ANALISIS NUMERICO DE UNA ECUACION DE TIPO STOKES

Domingo A. Tarzia

Dpto. Matemática, FCE, Univ. Austral

Moreno 1056, (2000) *Rosario, Argentina.*

PROMAR (CONICET-UNR), Inst. Matemática "B. Levi"

Avda. Pellegrini 250, (2000) *Rosario, Argentina.*

RESUMEN

Se considera un problema de tipo Stokes con funciones incógnitas $u=(u_1, u_2, u_3)$ y p, definidas en Ω, de manera que satisfagan las siguientes condiciones:

$$(P)\quad \begin{cases} -\nu\,\Delta u + \nabla p + w \wedge u = f & \text{en } \Omega, \\ \operatorname{div}(u) = 0 \quad \text{en } \Omega, & u|_{\Gamma} = 0, \end{cases}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un dominio acotado y convexo con frontera Γ regular, $\nu > 0$, $f = (f_1, f_2, f_3)$ y $w = (w_1, w_2, w_3)$ son funciones que están definidas en Ω.

Se describe un algoritmo iterativo u_n, p_n ($n \in \mathbb{N}$) que converge a la solución u, p a través de la formulación variacional de (P) correspondiente a la función incógnita u. Se obtiene además la formulación variacional mixta.

ABSTRACT

We consider a Stokes-like problem with unknown functions $u = (u_1, u_2, u_3)$ and p, defined in Ω, such that they satisfy the following conditions:

$$(P)\quad \begin{cases} -\nu\,\Delta u + \nabla p + w \wedge u = f & \text{en } \Omega, \\ \operatorname{div}(u) = 0 \quad \text{en } \Omega, & u|_{\Gamma} = 0, \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ is a bounded and convex domain with a regular boundary Γ, $\nu>0$, $f = (f_1, f_2, f_3)$ and $w = (w_1, w_2, w_3)$ are functions defined in Ω.

We describe an iterative algorithm u_n, p_n ($n \in \mathbb{N}$) that it is convergent to the solution u, p through the variational formulation corresponding to the unknown function u. We also obtain the mixed variational formulation.

I. INTRODUCCION

Se considera un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ acotado y convexo con frontera Γ regular. Dadas las funciones $f = (f_1, f_2, f_3) \in V_1 = H^3$ con $H = L^2(\Omega)$ y $w = (w_1, w_2, w_3) \in W^3$ con $W = L^\infty(\Omega)$ y la constante positiva $\nu > 0$ se quiere hallar las funciones $u = (u_1, u_2, u_3)$ y p, definidas en Ω, de manera que satifagan las condiciones de un problema de tipo Stokes, es decir [Ta1] :

$$(P) \quad \left| \begin{array}{ll} -\nu \Delta u + \nabla p + w \wedge u = f & \text{en } \Omega , \\ \\ \operatorname{div}(u) = 0 \quad \text{en } \Omega , & u|_\Gamma = 0 , \end{array} \right.$$

donde $\wedge$ representa el producto vectorial de vectores en $\mathbb{R}^3$ y div es el operador divergencia.

Si $w = 0$, (P) es el problema clásico de Stokes que describe el movimiento de un fluido incompresible viscoso en el dominio Ω y sometido a una densidad de fuerzas exteriores f bajo la hipótesis de que dicho movimiento es lento. En este caso, u es la velocidad del fluido, p es la presión y ν es la viscosidad.

En el presente trabajo se obtienen los siguientes resultados:

(i) Existencia y unicidad de la formulación variacional del problema (P), correspondiente a la función incógnita u. Obtención de la presión p, a partir de dicha formulación variacional.

(ii) Descripción de un algoritmo iterativo u_n, p_n ($n \in \mathbb{N}$) que converge fuertemente a la solución u , p.

(iii) Obtención de la formulación variacional mixta del problema (P).

II. FORMULACION VARIACIONAL DEL PROBLEMA (P).

Se consideran los siguientes espacios funcionales y notaciones:

$$(1) \quad \left| \begin{array}{l} H^1(\Omega) = \left\{ v \in H \;/\; v_{x_i} = \dfrac{\partial v}{\partial x_i} \in H ,\ \forall\, i = 1,2,3 \right\} , \\ \\ H_0^1(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) \;/\; v_{|_\Gamma} = 0 \right\} , \qquad H = L^2(\Omega) , \\ \\ (u, v) = (u, v)_H = \displaystyle\int_\Omega u\, v\, dx , \qquad |v| = |v|_H = (v, v)_H^{1/2} . \\ \\ |v|_1 = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{3} |v_{x_i}|^2 \right)^{1/2} , \qquad \|v\|_1 = \left(|v|^2 + |v|_1^2 \right)^{1/2} , \\ \\ V_1 = H^3, \quad V_2 = (H^1(\Omega))^3 , \quad V = (H_0^1(\Omega))^3 . \end{array} \right.$$

Sobre el espacio $H_0^1(\Omega)$, $|\cdot|_1$ y $\|\cdot\|_1$ son dos normas equivalentes, es decir existe una constante positiva $C = C(\Omega) > 0$ de manera que (desigualdad de Poincaré):

$$(2) \qquad |v|_1 \leq \|v\|_1 \leq C\, |v|_1 , \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

Los espacios V_1 y V_2 son espacios de Hilbert con los productos escalares y normas siguientes:

$$
(3) \quad \left| \begin{array}{l} (\vec{u},\vec{v})_{V_1} = \sum_{i=1}^{3} (u_i, v_i)_H \quad , \quad |\vec{v}|_{V_1} = (\vec{v},\vec{v})^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{3} |v_i|^2 \right)^{1/2} , \\ \\ (\vec{u},\vec{v})_{V_2} = \sum_{i=1}^{3} (u_i, v_i)_{H^1(\Omega)} \quad , \quad \|\vec{v}\|_1 = \|\vec{v}\|_{V_2} = (\vec{v},\vec{v})_{V_2} = \left(\sum_{i=1}^{3} \|v_i\|_1^2 \right)^{1/2} , \end{array} \right.
$$

donde $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Sobre el espacio V_2 se tiene la siguiente semi-norma:

$$
(4) \qquad |\vec{v}|_1 = \left(\sum_{i=1}^{3} |v_i|_1^2 \right)^{1/2} \quad , \quad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \ ,
$$

que sobre V resulta ser equivalente a $\|\cdot\|_{V_2}$, es decir:

$$
(5) \qquad \exists\, c > 0 \ / \ |\vec{v}|_1 \leq \|\vec{v}\|_1 = \left(|\vec{v}|_1^2 + |\vec{v}|_{V_1}^2 \right)^{1/2} \leq C \ |\vec{v}|_1 \ , \ \forall \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in V.
$$

NOTA.— Por conveniencia en la notación se evitará colocar la flecha para los vectores, excepto en los casos en que pueda haber confusión.

A continuación se hallará la ecuación variacional, correspondiente a la función incógnita u .

TEOREMA 1.— Si u,p es la solución del problema (P) entonces u es solución de la siguiente ecuación variacional:

$$
(6) \qquad a(u, v) = L(v) \ , \ \forall\, v \in K \ , \ u \in K
$$

donde

$$
(7) \quad \left| \begin{array}{l} K = \{ v \in V \ / \ \mathrm{div}(v) = 0 \text{ en } \Omega \} \text{ convexo cerrado de } V, \\ \\ a(u, v) = a_1(u, v) + a_2(u, v) \ , \ L(v) = \int_\Omega f \cdot v \, dx \ , \\ \\ a_1(u, v) = \nu \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx \ , \ a_2(u, v) = \int_\Omega w \cdot (u \wedge v) \, dx \ . \end{array} \right.
$$

Demostración.— Si se multiplica escalarmente la ecuación diferencial de (P) por el vector $v \in K$, se integra en el dominio Ω, se utilizan los siguientes resultados:

$$
(8) \qquad \int_\Omega \nabla p \cdot v \, dx = - \int_\Omega p \, \mathrm{div}(v) \, dx = 0 \ , \ \forall\, v \in K \ ,
$$

$$
(9) \qquad \int_\Omega \Delta u \cdot v \, dx = - \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx = - \frac{1}{\nu} a_1(u, v) \ , \ \forall\, v \in K \ ,
$$

se deduce la ecuación variacional (6).

Observación 1.– L es una forma lineal sobre V, a_1 es una forma bilineal y simétrica sobre V x V, a_2 es una forma bilineal y antisimétrica sobre V x V y $a = a_1 + a_2$ es una forma bilineal pero no simétrica sobre V x V.

TEOREMA 2.– Si $f \in V_1$ y $w \in W^3$, entonces la ecuación variacional (6) tiene una única solución $u \in K$.

Demostración .– Si $f \in V_1$ entonces la forma lineal L es continua sobre V; si $w \in W^3$ entonces a_1 y a_2 son dos formas bilineales continuas sobre V x V y además la forma bilineal a es V–elíptica o coercitiva sobre V, es decir

$$a(\vec{v}, \vec{v}) \geq \frac{\nu}{c^2} \|\vec{v}\|_2^2 \quad , \quad \forall \vec{v} \in V , \tag{10}$$

donde $c > 0$ es la constante que aparece en la desigualdad (5). Por ende, la existencia y unicidad de solución de la ecuación variacional (6) se deduce por aplicación del Teorema de Lions-Stampacchia [KiSt, St, Li,Ta2].

Observación 2.– En lo concerniente a la regularidad de la solución u se supondrá que se tiene el siguiente resultado de regularidad [Ci, Gl, Te] :

$$f \in V_1 \Rightarrow u \in K \bigcap (H^2(\Omega))^3 . \tag{11}$$

A continuación se va a obtener la presión p a partir de la ecuación variacional (6). Sea el funcional lineal y continuo $S : V \to \mathbb{R}$ definido de la siguiente manera:

$$S(v) = a(u, v) - L(v) \quad , \quad \forall v \in V \quad , \tag{12}$$

donde L y a están definidos en (7) y $u \in K$ es la única solución de (6). Por otra parte, S tiene la propiedad siguiente

$$S(v) = 0 \quad , \quad \forall v \in K \subset V , \tag{13}$$

y además puede escribirse como

$$S(v) = (g, v)_{V_1} \quad , \quad \forall v \in V , \tag{14}$$

donde $g = -\nu \Delta u + w \wedge u - f$.

Teniendo en cuenta la descomposición del espacio V_1 [Te, La] se deduce que existe $p \in H^1(\Omega)$ (único excepto constante aditiva) de manera que se tenga:

$$S(v) = \int_\Omega p \ \operatorname{div}(v) \, dx \quad , \quad \forall v \in V \text{ con } g = -\nabla p \quad , \tag{15}$$

obteniéndose de esta manera la propiedad siguiente:

LEMA 1.– La presión p puede obtenerse a través de la solución u de la ecuación variacional (6) y es única excepto una constante aditiva.

III. UN ALGORITMO DE APROXIMACION DE LA DUPLA (u, p)

La descripción de lo que sigue es válida cuando la dimensión del espacio $\mathbb{R}^N$ es $N = 2, 3$.

Algoritmo: Se define una aproximación u_n, p_n ($n \in \mathbb{N}$) de la dupla u, p de la siguiente manera:

(i) Se da $p_0 \in H^1(\Omega)$;

(ii) Si se conoce $p_n \in H^1(\Omega)$ ($n \geq 0$) se calculan:

(a) u_n como la única solución del problema

$$(16) \qquad -\nu\, \Delta u_n + w \wedge u_n = f - \nabla p_n \quad \text{en } \Omega, \qquad u_n/\Gamma = 0;$$

(b) p_{n+1} se define, en función de p_n y de u_n, de la siguiente manera:

$$(17) \qquad p_{n+1} = p_n - \rho \operatorname{div}(u_n) \quad \text{en } \Omega,$$

donde $\rho \in \mathbb{R}$ es un adecuado parámetro a ser elegido adecuadamente.

Observación 3.— Dado p_n, la existencia y unicidad de la solución u_n del problema (16) surge en forma análoga a la realizada para la ecuación variacional (6) del problema (P).

TEOREMA 4.— Si el parámetro $\rho \in \mathbb{R}^+$ es elegido suficientemente pequeño para que satisfaga la desigualdad

$$(18) \qquad 0 < \rho < \frac{2\nu}{N} \quad (N = 2, 3)$$

entonces u_n, p_n convergen fuertemente hacia la solución u, p del problema (P) en $(H^1(\Omega))^N$ y $(L^2(\Omega))^N$ respectivamente. La convergencia de p_n hacia p es excepto una constante aditiva.

Demostración.— Sean $v_n = u_n - u$ y $q_n = p_n - p$. Restando las ecuaciones diferenciales satisfechas por u, p y u_n, p_n, y teniendo en cuenta que $\operatorname{div}(u) = 0$ en Ω, se obtiene

$$(19) \qquad \left| \begin{array}{l} \text{(i)} \; -\nu\, \Delta v_n + w \wedge v_n + \nabla q_n = 0 \quad \text{en } \Omega, \\ \text{(ii)} \; q_{n+1} = q_n - \rho \operatorname{div}(v_n) \quad \text{en } \Omega. \end{array} \right.$$

De (19 ii) se deduce

$$(20) \qquad |q_n|^2 - |q_{n+1}|^2 = 2\rho\, (q_n, \operatorname{div}(v_n)) - \rho^2 |\operatorname{div}(v_n)|^2.$$

Por otro lado, se tiene

$$(21) \qquad (q_n\,,\,\mathrm{div}(v_n))_H = \int_\Omega q_n\,\mathrm{div}(v_n)\,dx = -\int_\Omega \nabla q_n \bullet v_n\,dx = -(\nabla q_n\,,\,v_n)_{V_1}\,.$$

Si se multiplica escalarmente por v_n la ecuación (19i), se tiene en cuenta que $(w \wedge v_n)\bullet v_n = 0$, se integra en Ω, entonces se deduce

$$(22) \qquad (\nabla q_n\,,\,v_n)_{V_1} = -\nu\,|v_n|_1^2\ .$$

Utilizando (21) y (22) en (20), y la desigualdad

$$(23) \qquad |\mathrm{div}(v)| \le \sqrt{N}\ |v|_{V_1}\quad ,\quad \forall\ v \in (H_0^1(\Omega))^N\,,$$

siendo N la dimensión del espacio $\mathbb{R}^N$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^N)$, se obtiene

$$(24) \qquad |q_n|^2 - |q_{n+1}|^2 = \rho\,(2\,\nu\,|v_n|_1^2 - \rho\,|\mathrm{div}(v_n)|^2\,) \ge \rho\,(2\,\nu - \rho\,N)\,|v_n|_{V_1} \ge 0\,,$$

al verificar ρ la desigualdad (18). Por lo tanto, la sucesión ($|q_n|^2$) es decreciente y acotada inferiormente por 0, con lo cual existe su límite cuando $n \to \infty$. Entonces, se deduce

$$(25) \qquad \lim_{n\to\infty}\,[\,|q_n|^2 - |q_{n+1}|^2] = 0\quad ,$$

y por ende, de (24) surge que

$$(26) \qquad \lim_{n\to\infty}\,|v_n|_{V_1} = 0\quad ,$$

con lo cual $u_n \to u$ en $(H_0^1(\Omega))^N$ fuerte cuando $n \to \infty$. Teniendo en cuenta el resultado de regularidad (11) se deduce además que $\Delta u_n \to \Delta u$ y $w \wedge u_n \to w \wedge u$ en $(L^2(\Omega))^N$ fuerte cuando $n \to \infty$.

Teniendo en cuenta (19i) se obtiene que $\nabla p_n \to \nabla p$ en $(L^2(\Omega))^N$ fuerte cuando $n \to \infty$.

IV. EL CASO PARTICULAR N = 2

Para el caso particular en que la dimensión del espacio es N = 2, se tienen que

$$(27) \qquad \left|\begin{array}{l} u = (u_1, u_2, 0)\quad ,\quad w = (0, 0, w)\quad ,\quad f = (f_1, f_2, 0) \\ u_i = u_i(x, y)\quad ,\ f_i = f_i(x, y)\quad \forall\ i = 1, 2\quad ,\quad w = w(x, y)\,,\quad p = p(x, y)\,. \end{array}\right.$$

La condición $\mathrm{div}(u) = 0$ en $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ implica la existencia de una función escalar ψ de manera que $u = \mathrm{rotor}(0, 0, \psi) = \nabla \wedge (0, 0, \psi)$, es decir

$$(28) \qquad u_1 = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \psi_y\quad ,\quad u_2 = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = \psi_x\ .$$

Por otro lado, si se designa con $n = (n_1, n_2)$ y $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ los versores normal y tangente a Γ ($\tau_1 = -n_2$, $\tau_2 = n_2$) y utilizando el hecho $u_{|\Gamma} = 0$, se deduce

$$\text{(29)} \qquad \frac{\partial \psi}{\partial n} = \psi_x n_1 + \psi_y n_2 = -u_2 \tau_2 - u_1 \tau_1 = -u \bullet \tau = 0 \text{ sobre } \Gamma,$$

$$\text{(30)} \qquad \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \psi_x \tau_1 + \psi_y \tau_2 = u_2 n_2 + u_1 n_1 = u \bullet n = 0 \text{ sobre } \Gamma,$$

es decir

$$\text{(31)} \qquad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad , \quad \psi = 0 \quad \text{en } \Gamma ,$$

debido a que la nueva función incógnita ψ estará determinada salvo una constante al ser ψ, por (30), constante sobre Γ.

Si se calcula el rotor de la ecuación diferencial del problema (P) se deduce para ψ la ecuación de cuarto orden siguiente :

$$\text{(32)} \qquad \nu \, \Delta^2 \psi + \frac{\partial(w, \psi)}{\partial(x, y)} = F \quad \text{en } \Omega ,$$

donde

$$\text{(33)} \qquad F = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial(w, \psi)}{\partial(x, y)} = w_x \psi_y - w_y \psi_x .$$

<u>LEMA</u> <u>5</u>.– Si $N = 2$, entonces el problema (P) se reduce en encontrar la función escalar $\psi = \psi(x, y)$ solución del problema (32), (31) .

<u>Observación</u> <u>4</u>.– Si w es constante en Ω, entonces la función ψ satisface el problema bi – armónico siguiente

$$\text{(34)} \qquad \begin{aligned} &\Delta^2 \psi = \frac{1}{\nu} F \quad \text{en } \Omega , \\ &\psi = \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma , \end{aligned}$$

sobre el cual se puede consultar [Gl, GlPi] .

V. FORMULACION VARIACIONAL MIXTA DEL PROBLEMA

Sean la siguiente aplicación:

$$\text{(35)} \qquad b: V \times H \longrightarrow \mathbb{R} \; / \; b(v, \mu) = \int_\Omega \operatorname{div}(v) \, \mu \, dx ,$$

y el siguiente problema variacional mixto [Ci] : Hallar $(u, \lambda) \in V \times H$ de manera que se satisfagan las dos condiciones siguientes:

$$(36) \qquad \left| \begin{array}{l} a(u, v) + b(v, \lambda) = L(v) \ , \ \forall\, v \in V \ , \\ b(u, \mu) = 0 \ , \ \forall\, \mu \in H \ , \end{array} \right.$$

donde a y L están definidos en (7).

Entonces se tiene el siguiente resultado que relaciona el problema variacional (6) con el problema mixto (36).

TEOREMA 6.— (i) Se tiene la siguiente equivalencia:

$$v \in K \ \Leftrightarrow \ b(v, \mu) = 0 \ , \ \forall\, \mu \in H.$$

(ii) Si $(u, \lambda) \in V \times H$ es solución de (36) , entonces u es solución de (6).

(iii) Si $u \in K$ es solución de (6) , entonces u puede ser considerado como la primera componente de una dupla (u, λ) que es solución de (36).

(iv) Se tiene la siguiente equivalencia:

$$u, p \text{ es solución de (P)} \ \Leftrightarrow \ (u, -p) \text{ es solución de (36)} \ .$$

Demostración.— (i) Surge por definición del producto escalar en el espacio de Hilbert H.

(ii) y (iii) son corolarios de (i) .

(iv) La equivalencia surge teniendo en cuenta la igualdad

$$(37) \qquad \begin{aligned} \int_\Omega \nabla p \bullet v \, dx &= - \int_\Omega p \operatorname{div}(v)\, dx + \int_\Gamma p \ v \bullet n \, d\gamma = \\ &= - \int_\Omega \operatorname{div}(v) \ p\, dx = - b(v, p) \ , \ \forall\, v \in V \ , \end{aligned}$$

con lo cual, se tiene la relación

$$(38) \qquad \lambda = - p$$

entre las incógnitas λ de (36) y p de (P) .

Observación 5.— La forma bilineal b es continua sobre $V \times H$, obteniéndose

$$(39) \qquad |b(v, \mu)| \leq |\operatorname{div}(v)| \cdot |\mu| \leq \sqrt{3}\, \|v\|_{V_1} |\mu| \ , \ \forall\, v \in V \ , \ \forall\, \mu \in H \ .$$

LEMA 7.— (i) La forma bilineal y continua b satisface la condición de Brezzi, es decir $\exists\, b_0 > 0$ de manera que

$$(40) \qquad \sup_{v \in V,\ v \neq 0} \frac{|b(v, \mu)|}{\|v\|_{V_1}} \geq b_0 |\mu| \ , \ \forall\, \mu \in H \ .$$

(ii) el problema variacional mixto (36) tiene una única solución $(u, \lambda) \in V \times H$ [Br, Ci]

AGRADECIMIENTO

El presente trabajo ha sido realizado a través del Proyecto de Investigación y Desarrollo "Análisis Numérico de Ecuaciones e Inecuaciones Variacionales" del CONICET, Rosario (Argentina).

REFERENCIAS

1. [Br] Brezzi, F. , "On the existence, uniqueness and applications of saddle point problems arising from lagrangian multipliers", RAIRO—Analyse Numérique, R—2 (1974) , 177—199.

2. [Ci] Ciarlet, P.G. , "The finite element method for elliptic problems", North-Holand, Amsterdam, 1978.

3. [Gl] Glowinski, R., "Numerical methods for nonlinear variational problems", Springer Verlag, Berlin, 1984.

4. [GlPi] Glowinski, R. — Pironneau, O. , "Sur la résolution par une méthode quasi—directe et par diverses methodes iteratives, d'une approximation par éléments finis mixtes de problème de Dirichlet pour l'opérateur biharmonique", Rapport N° 76010, Laboratoire d'Analyse Numérique, Univ. Paris VI, Paris, 1976.

5. [KiSt] Kinderlehrer, D.— Stampacchia, G., "An introduction to variational inequalities and their applications", Academic Press, New York, 1980.

6. [La] Ladyzenskaja, O.A. , "The mathemátical theory of viscous incompresible flow", Gordon and Beach, New York (1963).

7. [Li2] Lions, J.L., "Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires", Dunod-Gauthier Villars, Paris, 1969.

8. [St] Stampacchia, G. , "Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes", C. R. Acad. Sc. Paris, 258A (1964), 4413—4416.

9. [Ta1] Tarzia, D.A. , "Résolution d'une équation du type Stokes", Memoire DEA d'Analyse Numérique, Univ. Paris VI, Paris, 1977.

10. [Ta2] Tarzia, D.A., "Introducción a las inecuaciones variacionales elípticas y sus aplicaciones a problemas de frontera libre", Centro Latinoamericano de Matemàtica e Informática, CLAMI - CONICET, No. 5, Buenos Aires, 1981.

11. [Te] Teman, R. , "Navier—Stokes equations", North—Holland, Amsterdam, 1977.