

**RESOLUCION POR ELEMENTOS FINITOS DE LAS ECUACIONES DE
NAVIER-STOKES EN 3-D INCORPORANDO UN MODELO SIMPLE DE
FLUJO A DOS FASES**

Norberto M. Nigro*, Mario A. Storti† y Sergio R. Idelsohn‡

INTEC (CONICET-UNL), Casilla de Correo 91, 3000-Santa Fe, Argentina

RESUMEN

En este trabajo se aplican los resultados teóricos [9] sobre la resolución por elementos finitos de las ecuaciones de Navier-Stokes en la simulación de un flujo a dos fases. Mostramos en forma resumida el esquema numérico empleado. Posteriormente pasamos a detallar la simulación con la otra fase de origen gaseosa. La interacción entre ambas fases se logra mediante un modelo simplificado que desprecia los términos inerciales de ésta última considerando un acoplamiento a través del efecto de flotación provocado por las burbujas gaseosas. La fricción entre ambas fases es calculada en base a la hipótesis de burbujas independientes y para el fluido se asume el modelo de Navier-Stokes. El objetivo final es la modelización del flujo en hornos de cuchara agitados por la inyección de un gas inerte, problema de gran interés actual en la industria metalúrgica. Finalmente mostramos algunos resultados obtenidos sobre ésta aplicación.

SUMMARY

In this work we applied the theoretical results [9] about the resolution by *FEM* of the two phase flows Navier-Stokes equations. We describe briefly the numerical scheme employed. Further we comment the simulation with the other gaseous phase. The interaction between them is expressed by a simplified model that neglect the inertial effects of the gaseous phase considering that the coupling is produced by the flotation of the gaseous bubbles. The friction between the two phases is computed by the independent bubbles hypothesis and we assumed Navier-Stokes equations for the fluid. The goal is applying this code in the simulation of ladle furnace stirred by an inert gas, an important problem in the metallurgy industries. Finally we show some results to this problem.

* Becario de Perfeccionamiento del CONICET

† Miembro de la Carrera del Investigador Científico del CONICET

1. DISCRETIZACION NUMERICA

El método de discretización utilizado se inscribe dentro de la tendencia actual de resolver flujos incompresibles como límite de uno compresible con interpolación de igual orden para velocidades y presiones y un resolvidor basado en integración pseudotemporal explícita. Básicamente se trata de un método de residuos ponderados de tipo Petrov-Galerkin (SUPG) aplicado a las ecuaciones de conservación. Este método introduce la disipación numérica necesaria en problemas dominados por advección, manteniendo la consistencia inalterada y es, además, conservativo. Este método es, probablemente, el más referenciado en el área de CFD por elementos finitos [1-3,8].

En la formulación SUPG desarrollada por Mallet [6] el problema de sistemas advectivos difusivos no es una extensión natural del caso escalar, concretamente la solución aproximada no es igual a la solución exacta, ni siquiera en el caso en que el problema sea unidimensional y los jacobianos constantes. En nuestro trabajo [9] hemos extendido el problema escalar a sistemas de manera que en el caso previamente citado sí obtenemos la solución exacta. Este es uno de los puntos más originales de la formulación empleada. La generalización a problemas multidimensionales sigue la línea desarrollada por Mallet.[6]

Otro de los aspectos interesantes del esquema de discretización espacial es que permite utilizar para las variables primitivas de nuestro problema funciones de interpolación de igual orden evitando el bloqueo producido por el no cumplimiento de la condición de Brezzi-Babuska. Esto se logra mediante una mecanismo de penalización no convencional, surgido como subproducto del tipo de upwind introducido [9].

La resolución del sistema de ecuaciones resultante de la discretización numérica se logra mediante una integración pseudo temporal explícita. La elección de un método explícito se basó en lograr un código competitivo frente a grandes problemas tridimensionales que se presentan en la industria. Sin embargo, esta competitividad se logra sólo mediante técnicas como "time local stepping" y preconditionamiento, ambos basados en un fino análisis de la estabilidad. Si el sistema es espacialmente mal condicionado, como suele darse cuando existen elevados gradientes de refinamiento de la malla, esto produce un deterioro notable de la convergencia pues el elemento de tamaño más chico limita la estabilidad mientras que el más grande la convergencia. En cierta medida un paso de tiempo local permite la utilización de mallas arbitrariamente refinadas ya que en algún sentido se puede interpretar al TLS como una transformación a una malla homogénea. Esto es consistente ya que el objetivo es capturar el estado estacionario sin importar la precisión de la evolución temporal.

Por otro lado, existe un mal condicionamiento propio del sistema de ecuaciones. La parte fluidomecánica está limitada por la velocidad de las ondas de presión, mientras que la parte gaseosa es prácticamente una ecuación desacoplada con una velocidad característica igual a la velocidad total del gas que tiene una magnitud en general muy diferente. Debido a que las ecuaciones de la parte fluidomecánica (5 ecuaciones en 3D) está sólo débilmente acoplada con la del gas es ventajoso usar un paso de tiempo para cada fase. Esto preconditiona mejor el sistema y redundante en un mejoramiento muy grande de la convergencia. Hacemos hincapié en que estas estrategias no afectan la solución final sino que son usadas como artificios para mejorar la convergencia.

2. ECUACIONES DE BALANCE PROMEDIADAS

Las ecuaciones de balance para cada fase son:

$$\left(\frac{\partial(\rho\psi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}\psi) \right) = \rho\phi - \nabla \cdot \mathbf{J} \quad (1)$$

donde ψ es la propiedad del fluido, $\mathbf{u}\psi$ es el flujo convectivo, ϕ es el término fuente en volumen y \mathbf{J} es el término de flujo difusivo. Para cada una de las ecuaciones de continuidad, momento y energía los valores correspondientes están dados en la siguiente tabla:

Tabla I

Ecuación	ψ	ϕ	\mathbf{J}
Continuidad	1	0	0
Balance de momentos	\mathbf{u}	\mathbf{g}	\mathbf{T}
Balance de energía	$e + \frac{1}{2}u^2$	$Q + \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}$	$\mathbf{q} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}$

Haciendo uso del operador de promediación en volumen sobre las ecuaciones de balance de masa y momento para cada fase, arribamos a las siguientes expresiones:

$$\left(\frac{\partial \{\alpha_k \langle \rho \rangle_k\}}{\partial t} + \nabla \cdot \{\alpha_k \langle \rho \mathbf{u} \rangle_k\} \right) = 0 \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial \{\alpha_k \langle \rho \mathbf{u} \rangle_k\}}{\partial t} + \nabla \cdot \{\alpha_k \langle (\rho \mathbf{u} \mathbf{u} - \mathbf{T}) \rangle_k\} \right) = \alpha_k \langle \rho \rangle_k \mathbf{g} \pm \mathbf{F}_{GL} \quad (3)$$

con α_k la concentración de la fase correspondiente k

Para el líquido ρ es constante y además haremos suposiciones del tipo $\langle \mathbf{u} \mathbf{u} \rangle_L = \langle \mathbf{u} \rangle_L \langle \mathbf{u} \rangle_L$. Se llega entonces a un sistema de ecuaciones del tipo Navier-Stokes para el líquido con un término fuente adicional en las ecuaciones de momento dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{GL} &= \frac{1}{\Omega} \times (\text{número de burbujas en } \Omega) \times (\text{Fuerza sobre una burbuja}) \\ &= \frac{1}{\Omega} \frac{\Omega_G}{\Omega_b} \times \alpha_G 6\pi\mu(\mathbf{u}_G - \mathbf{u}_L) r_b F^*(Re_b) \end{aligned} \quad (4)$$

donde $Re_b = |\mathbf{u}_G - \mathbf{u}_L| r_b / \nu$ es el número de Reynolds de la burbuja y $r_b = (3\Omega_b/4\pi)^{1/3}$ es el radio de la burbuja (o radio equivalente si no es esférica). El radio de la burbuja es función de la presión y la temperatura. F^* es el drag adimensionalizado (con respecto a flujo de Stokes) sobre la esfera: $F^* \rightarrow 1$ para $Re_b \rightarrow 0$.

Por último, la fuerza de fricción debe anularse cuando alguna de las fases desaparece. Esto es así cuando no hay gas debido al factor α_G pero no ocurre lo mismo cuando $\alpha_L = 0$. Introducimos entonces un factor $(1 - \alpha_G)$ en el término de fricción.

$$\mathbf{F}_{GL} = \frac{6\pi\mu\alpha_G\alpha_L(\mathbf{u}_G - \mathbf{u}_L)}{\frac{4}{3}\pi r_b^2} F^*(Re_b) \quad (5)$$

Para la fase gaseosa el balance de masa es :

$$\frac{\partial \{\alpha_G \rho_G\}}{\partial t} + \nabla \cdot \{\alpha_G \rho_G \mathbf{u}_G\} = 0 \quad (6)$$

Supondremos que debido a su pequeña masa los términos de inercia son despreciables. En el tensor \mathbf{T} las fuerzas viscosas son despreciables y solo tenemos en cuenta el gradiente de presión:

$$\nabla(\alpha_{GP}) - \alpha_{GP}\rho_G\mathbf{g} - F_{GL} = 0 \quad (7)$$

p es la presión (igual en ambas fases). Entonces la velocidad *slip* local del gas es :

$$\mathbf{u}_G - \mathbf{u}_L = \left\{ 2/9 \frac{r_b^2}{\mu_{\alpha_G \alpha_L} F^*(Re_b)} \right\} [\nabla(\alpha_{GP}) - \alpha_{GP}\rho_G\mathbf{g}] \quad (8)$$

3. SIMULACION DE FLUJO A DOS FASES EN HORNOS DE CUCHARA

Se presentan en total 5 casos, 4 de ellos en 3D y uno en 2D a modo de validación. Los dos primeros corresponden a un radio de burbuja elevado (pluma cerrada) y dos caudales de gas diferentes con el propósito de testear el efecto del caudal de gas inyectado sobre la velocidad de circulación. Los dos siguientes corresponden al caudal más bajo y a dos radios de burbujas que producen diferentes grados de apertura de la pluma gaseosa.

El caso 2D se utilizó a modo de validación contrastando en el caso plano algunos resultados obtenidos por Mc Kelliget en el caso axisimétrico teniendo como objetivo solamente un análisis cualitativo y solo groseramente cuantitativo dada la diferencia existente entre el planteo de ambos problemas.

3.1 Caso 3 D

Tanto la geometría como las condiciones de operación han sido elegidos tomando como base los de McKelliget *et al* [4]. Estos corresponden a una geometría axisimétrica. Se trata de un cilindro de radio $R = 0.3\text{m}$ y altura $H = 0.6\text{m}$ con un tapón centrado de diámetro $d_0 = 0.0127\text{m}$. El fluido es agua y el gas aire de forma que: $\rho = 1000\text{kg/m}^3$, μ_{mol} = viscosidad dinámica molecular = $1.25 \times 10^{-3}\text{kg m}^{-1}\text{seg}^{-1}$. La velocidad de inyección en el tapón es $V_0 = 1.62\text{m/seg}$. En dicho trabajo se usa un "modelo de turbulencia ad-hoc" el cual da una viscosidad turbulenta efectiva como función de la velocidad de inyección y parámetros geométricos:

$$\mu_{\text{eff}} = \beta V_0 \left\{ \rho_{\text{gas}} \rho_{\text{liq}}^2 \frac{R^2 \pi d_0^2}{H} \right\}^{1/3} \quad (9)$$

Existe evidencia experimental de la validez de esta correlación.

Para estos datos: $\mu_{\text{eff}} = 0.09\text{kg/m seg}$. El caudal de gas inyectado surge ser de $Q = A_{\text{tapon}} \times V_0 = 2.05 \times 10^{-4}\text{m}^3/\text{seg}$.

En los resultados mostrados por McKelliget *et al* las velocidades (horizontales) en la superficie libre alcanzan valores del orden del m/seg. En base a esta velocidad y la altura del baño surge un Re de $\approx 5 \times 10^5$. McKelliget no da valores de las velocidades en la pluma pero es de suponer que serán al menos un orden de magnitud mayores, con lo cual el Re estaría en el orden de 5×10^6 .

Nuestro objetivo fue reproducir estos resultados, pero con una geometría esencialmente 3D, esto es, con el tapón descentrado. Se generó una malla 3D de 960 elementos (tipo ladrillo de 8 nodos) y 1243 nodos para una mitad del horno (ver figura 1). El tapón está ubicado a $1/2R$ del centro T . En nuestro modelo de la pluma gaseosa:

$$Q = A_{\text{tapon}} \times \alpha \times U_{\text{slip}}, \quad U_{\text{slip}} = \frac{2}{9} \frac{r_b^2 \rho g}{\mu_{\text{mol}}(1 - \alpha)} \quad (10)$$

Se tomó como radio de la burbuja: $r_b = 5 \times 10^{-4}\text{m}$, del trabajo de Lai y Salcudean [5]. De las ecuaciones anteriores se obtiene un valor para α de 0.25.

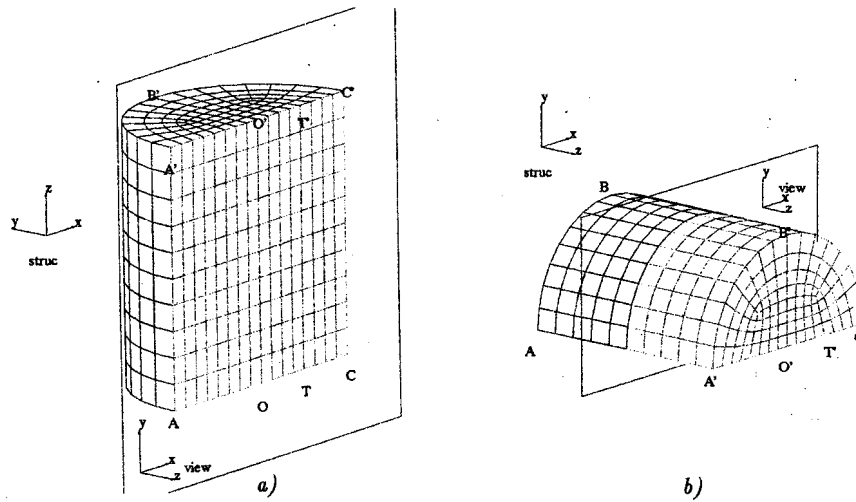


Figura 1: Reactor cilíndrico con tapón decentrado. Descripción de la geometría y malla de elementos finitos. a) Corte del plano de simetría $y = 0$. b) Corte $z = 0.3$

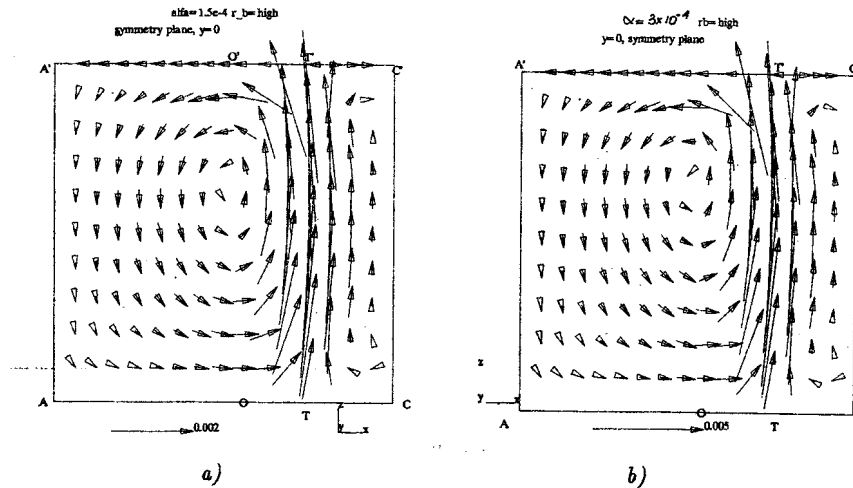


Figura 2: Reactor cilíndrico con tapón decentrado. Velocidades en el plano de simetría. Pluma cerrada. a) $\alpha = 1.5 \times 10^{-4}$. b) $\alpha = 3 \times 10^{-4}$.

Como los Re a obtenerse son muy elevados se efectuó una continuación en α y r_b tratando de aproximarse a los valores mencionados. Como consecuencia de un análisis teórico del modelo y de los resultados alcanzados, surge que α regula la fuerza impulsora y por lo tanto el Re alcanzado. Por otro lado, el r_b regula (a través de la U_{slip}) la interacción entre ambas fases. Para r_b elevados,

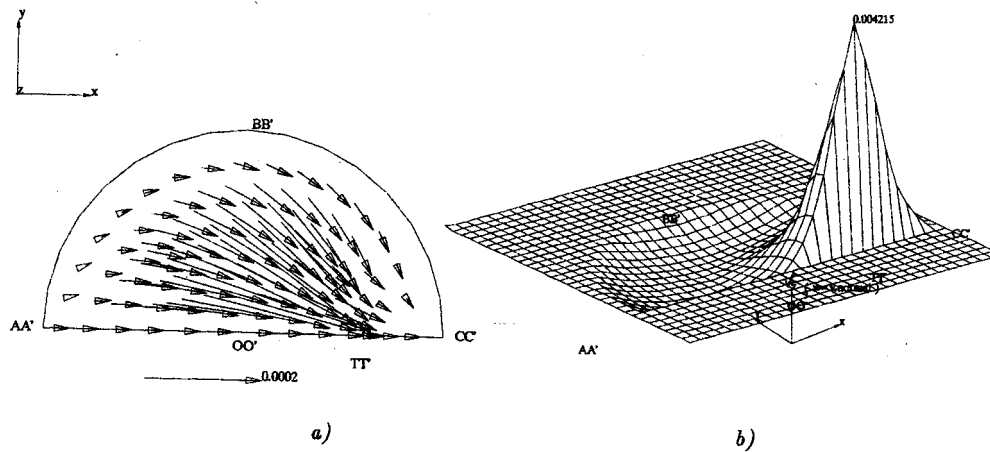


Figura 3: Reactor cilíndrico con tapón decentrado. Velocidades en el plano $z = 0.3$. $\alpha = 1.5 \times 10^{-4}$, pluma cerrada. a) velocidades tangenciales al plano, b) velocidades normales.

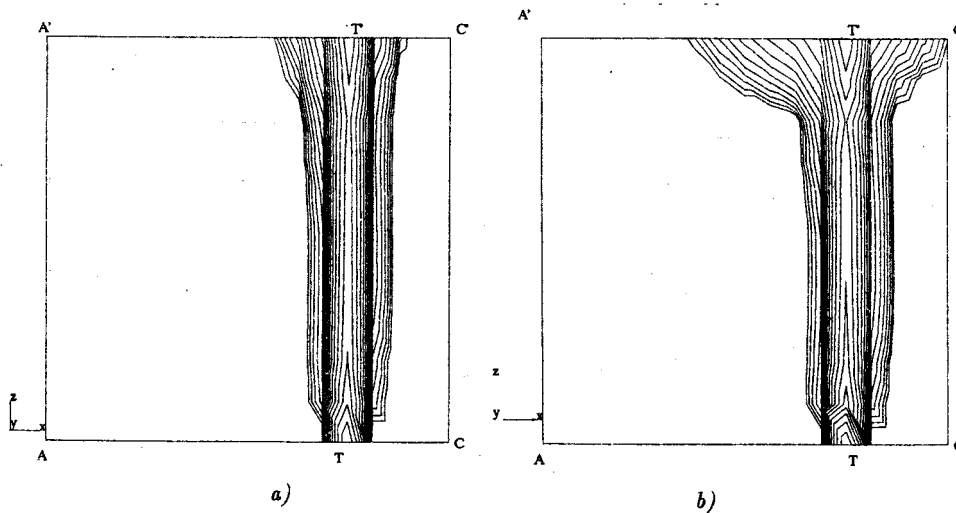


Figura 4: Simulación en la cuchara 3D. $\alpha = 1.5 \times 10^{-4}$. Isocurvas de concentración en el plano de simetría $y = 0$. a) $r_b = 2.8 \times 10^{-4}$. b) $r_b = 10^{-4}$.

la U_{slip} es grande con respecto a la velocidad del líquido y el gas es prácticamente transportado en la dirección vertical sin que la pluma se abra. Para r_b menores las fase líquida comienza a arrastrar al gas, la pluma se abre y esto a su vez afecta el campo de velocidades.

Inicialmente comenzamos con un r_b alto de tal forma de tener una pluma cerrada y estudiar la relación entre el α y el Re . En las figuras 2 y 3 se muestran resultados para $\alpha = 1.5 \times 10^{-4}$ y 3×10^{-4} . Para estos valores de α se obtienen Re del orden de 2000 y 4000 respectivamente.

Para $\alpha = 1.5 \times 10^{-4}$ se obtuvieron resultados para $r_b = 2.8 \times 10^{-4}$ y 10^{-4} . En la figura 4 se muestran isocurvas de concentración de gas donde puede observarse el efecto de apertura de la pluma gaseosa.

3.2 Validación en geometría plana

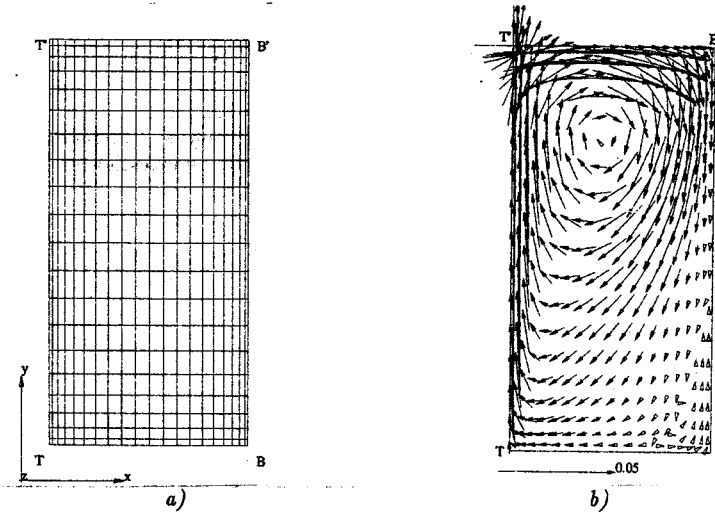


Figura 5: Simulación en geometría plana. a) Geometría y malla de elementos finitos. b) Vectores velocidad.

La geometría considerada y la malla de FEM pueden observarse en la figura 5.a. Se trata de un rectángulo de altura $BB' = H = 0.6$ m y ancho $2 \times TB = 2R = 0.6$ m. El tapón está en el centro T y por simetría se ha considerado sólo la mitad derecha $TBB'T'$. El ancho del tapón es de 3 elementos: 0.015m. Para calcular el área del tapón se pensó en un espesor (en la dirección z) de longitud $\pi R/2$ de forma tal que el volumen total del recinto es $H \times 2R \times \pi R/2 = \pi R^2 H =$ volumen del cilindro de McKelliget.

En la figura 5.b se observa el patrón de velocidades para $Q = 1.36 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{seg}$. Nótese que el centro de rotación se ha desplazado mucho más arriba, que en las corridas a Re más bajas. Puede observarse un efecto de ensanchamiento del jet de fluido puramente hidrodinámico que no se ve en 3D. Finalmente, en la esquina inferior derecha puede observarse claramente una región de recirculación de fluido.

CONCLUSIONES

Hemos mostrado una aplicación del código desarrollado, cuyos alcances teóricos fueron presentados en [9], a un caso de interés industrial. Consideramos que este es solo un primer paso hacia el objetivo final de poder lograr simular flujos en hornos de cuchara ya que para tal fin deberíamos incluir un modelo de turbulencia mucho más robusto para poder comenzar a confeccionar las curvas de performance del horno bajo diferentes situaciones de trabajo. De todos modos los resultados son altamente alentadores, lo cual implica no solo una validación adicional del código frente a las efectuadas anteriormente [9] sino también un indicio del comportamiento del modelo simple de flujo a dos fases introducido.[7]

AGRADECIMIENTOS

Queremos agradecer al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas *CONICET* y a la fundación *FUDETEC* por su ayuda financiera en este trabajo de investigación.

REFERENCIAS

- [1] Hughes, T. J. R. and Tezduyar T. E., *Finite element methods for first-order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible Euler equations*, Comp. Meth. Appl. Mech. & Eng. 45, (1984), 217-284
- [2] Hughes T. J. R. and Mallet M., *A new finite element method for CFD: III. The generalized streamline operator for multidimensional advection-difusion systems*, Comp. Meth. Appl. Mech. & Eng. 58, (1986), 305-328
- [3] Hughes T. J. R. and Mallet M., *A new finite element method for CFD: IV. A discontinuity capturing operator for multidimensional advective-diffusive systems*, Comp. Meth. Appl. Mech. & Eng. 58, (1986), 329-336
- [4] Mc Kelliget J. W., Cross M. and Gibson R. D., *A turbulent fluid flow model of gas agitated reactors*, Appl. Math. Modell., vol 6, (dic. 1982)
- [5] Lai K. and Salcudean M., *Computer analysis of multidimensional, turbulent, buoyancy-induced, two-phase flows in gas-agitated-liquid reactors*, Computers & Fluids, vol 15, N°3, 281-295, (1987).
- [6] Mallet M., *A finite element method for CFD*, Ph.D Thesis, Stanford University, Nov 1985.
- [7] Storti M., *Un modelo simple de flujo a dos fases para la pluma gaseosa en un horno de cuchara*, Informe Interno GT_M/10-91
- [8] Devloo P., Oden J. and Stroboulis T. *Implementation of an adaptive refinement technique for the SUPG algorithm*, Comp. Meth. Appl. Mech. & Eng. , 61, (1987), pp.339-358.
- [9] Storti M., Nigro N. e Idelsohn S., *Simulacion por elementos finitos de las ecuaciones de Navier-Stokes en 4-D*, Informe Interno GT_M/7-92

