

**MÉTODOS NUMÉRICOS PARA PROBLEMAS  
DE TRANSPORTE DE CONTAMINANTES**

Angel N. Menéndez  
Laboratorio de Hidráulica Aplicada (LHA), INCYTH  
Casilla de Correo 21, 1802 Aerop. Ezeiza, Argentina

**RESUMEN**

Se plantea el problema del transporte de contaminantes en cuerpos de agua bien mezclados, en base a análisis uni y bidimensional en el espacio. Se presentan y analizan las ventajas de los métodos numéricos adoptados en el LHA para ambos casos. Se muestran resultados de una aplicación para el estudio de la dispersión de los residuos urbanos de la ciudad de Buenos Aires volcados al Río de la Plata a través del emisario submarino de Berazategui.

**ABSTRACT**

The problem of pollutant transport in well-mixed water bodies, based on one and two-dimensional analysis in space, is posed. The numerical methods adopted at LHA for both cases are presented and analyzed. Results are shown of an application to the study of dispersion of urban residues from Buenos Aires city drawn to the Río de la Plata through the outfall at Berazategui.

**INTRODUCCION**

Una de las formas más comunes de disponer de los residuos industriales y domiciliarios es arrojándolos al cuerpo de agua más cercano (río, mar, estuario, etc.). Se especula, entonces, con la capacidad de dilución de esas grandes masas de agua. Sin embargo, el creciente desarrollo industrial y el crecimiento poblacional en las grandes concentraciones urbanas ha saturado, en muchos casos, esa capacidad de dilución, aún en cursos de agua de la magnitud del Río de la Plata.

La toma de conciencia de los efectos nocivos de esta contaminación, por parte de la población, está forzando la realización de estudios para cuantificar el impacto de las diversas fuentes de polución con el objetivo de proceder a su control.

Los mecanismos físicos y físico-químicos que contribuyen a la dilución del contaminante vertido están bien identificados, si bien la cuantificación precisa de la dilución está limitada por el grado de confiabilidad de los modelos matemáticos utilizados para representar la acción de esos mecanismos. Existe una variedad de modelos teóricos de dilución, dependiendo de la escala de análisis y de las condiciones hidrodinámicas del medio.

En principio, pueden distinguirse dos enfoques, cada uno dirigido a una problemática distinta. Se denomina campo cercano a la zona en la cual se produce la dilución inicial del vertido, que depende fuertemente de las condiciones de descarga. Por el contrario, el campo lejano es la región en la cual la dilución está determinada por las condiciones de

la corriente. La resolución del problema de campo cercano tiene interés para determinar la localización y el diseño de la descarga. En cambio, el problema de campo lejano está asociado a la cuantificación del impacto que el vertido tiene sobre el medio ambiente. En el presente trabajo, la atención se focalizará en este último problema.

El problema de campo lejano está descrito matemáticamente por ecuaciones de transporte que incluyen, básicamente, términos de advección y de difusión. Es bien sabido que la resolución numérica de este tipo de ecuaciones requiere especial cuidado, dadas las diferentes características de acción de ambos mecanismos. En este trabajo se presentan y discuten los métodos considerados más convenientes para resolver numéricamente problemas de campo lejano en cuerpos de agua con buena mezcla vertical, es decir, sin estratificación.

#### MECANISMOS DE DILUCION

Existen dos tipos de mecanismos físicos básicos que producen la dilución del contaminante vertido en una masa de agua: la turbulencia y el gradiente de velocidades de la corriente. Las distintas fuentes de vorticidad que contribuyen a la mezcla turbulenta son:

- La generada por el chorro (turbulencia libre).
- La generada por el fondo (turbulencia de pared de eje predominantemente horizontal).
- La generada por las costas (turbulencia de pared de eje vertical).

Por su parte, el efecto de dilución del gradiente de velocidades de la corriente, denominado advección diferencial, se explica porque éste causa un desparramamiento que, a su vez, incentiva la mezcla turbulenta en la dirección transversal a la corriente, tal cual se esquematiza en la Fig. 1 para un corte vertical. Al efecto combinado de la mezcla turbulenta y la advección diferencial se lo denomina "dispersión" (un nombre poco feliz, ya que esa palabra se reserva, en Física, para denotar el desparramamiento producido por diferencia de celeridad entre distintas componentes espectrales).

En los problemas de campo cercano predomina la turbulencia generada por el chorro. En cambio, en los de campo lejano los mecanismos predominantes son la turbulencia de pared (principalmente de fondo) y la advección diferencial.

Además de los mecanismos hidrodinámicos, existen procesos físico-químicos que pueden contribuir a la dilución. En el caso de un contaminante bacteriológico se produce un decaimiento de la concentración por muerte biológica debido, principalmente, a la acción de la luz. En corrientes con un transporte importante de material en suspensión, algunos elementos contaminantes pueden ser adsorbidos por el sedimento, junto al cual se depositan, eventualmente, en el fondo.

#### FORMULACION MATEMATICA DEL PROBLEMA DE CAMPO LEJANO

La distribución espacio-temporal del contaminante está descrita por la concentración  $c(x_i, t)$ , donde  $x_i$  ( $1 \leq i \leq 3$ ) son las coordenadas espaciales y  $t$  el tiempo. La aplicación del principio de conservación de la masa a un volumen de control elemental conduce a la ecuación [1]

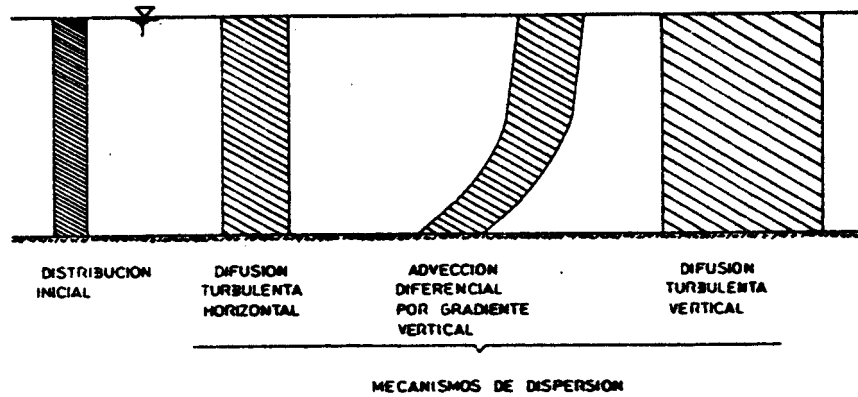


Figura 1. Acción sucesiva de los mecanismos de dispersión.

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i c - \rho D \frac{\partial c}{\partial x_i}) = 0 \quad (1)$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $u_i$  las componentes de la velocidad de la corriente y  $D$  el coeficiente de difusividad molecular. El primer término del paréntesis representa el transporte del contaminante por la corriente y el segundo la mezcla provocada por la difusión molecular. No se han considerado mecanismos físico-químicos de decaimiento, que aparecerían como términos fuente.

Si el flujo es turbulento, cada magnitud puede escribirse como la suma de una componente media (sobre el ensamble o, alternativamente, sobre tiempos largos respecto de las escalas turbulentas y cortos respecto de las escalas de la corriente) y una fluctuación, es decir

$$c = \bar{c} + c' \quad (2)$$

$$u_i = \bar{u}_i + u_i' \quad (3)$$

Introduciendo las Ecs. (2) y (3) en la Ec. (1) y promediando se obtiene

$$\frac{\partial(\rho \bar{c})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \bar{u}_i \bar{c} - \rho D \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} - \rho \overline{u_i' c'}) = 0 \quad (4)$$

donde se ha supuesto que la concentración es lo suficientemente baja como para no modificar sensiblemente la densidad del fluido.

El último término del paréntesis, fruto del carácter no lineal de la ecuación, representa el efecto de las escalas no resueltas al efectuar el promedio, y actúa como un mecanismo adicional de mezcla que resulta mucho más importante que el molecular, el cual puede despreciarse. Se lo modela, en general, utilizando una ley de Fick [2,3]. Eliminando la barra de promediación, la Ec. (4) se reduce, entonces, a

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i c - \rho \epsilon_{ij} \frac{\partial c}{\partial x_j}) = 0 \quad (5)$$

donde  $\epsilon_{ij}$  es el tensor de difusividad turbulenta.

#### Análisis unidimensional

Cuando se estudia el campo lejano en un curso de agua (río o canal) con buena mezcla vertical es posible efectuar un análisis unidimensional, es decir, trabajar con magnitudes promediadas sobre cada sección transversal. Reinterpretando los promedios de las Ecs. (2) y (3) en este sentido y suponiendo, por simplicidad, que la densidad del fluido es uniforme también longitudinalmente, la integración de la Ec. (5) sobre una sección transversal conduce a [1]

$$\frac{\partial(\Omega \bar{c})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} (\Omega \bar{u}_1 \bar{c} - \Omega \bar{\epsilon}_{11} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_1} - \Omega \overline{u_1' c'}) = q c_0 \quad (6)$$

donde  $\Omega$  es el área de la sección transversal,  $q$  la descarga lateral y  $c_0$  la concentración de contaminante de esa descarga. Se ha supuesto que  $\epsilon_{11}$  varía poco sobre la sección. El último término del paréntesis de la Ec. (6) es el efecto de la advección diferencial (que es una escala no resuelta a partir de la promediación sobre la sección) y actúa como un

mecanismo adicional de mezcla. A éste también se lo modela en base a una ley de Fick, de modo que la Ec. (6), obviando las barras de promediación, puede reescribirse como

$$\frac{\partial(\Omega c)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\Omega u c - \Omega K_x \frac{\partial c}{\partial x}) = q c_0 \quad (7)$$

donde  $x = x_1$ ,  $u = u_1$  y el coeficiente de dispersión  $K_x$  suele ser expresado como [4]

$$K_x = \bar{\epsilon}_{11} + K_{xz} + K_{xy} \quad (8)$$

siendo  $K_{xz}$  y  $K_{xy}$  los coeficientes que representan el efecto de la advección diferencial vertical y horizontal, respectivamente.

Dado que, en general, la turbulencia dominante es la producida por el fondo del canal, el coeficiente de difusividad turbulenta puede estimarse como

$$\bar{\epsilon}_{11} \approx 0.1 h u_* \quad (9)$$

donde  $h$  es el tirante de agua en la sección (es decir, la mayor profundidad) y  $u_*$  la velocidad de corte media sobre el fondo (asociada a la tensión de corte contra el fondo). El coeficiente de advección diferencial vertical se expresa como

$$K_{xz} = e_v h u_* \quad (10)$$

donde el factor  $e_v$  es muy variable. En un canal ancho y poco profundo vale alrededor de 6, pero en cauces naturales puede alcanzar valores de algunos cientos. Finalmente, el coeficiente de advección diferencial horizontal admite expresiones formalmente análogas a la Ec. (10), pero es el factor dominante en canales naturales y estuarios.

#### Análisis bidimensional

En el caso en que el vertido se efectúa en un curso de agua muy ancho o directamente en el mar, aún es posible efectuar un análisis simplificado si la mezcla en vertical es buena. En este caso puede trabajarse con magnitudes promediadas en la vertical, es decir, se trata de un análisis bidimensional en planta. Si se reinterpreta en este sentido la promediación expresada en las Ecs. (2) y (3) y, nuevamente, se supone que la densidad del fluido es uniforme, la integración vertical de la Ec. (5) provee [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h\bar{c})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} (h \bar{u}_1 \bar{c} - h \bar{\epsilon}_{11} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_1} - h \bar{\epsilon}_{12} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_2} - h \bar{u}_1' \bar{c}') \\ + \frac{\partial}{\partial x_2} (h \bar{u}_2 \bar{c} - h \bar{\epsilon}_{21} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_1} - h \bar{\epsilon}_{22} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_2} - h \bar{u}_2' \bar{c}') = 0 \quad (11) \end{aligned}$$

donde  $h$  es la profundidad local. Los últimos términos de los paréntesis de la Ec. (11) representan el efecto de la advección diferencial vertical en las direcciones  $x_1$  y  $x_2$ , respectivamente. Expresándolos en base a una ley de Fick, y obviando las barras de promediación, se obtiene

$$\frac{\partial(hc)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h u c - h K_{11} \frac{\partial c}{\partial x} - h K_{12} \frac{\partial c}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y} (h v c - h K_{21} \frac{\partial c}{\partial x} - h K_{22} \frac{\partial c}{\partial y}) = 0 \quad (12)$$

donde  $yx_2$ ,  $vy_2$  y el tensor  $K$ , de componentes  $K_{11}$ ,  $K_{12}$ ,  $K_{21}$  y  $K_{22}$ , es el tensor de dispersión.

El tensor de dispersión es simétrico, de modo que puede diagonalizarse. Sus coordenadas principales coinciden con la dirección local de la línea de corriente ( $\zeta$ ) y su normal ( $\eta$ ). Si la línea de corriente forma, localmente, un ángulo  $\theta$  con el eje  $x$ , las componentes del tensor de dispersión pueden escribirse como

$$K_{11} = K_{\zeta} \cos^2 \theta + K_{\eta} \sin^2 \theta \quad (13)$$

$$K_{12} = K_{21} = (K_{\zeta} - K_{\eta}) \sin \theta \cos \theta \quad (14)$$

$$K_{22} = K_{\zeta} \sin^2 \theta + K_{\eta} \cos^2 \theta \quad (15)$$

El coeficiente de dispersión longitudinal se expresa como

$$K_{\zeta} = \bar{\epsilon}_{\zeta\zeta} + K_{\zeta z} \quad (16)$$

donde  $\bar{\epsilon}_{\zeta\zeta}$  puede estimarse como en la Ec. (9) y  $K_{\zeta z}$  como en la Ec. (10). Por su parte, el coeficiente de dispersión transversal solo da cuenta de la mezcla turbulenta  $\bar{\epsilon}_{\eta\eta}$ , cuya estimación es [4]

$$K_{\eta} = \bar{\epsilon}_{\eta\eta} \cong 0.23 h u_* \quad (17)$$

#### RESOLUCION NUMERICA

La dificultad mayor en la resolución numérica de la Ec. (7) o la Ec. (12) radica en que, en general, el proceso de advección es dominante respecto del de difusión (alto número de Peclet), lo cual requiere una juiciosa elección del método numérico para evitar que la difusión numérica proveniente de la discretización de los términos advectivos termine siendo comparable a o, incluso, dominante sobre la difusión física. Como es sabido, este problema de convección - difusión ha sido ampliamente tratado y existe una diversidad de tratamientos posibles. En este trabajo se discuten las experiencias obtenidas con las metodologías utilizadas en el LHA del INCYTH.

#### Problema unidimensional

Si la Ec. (7) se combina con la ecuación de continuidad del fluido se obtiene

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (K_x \frac{\partial c}{\partial x}) + \frac{q}{\Omega} (c_o - c) \quad (18)$$

Para discretizar la Ec. (18) existen, básicamente, dos enfoques distintos. Uno propone la utilización de esquemas centrados espacialmente y mallas de discretización tan finas como sean necesarias

en las regiones de fuertes gradientes de concentración [5]. El otro enfoque propugna el empleo de algún tipo de descentrado ("upwinding") en el término convectivo, lo cual permite la utilización de mallas más gruesas [6].

En el LMA se optó por el primer método, ya que en el caso unidimensional no resulta demasiado oneroso, garantizando una mayor precisión local. La Ec. (18) se discretiza, entonces, mediante diferencias finitas centradas en el espacio. También se utilizan diferencias finitas centradas en el tiempo (método de Crank-Nicolson).

Para establecer claramente el criterio de elección de los pasos de discretización se efectuaron una serie de ensayos sobre un problema tipo. Se trata de la evolución de una "mancha" que, inicialmente, se representa como una concentración uniforme sobre una extensión dada. Se considera una corriente uniforme en el espacio y constante en el tiempo y un coeficiente de dispersión también uniforme. Se supone que no existe un vertido adicional de contaminante ( $q = 0$ ). Este problema tiene una solución analítica, de modo que ésta puede usarse como referente para estudiar la performance del método numérico para diferentes elecciones de los pasos de cálculo.

En estas condiciones, la ecuación en diferencias puede escribirse como

$$\begin{aligned} & -\frac{Cr}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{Pe} \right) c_{i-1}^{n+1} + \left( 1 + \frac{Cr}{Pe} \right) c_i^{n+1} + \frac{Cr}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{Pe} \right) c_{i+1}^{n+1} \\ & = \frac{Cr}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{Pe} \right) c_{i-1}^n + \left( 1 - \frac{Cr}{Pe} \right) c_i^n - \frac{Cr}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{Pe} \right) c_{i+1}^n \quad (19) \end{aligned}$$

donde  $i$  y  $n$  son los índices que identifican los nodos espaciales y temporales, respectivamente, y los números de Courant y de Peclet de malla están definidos como

$$Cr = \frac{u \Delta t}{\Delta x} \quad (20)$$

$$Pe = \frac{u \Delta x}{K_x} \quad (21)$$

siendo  $\Delta t$  y  $\Delta x$  los pasos de cálculo temporal y espacial, respectivamente.

Los bordes del dominio de cálculo deben actuar como contornos transparentes. Para el borde de aguas abajo puede imponerse la condición  $\partial c / \partial x = 0$ , que simula eficazmente aquella propiedad. En el borde de aguas arriba no puede especificarse la misma condición porque esto produce un mal condicionamiento del problema. La condición  $c=0$  no fuerza demasiado la solución si la mancha está, inicialmente, relativamente alejada de este borde.

Desde el punto de vista práctico es deseable poder trabajar con los mayores valores admisibles para los pasos de cálculo. En consecuencia, se efectuaron ensayos con valores relativamente altos de  $Pe$  y  $Cr$ . Se tomaron los siguientes valores numéricos:  $u = 1$  m/s,  $K_x = 100$  m<sup>2</sup>/s, extensión del dominio de cálculo = 100 km, extensión inicial de la mancha  $L_m = 20$  km. En la Fig. 2 se muestran tres resultados típicos correspondientes a distintos juegos de parámetros. Las oscilaciones son el resultado de la dispersión numérica introducida por el esquema de cálculo.

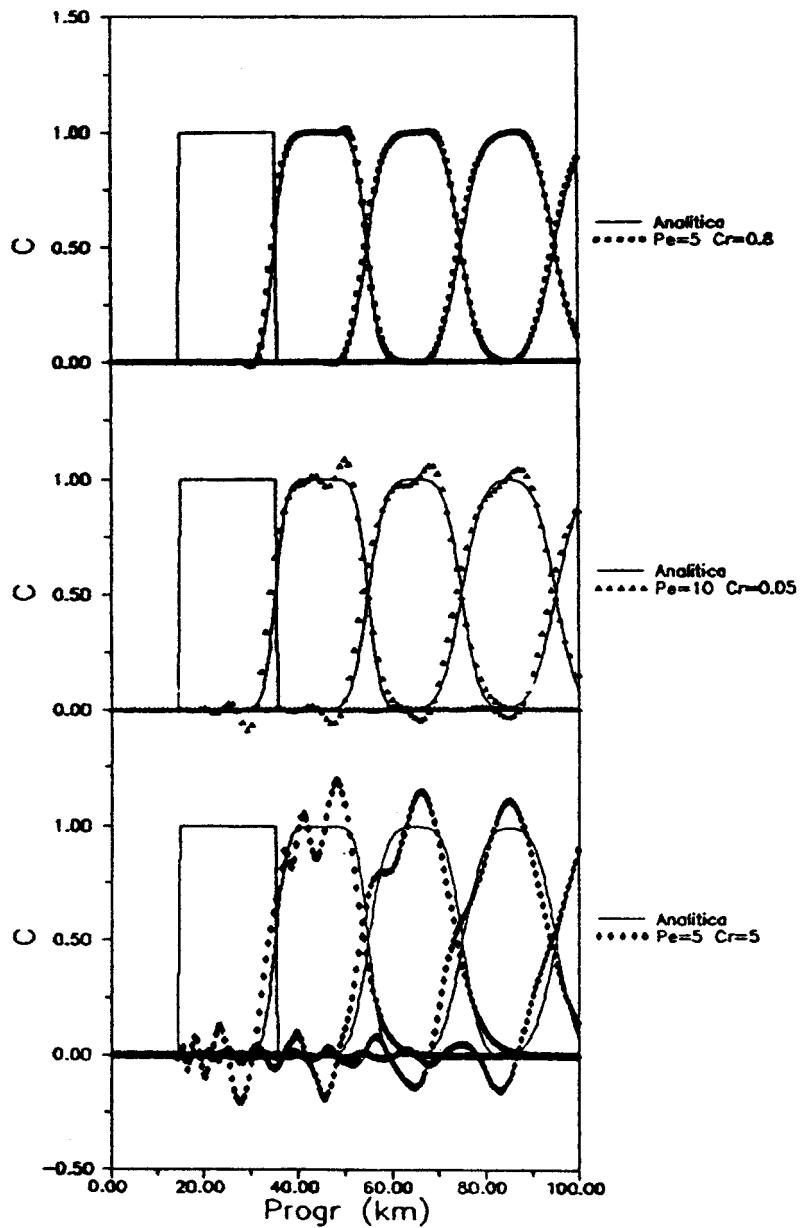


Figura 2. Transporte de una mancha utilizando el esquema numérico de Crank Nicolson.



Para cada ensayo se comparó la solución numérica con la analítica luego de un intervalo de tiempo  $t = u L_m = 20000$  seg. La performance de la solución numérica se clasificó en tres categorías, de acuerdo al exceso en el valor de la concentración pico por sobre el valor exacto:

- i) "Buena" : exceso < 5 %
- ii) "Regular" : 5 % ≤ exceso < 10 %
- iii) "Mala" : exceso ≥ 10 %

Los resultados mostrados en la Fig. 2 ilustran cada una de las categorías definidas. La síntesis de resultados se presenta en la Fig. 3, donde, sobre el plano Cr-Pe, se esquematizan las zonas correspondientes a cada categoría. Este gráfico puede utilizarse como guía para problemas más generales, si se utilizan los valores locales de los números de Courant y Peclet.

A título de ejemplo, se efectuó en forma simplificada la simulación del transporte de un vertido sobre el Río Reconquista (Pcia. de Buenos Aires), que es un importante curso de agua que adolece de graves problemas de contaminación. En base a la información hidrométrica disponible, se tomó una velocidad de corriente  $u = 50$  cm/s, un tirante  $h = 1,5$  m y una velocidad de corte  $u_* = 2,5$  cm/s. Ante la ausencia de determinaciones de dispersión con trazadores, se eligió un valor para el coeficiente de dispersión  $K_x = 1$  m<sup>2</sup>/s. Se supuso una descarga de 10 litros/s (el caudal del Río Reconquista es del orden de los 10 m<sup>3</sup>/s en condiciones normales) durante 15 minutos. A la concentración del vertido se le asignó el valor 100. Se tomaron pasos de cálculo  $\Delta x = 100$  m y  $\Delta t = 2,5$  minutos, que corresponden a  $Pe = 5$  y  $Cr = 0,75$ . En la Fig. 4 se muestran los perfiles longitudinales de la concentración para varios instantes de tiempo, medidos desde el inicio de la descarga, la cual se efectúa en la progresiva km 0,5. Se observa que el pico de concentración es inferior al 0,05 % de la concentración del vertido para los instantes considerados. Sin embargo, ésto es el producto, básicamente, de la dilución inicial, ya que el decaimiento por dispersión es relativamente lento.

#### Problema bidimensional

La Ec. (12), combinada con la ecuación de continuidad del fluido, puede transformarse en

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left( h K_{11} \frac{\partial c}{\partial x} + h K_{12} \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial y} \left( h K_{21} \frac{\partial c}{\partial x} + h K_{22} \frac{\partial c}{\partial y} \right) \quad (22)$$

La metodología de cálculo utilizada para resolver el problema unidimensional no resulta ahora adecuada, por razones prácticas, para resolver numéricamente la Ec. (22). En efecto, el crecimiento en volumen de cálculo que importa la elección de mallas demasiado finas lo torna, en general, impracticable. Una de las alternativas consiste, tal cual se comentó anteriormente, en introducir esquemas descentrados espacialmente ("upwinding") [6]. Otro de los métodos propuestos utiliza una técnica de desdoblamiento ("splitting"), resolviendo en forma separada la advección y la difusión y utilizando, para cada una de ellas, el esquema numérico más apto [7]. Una tercera alternativa, especialmente adecuada para problemas de vertidos, es parametrizar la solución en base a soluciones elementales localmente exactas [7]. Este último procedimiento ha sido el adoptado por el LHA, de modo que se

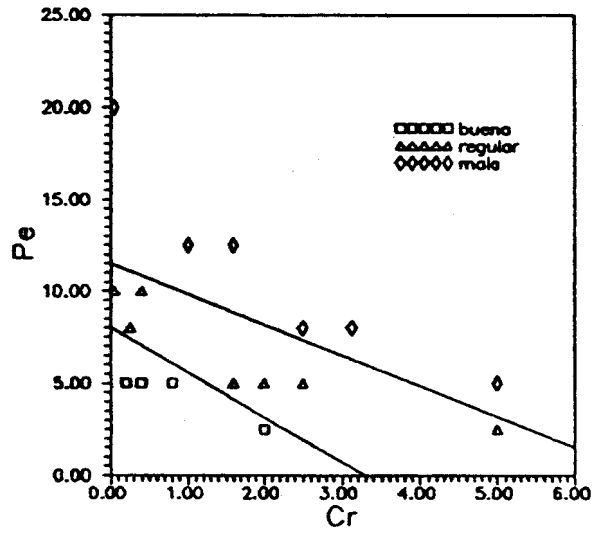


Figura 3. Performance de la solución numérica de acuerdo a los valores de los parámetros numéricos

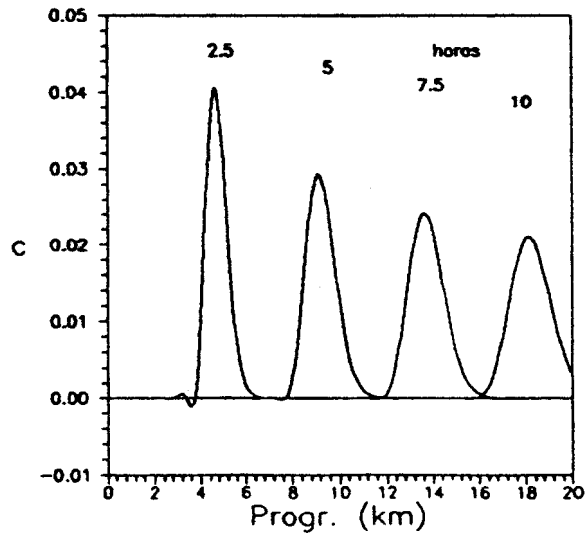


Figura 4. Dispersión de un vertido sobre el Río Reconquista.

procederá a describirlo en algún detalle.

En el caso especial en que  $h$  y  $K$  son constantes, la Ec. (22) admite la solución particular

$$c(x, y, t) = \frac{M \sqrt{D}}{\pi h} \exp \{ -[a_{11}(x-x_0)^2 + 2a_{12}(x-x_0)(y-y_0) + a_{22}(y-y_0)^2] \} \quad (23)$$

donde  $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ . La Ec. (23) puede interpretarse como la "mancha" resultante de la inyección instantánea de una masa  $M$  de contaminante, que adquiere una forma gaussiana. Las coordenadas  $x_0$  e  $y_0$  identifican la posición del centro de la mancha. Los parámetros de forma  $a_{11}$ ,  $a_{12}$  y  $a_{22}$  determinan la orientación y extensión de la mancha. Las ecuaciones de evolución para los parámetros de la mancha resultan ser las siguientes:

$$\frac{dx_0}{dt} = u(x_0, y_0, t) \quad (24)$$

$$\frac{dy_0}{dt} = v(x_0, y_0, t) \quad (25)$$

$$\frac{da_{11}}{dt} = -2\left(\frac{\partial u}{\partial x} a_{11} + \frac{\partial v}{\partial x} a_{12}\right) - 4K_{11}a_{11}^2 - 8K_{12}a_{11}a_{12} - 4K_{22}a_{12}^2 \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{da_{12}}{dt} = & - \left[ \frac{\partial u}{\partial y} a_{11} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) a_{12} + \frac{\partial v}{\partial x} a_{22} \right] \\ & - 4K_{11}a_{11}a_{12} - 4K_{12}(a_{11}a_{22} + a_{12}^2) - 4K_{22}a_{12}a_{22} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\frac{da_{22}}{dt} = -2\left(\frac{\partial u}{\partial y} a_{12} + \frac{\partial v}{\partial y} a_{22}\right) - 4K_{11}a_{12}^2 - 8K_{12}a_{12}a_{22} - 4K_{22}a_{22}^2 \quad (28)$$

Resolver las Ecs. (24) y (25) significa integrar a lo largo de las líneas de corriente. Estas pueden construirse a partir del campo de velocidades, generalmente discretizado, que forma parte de los datos de entrada del problema. Esto no presenta ninguna dificultad básica, pero requiere una programación laboriosa si es genuinamente bidimensional. En efecto, dado que las líneas de corriente atraviesan en forma arbitraria las celdas de discretización del campo de velocidades, es necesario distinguir todas las alternativas posibles. Una vez conocido el segmento de línea de corriente cubierto en el intervalo de tiempo de discretización, las integraciones de las Ecs. (26) a (28) puede llevarse a cabo por cualquier método de integración de ecuaciones diferenciales ordinarias. En el LHA se utilizó un método de Runge-Kutta de orden 4 [8,9].

El método puede aplicarse aún si  $h$  y  $K$  no son constantes, como sucede en los problemas prácticos, siempre que sus variaciones sean suaves sobre distancias del orden de la extensión de la mancha (es decir, del orden de sus desviaciones estándar), lo cual no constituye una restricción fuerte.

Si el contaminante inyectado tiene algún tipo de decaimiento, debido a alguna reacción físico-química, puede plantearse, simplemente, una

ecuación adicional para la evolución de la masa de contaminante  $M$ . Si la reacción es de primer orden la ecuación es [1]

$$\frac{dM}{dt} = - \frac{M}{T_d} \quad (29)$$

donde  $T_d$  es la constante de tiempo de decaimiento.

En la práctica, el vertido de contaminante se produce en forma continua. En el marco de la metodología de cálculo propuesta, ésto se simula generando una sucesión de pulsos de masa  $M = Q c_0 \Delta t$ , donde  $Q$  es la descarga líquida del vertido,  $c_0$  la concentración de contaminante antes del vertido y  $\Delta t$  el paso de tiempo entre pulsos. La concentración de contaminante en un punto se obtiene como la superposición de las contribuciones de cada mancha. Este procedimiento requiere llevar cuenta de cada mancha, incorporando una nueva por paso de tiempo en el punto de ubicación del vertido. Dado que ésto incrementa linealmente el volumen de cálculo, es necesario, periódicamente, efectuar un descarte de las manchas cuya contribución ha caído por debajo de un cierto valor umbral.

Dada la diversidad de escalas de tiempo presentes en el problema (advectiva, difusiva, de decaimiento) y su posible variación durante el desplazamiento de cada mancha, es conveniente automatizar la elección del paso temporal de cálculo, de modo de que éste, en todo momento, sea pequeño respecto de la escala de tiempos dominante.

En la Fig. 5 se muestra la comparación entre resultados analíticos y numéricos para la evolución de los parámetros de forma de una mancha que se traslada en un campo de velocidades estacionario, unidireccional y uniforme en la dirección longitudinal. El acuerdo es excelente. Los resultados de un ensayo numérico, correspondiente al vertido continuo de un contaminante en una corriente oscilatoria cuando se estableció un régimen periódico, se muestran en la Fig. 6. Se observa el crecimiento y decrecimiento del penacho de contaminación (líneas de isoconcentración) hacia ambos lados del punto de vertido.

El procedimiento de cálculo descrito ha sido implementado en el sistema computacional MANCHAS [8] y utilizado en el estudio del impacto del vertido de los residuos cloacales de la Ciudad de Buenos Aires en el Río de la Plata a través de un emisario submarino que descarga a 2,5 km de la costa, cerca de Berazategui. El estudio se efectuó por contrato con la empresa Obras Sanitarias de la Nación y contó con la colaboración de técnicos del Centro de Experimentación del Ministerio de Obras Públicas (CEDEX) de España. La zona de estudio, de alrededor de 10 x 20 km, se muestra en la Fig. 7. Se efectuaron tres campañas de mediciones hidrográficas, cuyos resultados se utilizaron para calibrar un modelo matemático hidrodinámico basado en el sistema computacional HIDROBID II [10]. La Fig. 8 presenta el campo de velocidades calculado para un instante del ciclo de mareas correspondiente a una marea media. El paso de cálculo espacial es de 250 m y el temporal se tomó de 10 minutos.

Para calibrar el modelo de dispersión se efectuaron seguimientos de trazadores radioactivos, campaña en la cual se contó con la colaboración de la Comisión Nacional de Energía Atómica. Se ajustó el coeficiente de dispersión longitudinal hasta obtener un buen acuerdo entre la extensión de las manchas medidas y calculadas, tal como se muestra en la Fig. 9 (Se eligió  $e_\nu = 20$ ).

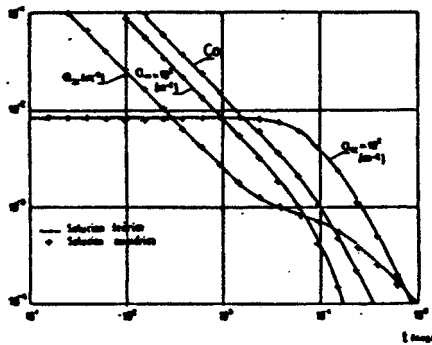


Figura 5. Evolución de los parámetros de forma de una mancha gaussiana.

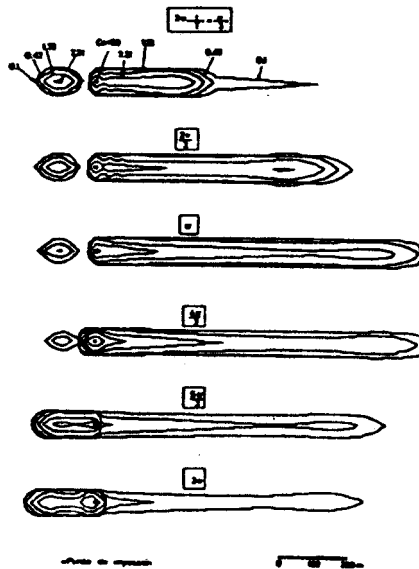


Figura 6. Vertido continuo de una contaminante en una corriente oscilatoria.

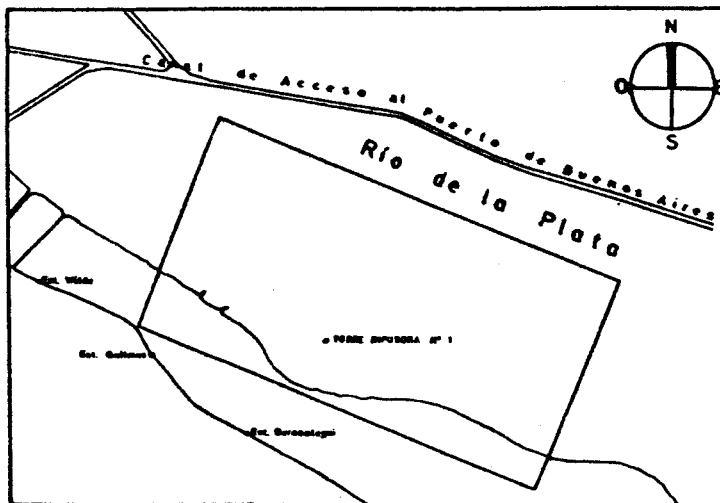


Figura 7. Zona de vertido de los residuos cloacales de la ciudad de Buenos Aires.

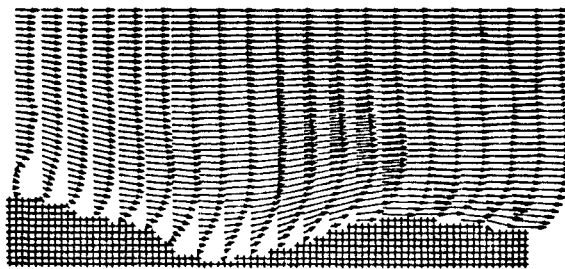


Figura 8. Campo de velocidades instantáneo en bajante.

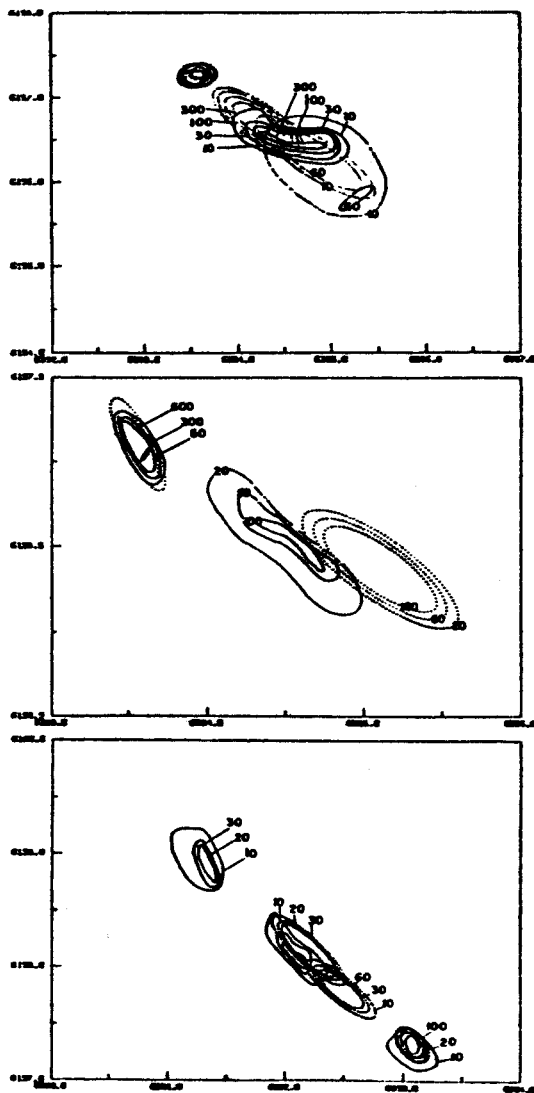


Figura 9. Comparación entre manchas de trazadores radioactivos y manchas calculadas.

Se incorporó el efecto de las corrientes de deriva en superficie generadas por la acción del viento. Se efectuaron diversos ensayos numéricos sobre escenarios contruídos combinando distintas condiciones de marea y de viento (Figs. 11 y 12). Se analizó el impacto contaminante sobre la toma de agua de Bernal y la costa quilmeña. Se concluyó que el viento es el mecanismo determinante del nivel de contaminación en las zonas estudiadas. Se cuantificó la dilución en función de la dirección e intensidad del viento, asociándole probabilidades de ocurrencia. También se ensayó el efecto de extender el punto de vertido 5 km río adentro, llegándose a la conclusión de que la mejora no justificaría la inversión requerida. En consecuencia, la mejora de la calidad del agua deberá encararse a través de algún tratamiento del líquido previo a su descarga.

#### CONCLUSIONES

Una simulación confiable requiere de la elección adecuada del método numérico y los pasos de cálculo. Ambos aspectos han sido cuidadosamente considerados en el LHA para el desarrollo de sus programas computacionales de simulación de la dispersión de contaminantes. Para el problema unidimensional se considera efectivo utilizar un esquema centrado espacial y temporalmente, ajustando la elección de los pasos de cálculo de acuerdo al diagrama presentado en la Fig. 3. Para el problema bidimensional, en cambio, resulta altamente conveniente la combinación de una representación paramétrica de la solución numérica y una técnica de desdoblamiento.

El LHA ha llevado a cabo un estudio de dispersión de los residuos urbanos de la ciudad de Buenos Aires en el Río de la Plata, que ha puesto en evidencia la utilidad de este tipo de simulaciones para la toma de decisiones relativa a obras de saneamiento.

#### Referencias

1. Gray, W.G. (editor), "Physics-Based Modeling of Lakes, Reservoirs and Impoundments", Report of the ASCE, New York, 1986.
2. Kays, W.M., Crawford, M.E., "Convective Heat and Mass Transfer", McGraw-Hill, 1980.
3. Fischer, H.B., "Longitudinal dispersion and turbulent mixing in open-channel flow", Annual Review of Fluid Mechanics, 1973, págs. 59-78.
4. Fischer, H.B., "The mechanics of dispersion in natural streams", J. Hydr. Div., ASCE, vol. 93, HY6, November, 1967, págs. 187-216.
5. Gresho, P.M., "Don't suppress the wiggles - They're telling you something!", Finite Element Methods for Convection Dominated Flows, Ed. T.J.R. Hughes, AND vol. 34, ASME (New York), 1979, págs. 37-61.
6. Heinrich, J.C., Zienkiewicz, O.C., "The Finite Element Method and 'Upwinding' Techniques in the Numerical Solution of Convection Dominated Flow Problems", Finite Element Methods for Convection Dominated Flows, Ed. T.J.R. Hughes, AND vol. 34, ASME (New York), 1979, págs. 105-136.
7. Holly, F.M. (Jr.), Usseglio-Polatera, J.-M., "Dispersion simulation in two-dimensional tidal flow", J. Hydr. Eng., ASCE, vol. 110, 7, July, 1984, págs. 905-926.
8. Menéndez, A.N., "Simulación numérica de la dispersión de contaminantes en regiones localizadas", Informe LHA-INCYTH 066-01-86, diciembre de 1986.
9. Carreras, P.E., Menéndez, A.N., "Mathematical simulation of pollutant dispersion", J. Ecological Modelling, 52, 1990, págs 29-40.
10. Menéndez, A.N., "Sistema HIDROBID II para simular corrientes en cuencos", Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería, vol. 6, 1, 1990, págs. 25-36.



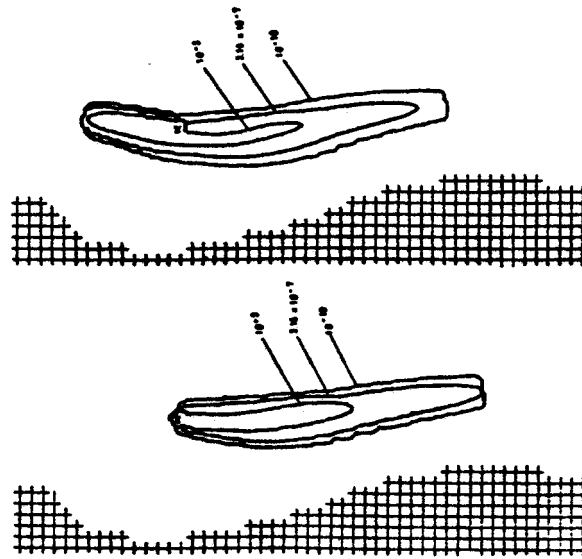


Figura 10. Penachos de contaminación producidos por la marea en creciente y bajante.

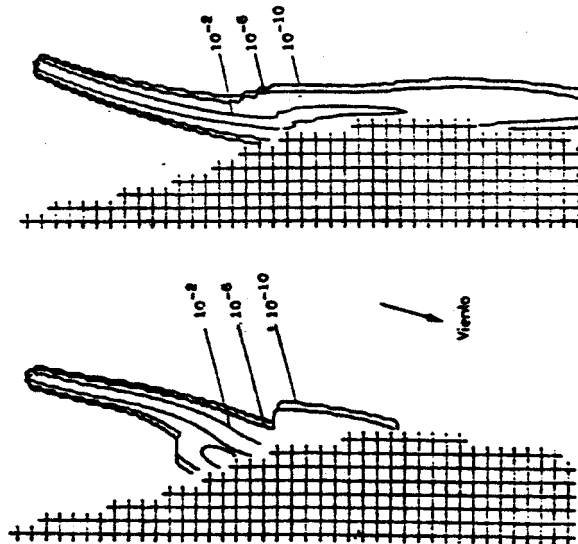


Figura 11. Penachos de contaminación influenciados por vientos del NO.

