

ANÁLISIS DE PROBLEMAS DE FLUJO COMPRESIBLE
USANDO TÉCNICAS DE ELEMENTOS FINITOS
Y REMALLADO ADAPTATIVO

Fernando Quintana

División Mecánica Computacional (DIA).
Centro Atómico Bariloche - CNEA.

Av. E. Bustillo Km 9.5. 8400 San Carlos de Bariloche. Argentina.

RESUMEN

Se presenta aquí un conjunto de programas destinados al análisis de problemas de flujo compresible laminar en dos dimensiones -ecuaciones de Euler y de Navier-Stokes-. Para la generación de mallas se ha utilizado la técnica de avance frontal con remallado adaptativo automático y para la solución del flujo el algoritmo de Taylor-Galerkin de dos pasos y técnicas de difusión artificial. Se presentan unos ejemplos de flujo supersónico con aparición de choques.

SUMMARY

A set of codes for the analysis of laminar compressible flow in two dimensions -Euler and Navier Stokes Equations- is presented. The advancing Front Technique with adaptive automatic remeshing has been used to create the meshes and a two step Taylor Galerkin with artificial diffusion techniques to solve the flow. Some examples of supersonic flow are described.

INTRODUCCION

Si bien tradicionalmente la técnica de diferencias finitas ha sido la más usada para la resolución de problemas de Mecánica de Fluidos especialmente en aquellos casos donde la hipótesis de incompresibilidad es aplicable, los elementos y los volúmenes finitos han sido aplicados exitosamente para problemas de flujo compresible por la gran flexibilidad que presenta este método en cuanto al tipo de malla a usar. En efecto: en problemas de flujo compresible, y en especial en aquellos casos donde la solución presenta fuertes gradientes como es el caso de capas límite u ondas de choque resulta sumamente atractivo el uso de mallas no estructuradas con refinamiento adaptativo dado que permiten obtener soluciones de muy buena calidad y con costos computacionales razonables.

En el presente trabajo se describe un conjunto de técnicas destinadas a la solución de los problemas citados. La malla usada es de tipo no estructurada y es obtenida mediante un generador automático que usa el método de *avance frontal*. Luego el algoritmo de solución del flujo es un algoritmo de tipo explícito -Taylor Galerkin de 2 pasos-, y por medio de un estimador de error se genera la información necesaria para obtener una nueva malla adaptada a la solución anterior.

FLUJO COMPRESIBLE. ECUACIONES.

Se presentan a continuación las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo compresible laminar escritas en forma conservativa para el caso bidimensional. Las mismas se transforman en las ecuaciones de Euler si se ignoran los términos viscosos (segundo miembro).

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x_i} \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

donde:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho \epsilon \end{Bmatrix} \quad \text{incógnitas nodales} \quad (2)$$

$$\mathbf{f}_i = \begin{Bmatrix} \rho u_i \\ \rho u_i u_1 + p \delta_{1i} \\ \rho u_i u_2 + p \delta_{2i} \\ (\rho \epsilon + p) u_i \end{Bmatrix} \quad \text{flujos advectivos} \quad (3)$$

$$\mathbf{g}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ \sigma_{1i} \\ \sigma_{2i} \\ k T_i + u_j \sigma_{ji} \end{Bmatrix} \quad \text{flujos viscosos} \quad (4)$$

ρ es la densidad,
 u_i componentes cartesianas de la velocidad,
 ϵ energía total (cinética más interna) por unidad de masa,
 δ_{ij} es la delta de Kronecker.

Se hace además la hipótesis de que el fluido es un gas perfecto por lo que se agrega la ecuación de estado:

$$p = (\gamma - 1)\rho(\epsilon - 0.5u_j u_j)$$

donde $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ es el cociente de calores específicos. En los cálculos que se presentan en este trabajo se ha utilizado $\gamma = 1.4$.

ESTRATEGIA NUMERICA

El autor original del algoritmo de Taylor-Galerkin utilizado en este trabajo [1], ha puesto especial atención en la aproximación del término temporal (ver ecuación 1) para eliminar los problemas de estabilidad que presenta una aproximación centrada como Galerkin tradicional en problemas donde el término convectivo es dominante como es el caso de los problemas de aerodinámica con números de Mach próximos o mayores que uno. Esta es la justificación del desarrollo en serie de Taylor para la derivada respecto al tiempo.

Derivación del algoritmo

Se desarrolla en serie de Taylor el vector solución \mathbf{u} :

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t \frac{\partial \mathbf{u}^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^n}{\partial t^2} \quad (5)$$

donde el superíndice n indica solución al tiempo $n\Delta t$, etc. De aquí:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t \left(\frac{\partial \mathbf{g}_j^n}{\partial x_j} - \frac{\partial \mathbf{f}_i^n}{\partial x_i} \right) + \frac{\Delta t^2}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial x_k} \right) - \mathbf{G} \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial x_i} \right]^n \quad (6)$$

donde $\mathbf{A}_i = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_i}$ y $\mathbf{G}_i = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_i}$ son matrices de gradientes y donde las derivadas o productos de derivadas de orden mayor que dos han sido ignorados dado que no podrían ser representados mediante las funciones de aproximación lineales usadas.

La ecuación (6) puede discretizarse usando elementos finitos del tipo C_0 :

$$\mathbf{u}^n = \sum_i N_i a_i^n = \mathbf{N} \mathbf{a}^n \quad (7)$$

Donde N_i es la función de interpolación lineal del nodo i y a_i^n los valores nodales de la incógnita \mathbf{u} en el tiempo n .

Mediante funciones de peso estándar (Galerkin) se puede escribir la forma integral de las ecuaciones discretizadas:

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \Delta \mathbf{u} d\Omega = \Delta t \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \left[\frac{\partial \mathbf{g}_i^n}{\partial \mathbf{x}_i} - \frac{\partial \mathbf{f}_i^n}{\partial \mathbf{x}_i} - \frac{\Delta t}{2} \left[\mathbf{G} \frac{\partial \mathbf{f}_i^n}{\partial \mathbf{x}_i} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \left(\mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial \mathbf{x}_k} \right)^n \right] \right] d\Omega \quad (8)$$

Donde $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n$. Integrando por partes \mathbf{A}_i en la ecuación (8):

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \Delta \mathbf{u} d\Omega = \Delta t \left\{ \int_{\Omega} \left[-\mathbf{N}^T - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \mathbf{x}_i} \mathbf{A}_i^n \right] \frac{\partial \mathbf{f}_k^n}{\partial \mathbf{x}_k} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \mathbf{x}_j} \mathbf{g}_j^n - \frac{\Delta t}{2} \left(\mathbf{N}^T \mathbf{G} \frac{\partial \mathbf{f}_i^n}{\partial \mathbf{x}_i} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \left[\left(\mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial \mathbf{x}_k} \right)_n + \mathbf{g}_n \right] d\Gamma \right\} \quad (9)$$

El subíndice n indica proyecciones normales a la frontera, mientras el superíndice n sirve para destacar magnitudes evaluadas en el instante de tiempo $n\Delta t$. Es importante destacar que $\mathbf{A}_i = \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{x}_i}$ y $\mathbf{G} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left(\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \mathbf{x}_i} \right)$ son matrices de gradientes de magnitudes vectoriales que deben calcularse y almacenarse en cada paso de tiempo. Esto es costoso desde el punto de vista computacional (tiempo de *cpu* y memoria). Introduciendo en la expresión (9) las interpolaciones habituales de elementos finitos (7) para \mathbf{u} , \mathbf{f} y \mathbf{g} se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas del tipo:

$$\mathbf{M} \Delta \mathbf{a}^n = \mathbf{RHS}^n \quad (10)$$

$$\mathbf{M}_{ij} = \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega \quad (11)$$

El hecho que la matriz de masas (11) no sea una matriz diagonal representa una desventaja desde el punto de vista de la eficiencia computacional, por lo que suele ser diagonalizada usando alguno de los procedimientos habituales[†]. Sin embargo, la matriz llena produce soluciones con menos problemas de dispersión [1], por lo cual se prefiere trabajar con matriz diagonalizada en aquellos casos en que sólo interesa el estado estacionario y para los transitorios donde interesa mantener las buenas propiedades de la matriz llena se recurre a un procedimiento iterativo tipo Jacobi.

[†] Ver por ejemplo el apéndice 8 de la referencia [3]

Algoritmo de dos pasos

La versión dos pasos de este algoritmo ha sido desarrollada para evitar el oneroso cálculo de \mathbf{A} , y \mathbf{G} en cada paso de tiempo.

Partiendo de un desarrollo de Taylor para $\mathbf{u}^{n+1/2}$:

$$\mathbf{u}^{n+1/2} = \mathbf{u}^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \mathbf{u}^n}{\partial t} = \mathbf{u}^n - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \mathbf{f}_i^n}{\partial x_i} \quad (12)$$

Se interpola de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{n+1/2} &= \mathbf{P}\hat{\mathbf{u}}^{n+1/2} \\ \mathbf{u}^n &= \mathbf{N}\hat{\mathbf{u}}^n \\ \mathbf{f}_i^n &= \mathbf{N}\hat{\mathbf{f}}_i^n \end{aligned} \quad (13)$$

Donde \mathbf{N} indica funciones de interpolación lineales por elemento y \mathbf{P} funciones constantes por elemento[†]. Resolviendo por residuos ponderados:

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} \mathbf{P}^T \mathbf{P} d\Omega \right) \mathbf{u}^{n+1/2} = \\ \int_{\Omega} \mathbf{P}^T \left[\mathbf{u}^n + \frac{\Delta t}{2} \left(-\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial x_i} \right)^n \right] d\Omega \end{aligned} \quad (14)$$

De este paso se obtiene $\mathbf{u}^{n+1/2}$.

Para el segundo paso, nuevamente se hace un desarrollo de Taylor, esta vez para $\mathbf{f}_i^{n+1/2}$:

$$\mathbf{f}_i^{n+1/2} = \mathbf{f}_i^n + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial t} \right)^n + O(\Delta t)^2 \quad (15)$$

Aplicando la regla de la cadena y reemplazando la ecuación (1) donde se ignora el término difusivo:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{f}_i^n}{\partial t} \right)^n = \left(\frac{\partial \mathbf{f}_i^n}{\partial \mathbf{u}} \right)^n \left(\frac{\partial \mathbf{u}^n}{\partial t} \right)^n \simeq -\mathbf{A}_i^n \left(\frac{\partial \mathbf{f}_j}{\partial x_j} \right)^n \quad (16)$$

Por tanto, usando (15):

$$-\mathbf{A}_i^n \left(\frac{\partial \mathbf{f}_j}{\partial x_j} \right)^n \simeq \frac{2}{\Delta t} [\mathbf{f}_i^{n+1/2} - \mathbf{f}_i^n] \quad (17)$$

Puede observarse que mediante el procedimiento anterior, se eliminan las matrices[†] \mathbf{A}_i y aparecen unos flujos $\mathbf{f}_i^{n+1/2}$ que son interpolados con funciones constantes por trozos por razones de economía como ya

[†] La elección de funciones de interpolación constantes por elemento se justifica por razones de economía

[†] Respecto a la matriz \mathbf{G} , puede llevarse a cabo un tratamiento idéntico, que tiene sentido si se incluyen en el análisis términos de fuente [2].

se mencionara, y también por mantener el tipo de aproximación empleada para el término $A_i^n \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_j} \right)$ en el esquema de un solo paso (ecuación 9). Se puede escribir una forma integral de residuos ponderados de (17) usando las funciones constantes P como ponderación:

$$\int_{\Omega} P^T \left[A_i \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_j} \right) \right]^n d\Omega \simeq \frac{2}{\Delta t} \int_{\Omega} P^T [f_i^n - f_i^{n+1/2}] d\Omega \quad (18)$$

La que luego de evaluar las integrales resulta:

$$\left[A_i \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_j} \right) \right]_e^n \simeq \frac{2}{\Delta t} [\bar{f}_i^n - \bar{f}_i^{n+1/2}] \quad (19)$$

donde la barra indica valor promedio elemental.

A continuación se reemplaza (19) en (9) y después de integrar por partes en el segundo miembro, y teniendo en cuenta que $\int_{\Omega} (-\bar{f}_i^n + \bar{f}_i^n) d\Omega = \oint_{\Gamma} (\bar{f}_i^n - \bar{f}_i^n) d\Gamma = 0$ dado que los \bar{f} son promedios elementales:

$$\Delta t \left\{ \int_{\Omega} \frac{\partial N^T}{\partial x_j} (f_j^{n+1/2} - g_j) d\Omega + \oint_{\Gamma} N^T (g_i^n - \bar{f}_i^{n+1/2}) d\Gamma \right\} \quad (20)$$

Difusión artificial

Puede probarse que para el i -ésimo nodo de una solución unidimensional, se puede obtener aproximación de la derivada segunda de la incógnita mediante:

$$C \left[\frac{\partial}{\partial x} (h^2 \frac{\partial \phi}{\partial x}) \right]_i = [M_D^{-1} [M - M_D] \phi]_i \quad (21)$$

Donde:

M_D es la matriz de masas diagonalizada.

C es una constante.

ϕ es el vector de incógnitas.

Una extensión de esta expresión para problemas multidimensionales es:

$$a_i^{n+1} = a_i^{n+1} + \alpha \Delta t \left\{ M_D^{-1} \sum_e |I_e| [M^e - M_D^e] a^n \right\} \quad (22)$$

Donde a_i^{n+1} es la solución suavizada e I_e es un indicador que tiene un valor entre 0 y 1 siendo mayor en las regiones donde aparecen gradientes importantes. La ecuación (16) tiene la forma:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[h^2 |S_e| \frac{\partial a^n}{\partial x_i} \right] \quad (23)$$

El indicador I_e viene dado por la expresión:

$$I_e = \max_{i \in \mathcal{I}} \left\{ \frac{[\mathbf{M}_D^{-1}(\mathbf{M} - \mathbf{M}_D) p]_i}{[\mathbf{M}_D^{-1}(\mathbf{M}p)]_i} \right\} \quad (24)$$

$$0 < I_e < 1$$

Puede mostrarse que el término entre llaves en la (23) es una aproximación de:

$$\frac{\left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left[h^2 \frac{\partial p}{\partial x_i} \right] \right]_i}{P_i} \quad (25)$$

En situaciones donde aparecen choques de diferente intensidad el siguiente indicador ha dado mejores resultados:

$$I_e = \max_{i \in \mathcal{I}} \frac{[\mathbf{M}_D^{-1}(\mathbf{M} - \mathbf{M}_D) p]_i}{[\mathbf{M}_D^{-1} |(\mathbf{M} - \mathbf{M}_D)p|]_i} \quad (26)$$

SOLUCION ADAPTIVA

Generación de malla

La malla de elementos finitos la provee un generador automático que utiliza la técnica de *avance frontal*. El modo de proceder no es tratar de mejorar la malla mediante refinamientos sino generar una completamente nueva. Para ello el generador necesita una *malla de base*, sobre la cual se han de especificar (por nodo o por elemento) los tamaños elementales requeridos (normalmente la primera malla tiene tamaño uniforme). A partir de ese instante el procedimiento es iterativo: se obtiene la solución, luego el programa del estimador de error da los tamaños ideales para cada nodo (o elemento) y con esta información y la discretización que se acaba de usar (que ahora es la nueva malla de base) se genera una nueva. El usuario detiene el proceso cuando considera suficiente la calidad de la solución obtenida.

Estimador de error

Debido a las características de los problemas a resolver, pueden aparecer fuertes variaciones en regiones muy localizadas (choques, capas límite), mientras el resto de la solución es suave. Este hecho hace que para obtener soluciones suficientemente buenas y un el grado de definición aceptable es necesario utilizar un tamaño de elemento sumamente pequeño en dichas zonas, y por tanto para mejorar la eficiencia computacional del método se introduce una estrategia de remallado basado en un estimador de error *a posteriori*. El error cuadrático medio para problemas unidimensionales elípticos puede escribirse:

$$E^e = C(h^e)^2 \left| \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|_e \quad (27)$$

Donde
 h^e es la longitud del elemento unidimensional.

ϕ es la variable elegida.

C es una constante ($C = 1/11$ para elementos lineales).

Si se adopta el criterio de equidistribución del error entre los elementos:

$$(h^e)^2 \left| \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|_e = \text{constante} \quad (28)$$

Para problemas bidimensionales aparece una matriz de derivadas segundas:

$$D_{ij} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \quad (29)$$

La cual tiene la ventaja de dar *direccionalidad* al estimador de error. Esta propiedad es apreciada, pues los choques y las capas límites son fenómenos esencialmente unidimensionales: presentan una fuerte variación en una dirección y un comportamiento suave en la dirección ortogonal a la anterior. por tanto se hace uso de esta propiedad para producir elementos *estirados* en dichas regiones.

Dado el carácter vectorial de u , debe elegirse una variable escalar para analizar su comportamiento. En este trabajo, se ha utilizado el el número de Mach, aunque el módulo de la velocidad suele dar buenos resultados. Los nuevos tamaños elementales δ_1 and δ_2 es las direcciones principales se definen de acuerdo a:

$$(\delta_1)^2 |\lambda_1| = (\delta_2)^2 |\lambda_2| = \delta_r \lambda_{\max} \quad (30)$$

Siendo λ_1 y λ_2 los autovalores de la matriz D , δ_r una constante especificada por el usuario y λ_{\max} el máximo autovalor para toda la malla.

EJEMPLOS

Flujo supersónico no viscoso en una rampa (compression corner)

En este caso se resuelven las ecuaciones de Euler ($g_v = 0$ en (1)), es decir se considera un gas perfecto y además ideal (no viscoso). El problema consiste en una rampa a 25° a través de la cual pasa un flujo con número de Mach igual a 5 y ángulo de ataque 0° . En la literatura clásica (ver por ejemplo [6]), este problema se halla resuelto y la solución es un choque a 35° recto y localizado en la discontinuidad geométrica representada por el comienzo de la rampa. Se trata de comprobar si el procedimiento de remallado es capaz de obtener una solución suficientemente buena y comparable con dichas soluciones teóricas.

En la figura 1 (a y b) se presentan la primera malla de 522 nodos y 960 elementos y la solución correspondiente. En la figura 2 (a y b) se presentan la malla final (después de tres remallados sucesivos) que tiene 1302 nodos y 2550 elementos y la solución después de una convergencia de por lo menos 3 órdenes de magnitud en la norma L_2 del residuo. Puede comprobarse el grado de detalle alcanzado para la definición del choque y la coincidencia en el ángulo del mismo.

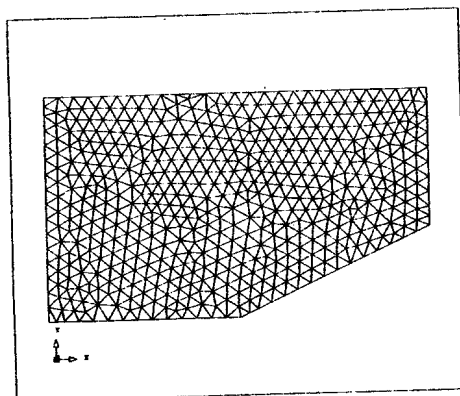


Fig.1a Malla inicial. 522 nodos y 960 elementos

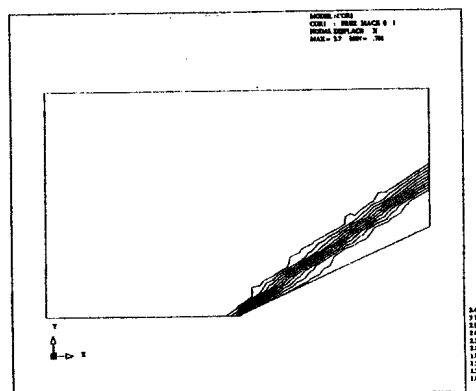


Fig.1b Isolínas de densidad.

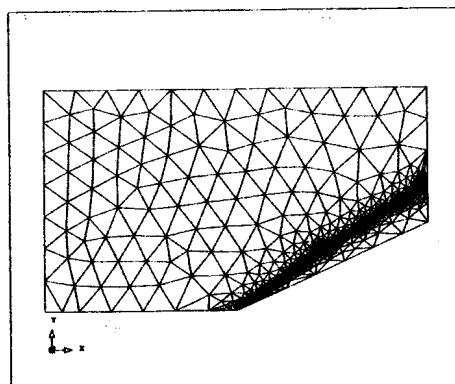


Fig.2a Malla final. 1302 nodos y 2550 elementos

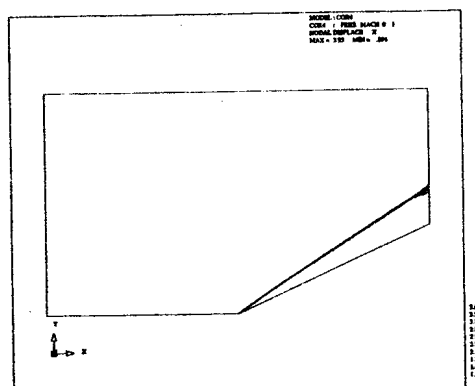


Fig.2b Isolínas de densidad

Flujo supersónico viscoso en una doble elipse

En este problema se resuelve el sistema de ecuaciones de Navier Stokes para el flujo de un gas perfecto alrededor de una doble elipse. El número de Mach en el infinito es de 8.15 y el ángulo de ataque es 30° .

La malla utilizada (figura 3a) es el resultado de tres remallados adaptivos sucesivos y tiene 16212 elementos y 8315 nodos. Las líneas de igual número de Mach (figura 3b) destacan el choque principal y un segundo choque a partir de la discontinuidad geométrica. También se ha capturado la capa límite y zonas de recirculación. Los resultados de este trabajo fueron presentados y contrastados en el I Workshop for Reentry Problems (Part II) que tuviera lugar en Antibes (Francia) en Abril de 1991.



Fig.3a Malla final de elementos finitos. 16212 elementos y 8315 nodos.

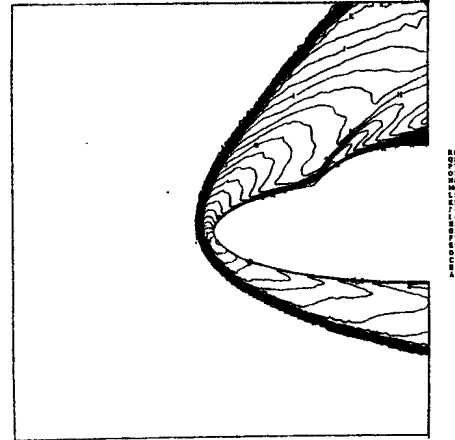


Fig. 3b Líneas de igual número de Mach.

CONCLUSIONES

Se ha presentado un procedimiento completo para la solución de problemas de flujo compresible donde se ha tenido en cuenta la necesidad de reducir los costos computacionales. La mecánica de remallado adaptativo ha mostrado ser una poderosa herramienta para este tipo de problemas y se han presentado algunos ejemplos de flujo supersónico con aparición de choques y capas límite. Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el CONICET a través de los PID-BID números 39 y 40.

REFERENCIAS

- 1.-Donea J.A *Taylor Galerkin Method for the convective transport problems*. Int. J. Numerical Methods in Engineering 20, 101-109 1984 .
- 2.-Peraire, J.A *finite element method for convective dominated flows*. PhD Thesis. University College of Swansea. 1986 .
- 3.-Zienkiewicz O.C., & Taylor R., *The finite element method*. Fourth Edition. Mc. Graw-Hill. 1989
- 4.-M. Canet, J., Quintana F., Oñate E., Bugada G., Peffer G., & Zienkiewicz O.C. *Analisis de problemas de flujo compresible supersónico utilizando una formulación Taylor-Galerkin con elementos finitos adaptables*. Proceedings del I Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería. SEMNI. Las Palmas de Gran Canaria (España) Junio 1990.
- 5.-Peiro J. *A finite element procedure for the solution of the Euler equations on unstructured meshes*. Phd. Thesis . University College of Swansea, 1990 .
- 6.-Liepmann H & Roshko A *Elements of Gasdynamics*. Galcit Aeronautical Series. John Wiley & Sons Ed. 1957.
- 7.-Morgan K., Peraire J., Thareja R.R. & Stewart J.R. *An adaptive finite element scheme for the Euler and Navier- Stokes equations*. AIAA paper 87-1172-CP. 1987

