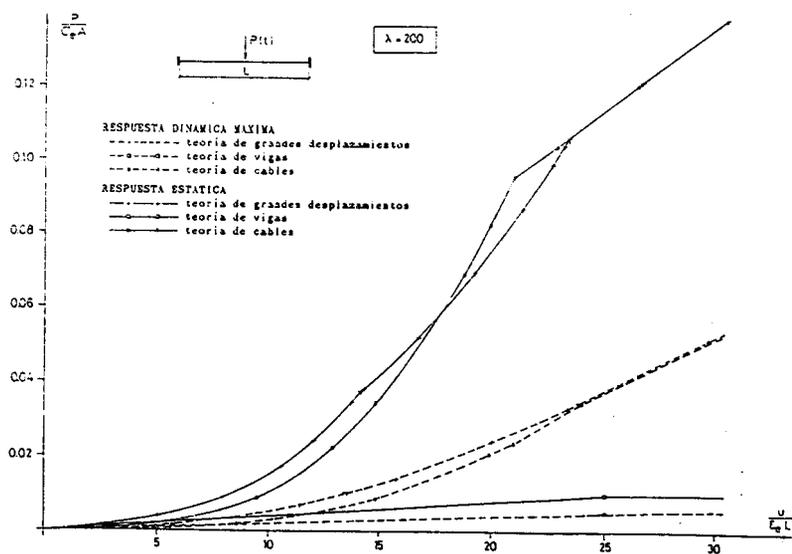


Figura 5 : Relación $P/\sigma_0 A$ vs. $u/\epsilon_0 L$ para carga concentrada y esbeltez $\lambda = L/h = 200$.

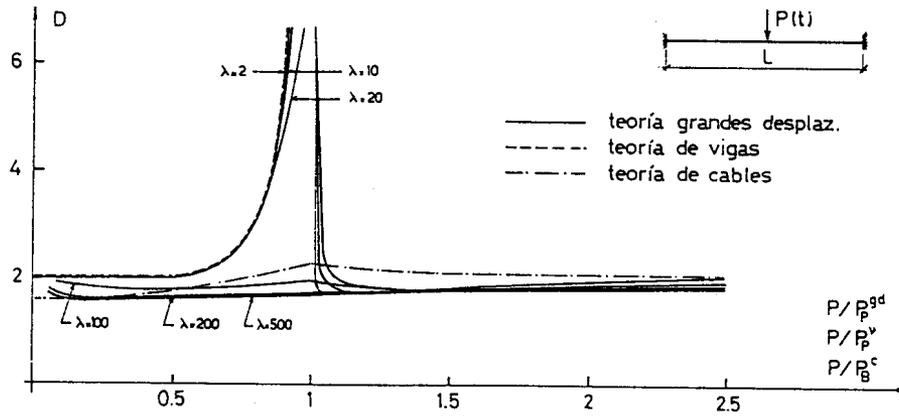


Figura 6 : Factor de amplificación dinámica $D = u_{din,max}/u_{est}$, para carga concentrada .

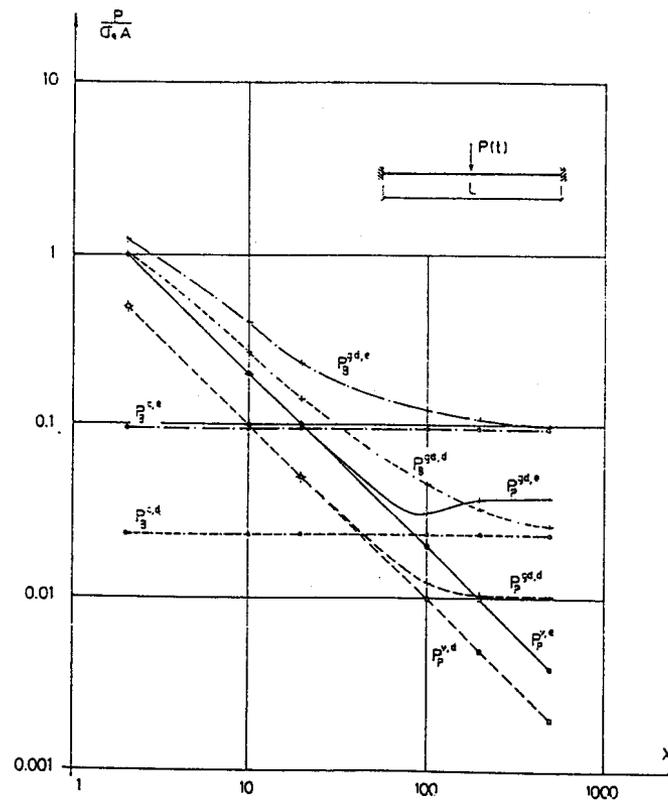


Figura 7 : Cargas límite en función de la esbeltez , para carga concentrada .
 Supraíndices : gd : grandes desplaz., v : vigas , c : cables , d : resp. din. máx., e : resp. estática

varía de 0.5 , hasta $\lambda=20$, a 0.27 para $\lambda=500$. Relación $P_{B(din)}/P_{B(est)}$: con teoría de cables es constante e igual a 0.25 , con teoría "exacta" varía de 0.835 para $\lambda=2$, a 0.27 para $\lambda=500$.

Para carga repartida los resultados , no incluidos en este trabajo , muestran un comportamiento similar a los de carga concentrada , con la presencia de la etapa elastoplástica , y con diferencias algo mayores entre teorías aproximadas y "exacta" .

CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó un modelo matemático para análisis estático y dinámico de barras con no linealidad geométrica y física , el cual se utiliza como solución "exacta" para evaluar el comportamiento de teorías aproximadas de viga y cables , en la respuesta de barras con diferentes tipos de carga y esbeltez .

La respuesta "exacta" de la barra analizada depende de su esbeltez y al crecer este parámetro varía de modo continuo desde el comportamiento tipo viga hasta el característico de un cable . Desde el punto de vista de los cálculos prácticos se puede afirmar que , para los dos tipos de carga considerados , actuando en forma estática o dinámica , para esbeltez menor e igual a 20 , valen los resultados de la teoría de vigas y para esbeltez mayor o igual a 200 los de la teoría de cables .

La esbeltez ha sido definida como la relación entre la luz total y la altura de la sección rectangular , de la barra empotrada en ambos extremos . Sería conveniente extender el análisis para otras secciones y condiciones de vínculo , para lo que resultará necesario definir la esbeltez de modo más general como el cociente entre la luz entre puntos de momento nulo y el radio de giro .

REFERENCIAS

1. O. Möller , M. Rubinstein , "Campo de validez de diferentes teorías en el análisis dinámico de vigas incluyendo grandes desplazamientos", *Mecánica Computacional, AMCA*, Vol.11, 249-258 (1991) .
2. K.J. Bathe , *Finite Element Procedure in Engineering Analysis* , Prentice Hall (1982) .
3. O.C. Zienkiewicz , *El Método de los Elementos Finitos* , Reverté (1980) .
4. Y.B. Yang , W. Mc Guire , "Stiffness Matrix for Geometric Nonlinear Analysis", *J. Struc. Eng., ASCE*, 112 (4), 853-877 (1986) .
5. J.A. Ronda Vázquez , R.Rosas e Silva , "Spatial buckling analysis : a comparison of formulations" *Mecánica Cmputational, AMCA*, Vol.7, 143-154 (1988) .
6. J.A. Ronda Vázquez , R.Rosas e Silva , "Análisis comparativo de formulaciones de matrices geométricas en problemas de elasticidad elástica linealizada", *Mecánica Cmputational, AMCA*, Vol.9, 333-346 (1989) .
7. I. Duque Oliart , A.P. Bengoechea , "Aproximación al tratamiento unificado de la no linealidad geométrica de barras rectas", *Rev. Int. de Mét. Num. para Cál. y Dis. en Ing.* , Vol.5 (1), 39-57 (1989) .
8. K.M. Hsiao , J.Y. Jang , "Nonlinear Dynamic Analysis of Elastic Frames", *Comp. & Struc.*, 33 (4), 1057-1063 (1989) .
9. M.B. Wong , F. Tin-Loi , "Geometrically Nonlinear Analysis of Elastic Framed Structures", *Comp. & Struc.*, 34 (4), 633-640 (1990) .
10. M.B. Wong , F. Tin-Loi , "Analysis of frames involving geometrical and material nonlinearities", *Comp. & Struc.*, 34 (4), 641-646 (1990) .
11. M.P. Saka , M.S. Hayalioglu , "Optimum design of geometrically nonlinear elastic-plastic steel frames", *Comp. & Struc.*, 38 (3), 329-344 (1991) .
12. E. Graff , M. Eisenberger , "Non-linear analysis of framed structures with axial constraints", *Comp. & Struc.*, 38 (3), 345-351 (1991) .
13. H. Chen , G.E. Blandford , "Thin-walled space frames. I : Large-deformation analysis theory", *J. Strct. Eng. ASCE* 117 (8), 2499-2520 (1991) .
14. S.P. Cavalcanti Marques , G.J. Creus , "Large displacement analysis of elastic-plastic frames : a numerical and experimental study", *Meánica Computacional, AMCA*, Vol.11, 113-122 (1991) .