

**SOBRE LA RESOLUCION NUMERICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES
EN DERIVADAS PARCIALES DEBILMENTE ACOPLADAS**

Elina M. Mancinelli

*Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario, Avda. Pellegrini 250, 2000 Rosario, Argentina*

RESUMEN

Se consideran sistemas lineales débilmente acoplados de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden, asociados al análisis de problemas de control de sistemas seccionalmente determinísticos con perturbaciones discretas dadas por procesos de Poisson. Se presentan esquemas de discretización para su solución numérica y se estudia la velocidad de convergencia de los mismos.

ABSTRACT

The analysis of control problems for piecewise-deterministic processes with jump perturbations with Poisson distributions, is reduced to the treatment of weakly coupled systems of first-order partial differential equations. We present in this paper some discretization schemes for the numerical solution of the system using finite element methods and the analysis of the rate of convergence.

1. INTRODUCCION

La noción de solución de viscosidad propuesta por Crandall-Lions en [5] para ecuaciones en derivadas parciales de primer orden, puede ser extendida a sistemas de ecuaciones considerando varias componentes de un vector. El factor clave para obtener existencia y unicidad es la validez de un principio de máximo. Teniendo esto en cuenta se consideran sistemas lineales débilmente acoplados de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden, donde el acoplamiento tiene una estructura tal que permite el uso de técnicas basadas en el principio del máximo.

Específicamente consideramos el siguiente sistema descrito en [8]:

$$-\sum_{i=1}^n g_i^r(x) u_{x_i}^r(x) + \sum_{l=1}^m c^H_l(x) u^l(x) = f^r(x) \quad \text{c.t. } x \in \Omega \quad (1)$$

donde es válida la siguiente estructura para la matrix C, que garantiza la existencia de un principio de máximo.

$$c^{rl}(x) \leq 0 \quad \forall r \neq l \quad \forall x \in \bar{\Omega} \quad (2)$$

$$\sum_{l=1}^m c^{rl}(x) \geq c_0 > 0 \quad \forall r = 1, \dots, m; \quad \forall x \in \bar{\Omega} \quad (3)$$

Bajo condiciones apropiadas de regularidad para los coeficientes f, g, C y para el comportamiento del vector g en $\partial\Omega$ es posible probar resultados de existencia y unicidad para las soluciones de viscosidad de (1).

La interpretación de este sistema está relacionada con un proceso estocástico de evolución con saltos cuya aparición sigue un proceso de tipo Poisson.

Presentamos en este trabajo un procedimiento de cómputo numérico basado en la aplicación de la aproximación interna del espacio de Banach $C^{0,1}$ por medio del método de los elementos finitos. Se muestran los resultados numéricos obtenidos así como extensiones de esta metodología al tratamiento de la modificación no lineal del sistema (1) interviniente en los sistemas de ecuaciones de Bellman (ver [9]), asociadas al control de las evoluciones aleatorias mencionadas anteriormente.

2. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

2.1 Descripción del Problema con Horizonte Finito

Para simplificar la presentación de los resultados en este trabajo consideraremos el caso en que tanto los coeficientes de descuento asociados al problema como las probabilidades de transición de los procesos de Poisson intervinientes son independientes del estado del sistema. Por lo tanto el sistema de ecuaciones a tratar tomará la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^n g_i^r(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u^r(x) + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq r}}^m \lambda^{rl} (u^l(x) - u^r(x)) - \alpha^r u^r(x) + f^r(x) = 0 \quad \text{c.t. } x \in \Omega \quad (4)$$

Sobre la misma, haremos las siguientes hipótesis

- $\alpha^r \geq \alpha_0 > 0$
- Ω acotado en \mathbb{R}^n
- g_i^r, f^r son funciones lipchitzianas. designaremos con L_g, L_f las respectivas constantes de lipchitzianidad. En consecuencia g_i^r, f^r son funciones acotadas y designaremos con M_g, M_f las respectivas cotas.
- La solución de la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \dot{y}^r &= g^r(y^r) \\ y^r(0) &= x \end{aligned} \quad (5)$$

está siempre contenida en Ω , es decir, $y^r(s) \in \Omega \quad \forall s \geq 0$

2.2 Representación integral de la ecuación de Hamilton-Jacobi

La solución de la ecuación (4) es en general solo una función hólcleriana y por lo tanto debe ser entendida como solución de (4) en el sentido de la viscosidad [5]. En ese caso es posible demostrar que la solución puede escribirse en términos de la siguiente integral:

$$u^r(x) = \int_0^\infty e^{-\hat{\alpha}^r s} \left(f^r(y_x^r(s)) + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq r}}^m \lambda^{rl} u^l(y_x^r(s)) \right) ds \quad (6)$$

donde

$$\hat{\alpha}^r = \alpha^r + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq r}}^m \lambda^{rl} \quad (7)$$

$$y_x^r(t) = x + \int_0^t g^r(y_x^r(s)) ds \quad (8)$$

es decir es la solución de la ecuación (5) con condición inicial $y_x^r(0) = x$

Definiendo el operador $P: (C^{0,\gamma}(\Omega))^m \rightarrow (C^{0,\gamma}(\Omega))^m$

$$(P(w))^r(x) = \int_0^\infty e^{-\hat{\alpha}^r s} \left(f^r(y_x^r(s)) + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq r}}^m \lambda^{rl} w^l(y_x^r(s)) \right) ds \quad (9)$$

se tiene que hallar la solución débil de la ecuación diferencial (1) se reduce a determinar el punto fijo del operador P en $(C^0(\Omega))^m$.

2.3 Existencia y unicidad de solución

Teorema 2.1. *El operador P es contractivo en $(C^0(\Omega))^m$ y en consecuencia, posee un único punto fijo que brinda la única solución u de la ecuación (4).*

Demostración: Sean $w, \tilde{w} \in (C^0(\Omega))^m$, con $\|w\| = \max \{ |w^r|, r = 1, \dots, m \}$, donde

$$\|w\| = \sup \{ |w(x)|, x \in \Omega \}$$

$$\|(P(w))^r(x) - (P(\tilde{w}))^r(x)\| \leq \int_0^\infty e^{-\hat{\alpha}^r s} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq r}}^m \lambda^{rl} |w^l(y_x^r(s)) - \tilde{w}^l(y_x^r(s))| ds \leq$$

$$\leq \int_0^\infty e^{-\hat{\alpha}^r s} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq r}}^m \lambda^{rl} \|w - \tilde{w}\| ds \leq \beta^r \|w - \tilde{w}\| \leq \beta \|w - \tilde{w}\|$$

siendo

$$\beta^r = \frac{(\hat{\alpha}^r - \alpha^r)}{\hat{\alpha}^r} \quad \text{y} \quad \beta = \max \{\beta^r, r=1, \dots, m\} \quad (10)$$

como obviamente $\beta < 1$, resulta:

$$\|P(w) - P(\hat{w})\| \leq \beta \|w - \hat{w}\|$$

□

2.4 Regularidad de la solución

Notación: Sea $w \in (C^{\alpha, \gamma}(\Omega))^m$, definimos

$$L_w^\gamma = \sup \left\{ |w^r(x) - w^r(\bar{x})| / |x - \bar{x}|^\gamma, x \neq \bar{x}, x, \bar{x} \in \Omega, r = 1, \dots, m \right\} \quad (11)$$

siendo además

$$\|w\|_{\alpha, \gamma} = \|w\|_0 + L_w^\gamma \quad (12)$$

Observación 2.1. El operador P es un operador afín de la forma

$$P(w) = A + B w \quad (13)$$

siendo A la función de $(C^{\alpha, \gamma}(\Omega))^m$ definida por:

$$(A)^r(x) = \int_0^\infty e^{-\hat{\alpha}^r s} f^r(y_x^r(s)) ds \quad (14)$$

y B un operador lineal definido por:

$$(B(w))^r(x) = \int_0^\infty e^{-\hat{\alpha}^r s} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq r}}^m \lambda^{rl} w^l(y_x^r(s)) ds \quad (15)$$

Proposición 2.1. Para $\gamma \leq \min(1, \alpha_g / L_g)$ el operador P verifica la siguiente propiedad:

$$L_A^\gamma \leq \psi$$

$$L_{Bw}^\gamma \leq \eta L_w^\gamma$$

siendo

$$\psi = \max_r \left(L_f^\gamma / (\hat{\alpha}^r - \gamma L_g) \right) \quad (16)$$

$$\eta = \max_r \left((\hat{\alpha}^r - \alpha^r) / (\hat{\alpha}^r - \gamma L_g) \right) < 1 \quad (17)$$

Es decir el operador B , y en consecuencia el operador P , es contractivo para la seminorma L_{Pw}^γ , es decir

$$\| (P(w))^r(x) - (P(\hat{w}))^r(x) - (P(w))^r(\bar{x}) + (P(\hat{w}))^r(\bar{x}) \| \leq \eta L_{w-\hat{w}}^\gamma |x - \bar{x}|^\gamma \quad (18)$$

Demostración: Restringiremos la demostración para la parte correspondiente al operador B , el resto se obtiene esencialmente con el mismo razonamiento.

$$|(B(w))^r(x) - (B(w))^r(\bar{x})| \leq \int_0^{\infty} e^{-\hat{\alpha}^r s} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq r}}^m \lambda^{rl} |w^l(y_x^r(s)) - w^l(\bar{y}_{\bar{x}}^r(s))| ds$$

en virtud de (15) y la continuidad de (5) con respecto al valor inicial x , se tiene

$$\begin{aligned} |(B(w))^r(x) - (B(w))^r(\bar{x})| &\leq \int_0^{\infty} e^{-\hat{\alpha}^r s} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq r}}^m \lambda^{rl} L_w^r |(y_x^r(s)) - (\bar{y}_{\bar{x}}^r(s))|^7 ds \leq \\ &\leq \int_0^{\infty} e^{-\hat{\alpha}^r s} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq r}}^m \lambda^{rl} L_w^r e^{\gamma L_g s} |x - \bar{x}|^7 ds \leq \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq r}}^m \lambda^{rl} L_w^r (\hat{\alpha}^r - \gamma L_g)^{-1} |x - \bar{x}|^7 \end{aligned}$$

En consecuencia

$$|(B(w))^r(x) - (B(w))^r(\bar{x})| \leq \eta L_w^r |x - \bar{x}|^7$$

o sea, por definición

$$L_{Bw}^r \leq \eta L_w^r$$

□

Corolario 2.1. Para un elemento arbitrario w de $(C^{0,\gamma}(\Omega))^m$ se satisface:

$$P^\nu(w) \in (C^{0,\gamma}(\Omega))^m \quad \forall \nu \in \mathcal{K} \quad (19)$$

$$L_{P^\nu w}^r \leq \max\{\psi/(1-\eta), \psi + \eta L_w^r\} \quad (20)$$

Corolario 2.2. La única solución u de la ecuación (4) es un elemento de $(C^{0,\gamma}(\Omega))^m$ y satisface

$$L_u^r \leq \psi/(1-\eta) \quad (21)$$

Corolario 2.3. Para un elemento arbitrario w de $(C^{0,\gamma}(\Omega))^m$ se satisface:

$$P^\nu(w) \rightarrow u \text{ en la norma de } (C^{0,\gamma}(\Omega))^m \quad (22)$$

3. DISCRETIZACION EN TIEMPO DE LA ECUACION DE HAMILTON-JACOBI-BELLMAN

3.1 Definición de un esquema de discretización en tiempo

Definimos en relación con la ecuación diferencial (4) el siguiente esquema de discretización en tiempo:

$$u_h^r(x) = \zeta_h \left((f^r(x) + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq r}}^m \lambda^{rl} u_h^l(x + h g^r(x))) h + u_h^r(x + h g^r(x)) \right) \quad (23)$$

donde

$$\zeta_h = 1/(1 + h \hat{\alpha}^r) \quad (24)$$

Definiendo el operador $M_h: (C^{0,\gamma}(\Omega))^m \rightarrow (C^{0,\gamma}(\Omega))^m$

$$(M_h(w))^r(x) = \zeta_h \left(\left(f^r(x) + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq r}}^m \lambda^{rl} w_l^r(x + hg^r(x)) \right) h + w_h^r(x + hg^r(x)) \right) \quad (25)$$

El problema discreto resultante toma la siguiente forma:

Determinar el punto fijo del operador M_h en $(C^0(\Omega))^m$

(26)

3.2. Existencia y unicidad de solución

Teorema 2.1. Para $\gamma \leq \min\{1, \alpha_0/L_g\}$ el operador M_h es contractivo en $(C^{0,\gamma}(\Omega))^m$ y en consecuencia, el problema (26) posee una única solución w_h , punto fijo del operador M_h (25).

Demostración: Es evidente a partir de (25) y repite esencialmente la técnica introducida en [8], [10], [11].

3.3 Representación explícita de la solución discreta

Introduciendo el sistema dinámico de evolución discreta:

$$y_x^{r,h}(\nu+1) = y_x^{r,h}(\nu) + h g^r(y_x^{r,h}(\nu)), \quad \nu = 0, 1, \dots \quad (27)$$

$$y_x^{r,h}(0) = x,$$

Se tiene que la solución de (26) es equivalente a hallar el punto fijo del siguiente operador P_h

$$(P_h(w))^r(x) = h \sum_{\nu=0}^{\infty} \zeta_h^{\nu+1} \left(f(y_x^{r,h}(\nu)) + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq r}}^m \lambda^{rl} w_l^r(y_x^{r,h}(\nu+1)) \right) \quad (28)$$

Observación 2.1. El operador P_h es un operador afín de la forma

$$P_h(w) = A_h + B_h w \quad (29)$$

siendo A_h la función de $(C^{0,\gamma}(\Omega))^m$ definida por:

$$(A_h)^r(x) = h \sum_{\nu=0}^{\infty} \zeta_h^{\nu+1} f(y_x^{r,h}(\nu)) \quad (30)$$

y B_h un operador lineal definido por:

$$(B_h(w))^r(x) = h \sum_{\nu=0}^{\infty} \zeta_h^{\nu+1} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq r}}^m \lambda^{rl} w_l^r(y_x^{r,h}(\nu+1)) \quad (31)$$

Proposición 3.1. Para $\gamma \leq \min\{1, \frac{\alpha_0}{L_g}\}$ el operador P_h verifica las siguientes propiedades:

$$|B_h w|_0 \leq \beta |w|_0$$

$$L_{A_h}^\gamma \leq \psi$$

$$L_{B_h w}^\gamma \leq \eta L_w^\gamma$$

Es decir el operador B_h , y en consecuencia el operador P_h , es contractivo para la norma de $(C^{\alpha, \gamma}(\Omega))^m$, ya que:

$$\left| (P_h(w))^r(x) - P_h(\tilde{w})^r(x) - (P_h(w))^r(\tilde{x}) + P_h(\tilde{w})^r(\tilde{x}) \right| \leq \eta L_{w-\tilde{w}}^\gamma |x - \tilde{x}|^\gamma$$

y

$$|P_h(w)^r(x) - P_h(\tilde{w})^r(x)| \leq \beta |w - \tilde{w}|$$

Demostración: Utiliza esencialmente las técnicas empleadas en la proposición 2.1 y la omitimos por razones de brevedad.

3.4 Convergencia de las soluciones discretas

El operador de discretización arriba definido es una discretización natural o intuitiva de la ecuación diferencial (4) y es inmediato demostrar su consistencia. Por las propiedades de estabilidad analizadas anteriormente es claro esperar que sea también convergente; en particular utilizando técnicas empleadas en [6], [10], [11] es posible probar el siguiente resultado (la demostración completa está contenida en [12]).

Teorema 3.1. Para $\gamma \leq \min\{1, \alpha_0/L_g\}$ es válida la acotación sobre la velocidad de convergencia de las soluciones discretizadas:

$$|u_h^r(x) - u^r(x)| \leq K h^\gamma \quad (32)$$

donde K es una constante independiente del paso de discretización h .

4. SOLUCION TOTALMENTE DISCRETIZADA

4.1 Un esquema de discretización sobre elementos finitos

Para obtener resultados computacionales es necesario realizar la discretización en las variables espaciales y obtener métodos numéricos para calcular u_h^r . Vía la discretización en las variables de estado por el método de elementos finitos obtenemos la solución totalmente discreta u_h^h .

Se cubre Ω con un $\{S_j^k\}$, una familia de triaangulaciones regulares de Ω , (ver detalles de la definición en [7]). Sobre $\{S_j^k\}$ consideramos el conjunto $(W_k)^n$ de funciones vectoriales continuas, con $\frac{\partial w^r}{\partial x_i}$ constante en el interior de cada simplex; es decir, la componente w^r es un elemento finito lineal.

Definimos el operador $M_k^h: (W_k)^n \rightarrow (W_k)^n$ de la siguiente forma:

$$(M_k^h(w))^i(x_i) = c_h \left(\left(f^0(x_i) + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^m \lambda^{il} w^l(x_i + h g^l(x_i)) \right) h + w^i(x_i + h g^i(x_i)) \right) \quad \forall i=1, \dots, N \quad (33)$$

El problema totalmente discretizado, que debe ser resuelto numéricamente, es el siguiente:

Problema P_k : Encontrar el punto fijo del operador M_k^h

(34)

4.2 Existencia y unicidad de la solución totalmente discretizada

De la definición (33) es evidente observar que el operador M_k^h es contractivo en $(W_k)^n$, por lo que existe y es única la solución del problema P_k . La misma puede ser computada con la iteración simple $u^{p+1} = M_k^h(u^p)$ o resolviendo directamente el sistema lineal $u_k^h = M_k^h(u_k^h)$, (ver [11], para la discusión del problema computacional).

Este esquema de discretización es convergente, la determinación de la velocidad de convergencia está contenida en [12].

5. EXTENSION DE LA METODOLOGIA AL PROBLEMA DE SISTEMAS CONTROLADOS

Cuando existen controles que modifican las velocidades g^i , las tasas de descuento y las densidades λ^{il} , se tienen los problemas de control óptimo estocástico de sistemas seccionalmente determinísticos (ver [8], [9]).

En ese caso la ecuación (4) se transforma en:

$$\min_{v \in V} \left(\sum_{i=1}^n g_i^r(x, v) \frac{\partial}{\partial x_i} u^r(x) + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq r}}^m \lambda^{rl}(x, v)(u^l(x) - u^r(x)) - \sigma^r(x, v) u^r(x) + f^r(x, v) \right) = 0 \quad (35)$$

El correspondiente problema totalmente discretizado toma en este caso la forma:

$$(u_k^h)^r(x_i) = \min_{v \in V} \left\{ c_h(x_i, v) \left(\left(f^r(x_i, v) + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq r}}^m \lambda^{rl}(x_i, v) (u_k^h)^l(x_i + h g^l(x_i, v)) \right) h + (u_k^h)^r(x_i + h g^r(x_i, v)) \right) \right\} \quad (36)$$

Para este problema valen resultados de existencia, unicidad, velocidad de convergencia similares a los correspondientes al problema anterior (ver [12]).

6. EJEMPLOS DE APLICACION

6.1 Ejemplo con evoluciones libres

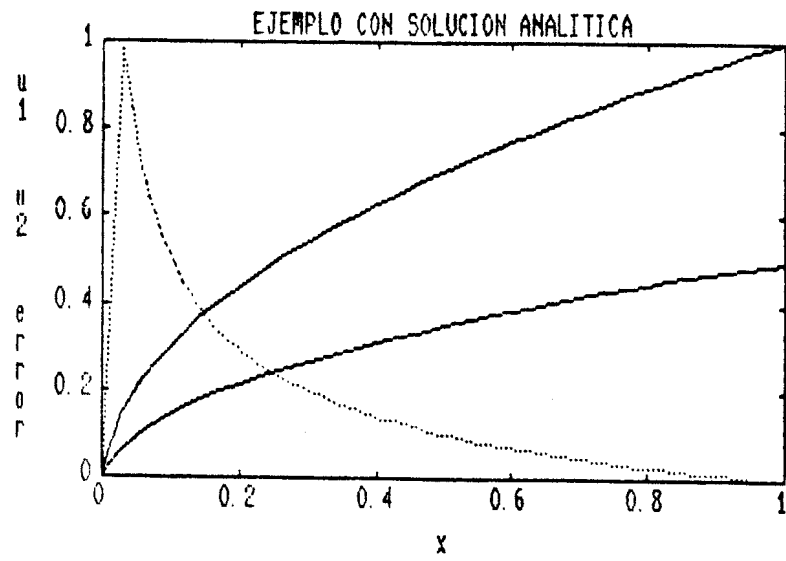
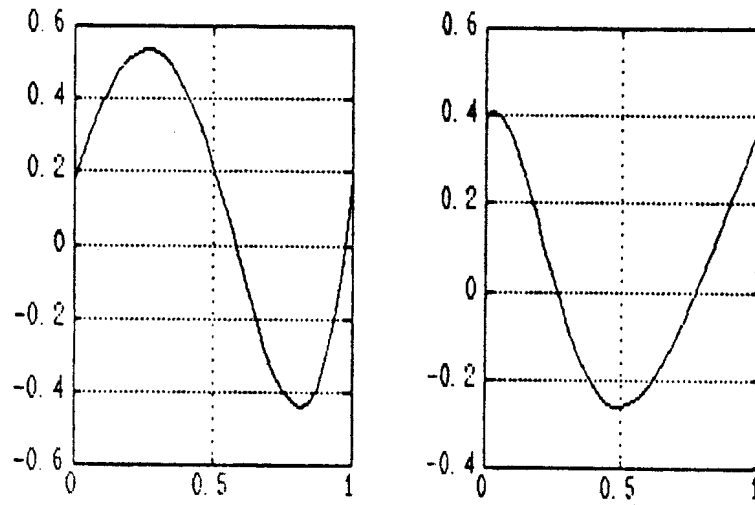
Resolvemos un problema unidimensional con los siguientes datos:

$$\Omega = [0, 1], \quad m = 2, \quad g^1(x) = x(x-1), \quad g^2(x) = -x(x-1)$$

$$f_1(x) = \sin(x+2\pi), \quad f_2(x) = \cos(x+2\pi)$$

Se usa una subdivisión uniforme del intervalo $[0, 1]$ en 32 segmentos. Las funciones u^1 , u^2 obtenidas se muestran en la figura 1.

FIGURAS



6.2 Ejemplo con solución analítica

Resolvemos un problema unidimensional con los siguientes datos:

$$\Omega = [0,1], m = 2, g^1(x) = x(x-1), g^2(x) = -x(x-1)$$

$$f_1(x) = \sqrt{x} (-0.25 + 0.25(1-x)), f_2(x) = \sqrt{x} (0.5 - 0.5(1-x))$$

La solución analítica de este problema es: $u^1 = 0.5\sqrt{x}$, $u^2 = \sqrt{x}$. En la solución numérica se usó una subdivisión uniforme del intervalo $[0,1]$ en 35 segmentos. Las funciones u^1 , u^2 obtenidas, así como el error con respecto a la solución analítica (multiplicada por un factor 40) se muestran en la figura 2.

CONCLUSIONES

Se ha presentado aquí un procedimiento de discretización para tratar numéricamente el problema de resolver sistemas de ecuaciones de tipo Hamilton-Jacobi-Bellman asociados al control óptimo de sistemas dinámicos con trayectorias seccionalmente determinísticas. Los esquemas de discretización resultan estables y la velocidad de convergencia para las soluciones totalmente discretas es de tipo $k^{7/3}$. En virtud de la forma especial de discretizar el operador asociado a las perturbaciones de tipo Poisson del proceso, no aparecen acotaciones de la velocidad de convergencia del tipo $k|\ln k|$, usualmente obtenidas en la literatura del área.

REFERENCIAS

- [1] Capuzzo Dolcetta L.: On a Discrete Approximation of the Hamilton-Jacobi Equation of Dynamic Programming. *Appl. Math. Optim.*, Vol. 10, pp. 367-377, 1983.
- [2] Capuzzo Dolcetta L, Evans L.C.: Optimal switching for ordinary differential equations. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 22, pp. 143-161, 1984.
- [3] Capuzzo Dolcetta L, Falcone M.: Discrete dynamic programming and viscosity solutions of the Bellman equation. *Preprint URLS-DM/NS-88/001*, Roma, 1988.
- [4] Capuzzo Dolcetta L, Ishii B.: Approximate solution of the Bellman equation of deterministic control theory. *Appl. Math. Optim.*, Vol. 11, pp. 161-181, 1984.
- [5] Crandall M. G., Lions P. L.: Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Trans. AMS*, Vol. 277, pp. 1-42, 1983.
- [6] González R., Tidball M.: On a Discrete Time Approximation of the Hamilton-Jacobi Equation of Dynamic Programming. *Rapport de Recherche N°1375*, INRIA, 1990.
- [7] González R., Tidball M.: On the rate of convergence of fully discrete solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Rapport de Recherche*, N° 1376, INRIA, 1991.
- [8] Lenhart S. M.: Viscosity solutions for weakly coupled systems of first-order partial differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 131, pp. 180-193, 1988.
- [9] Lenhart S. M., Liao Y.C.: Switching Control of piecewise-deterministic processes. *JOTA*, Vol 59, N° 1, pp. 99-115, 1988.
- [10] Tidball M. M.: Aproximación numérica de problemas de control impulsional. Aceptado para su presentación en el congreso JAIHO'91 (Buenos Aires, septiembre 1991).
- [11] Tidball M. M.: Sobre la resolución numérica de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman. Tesis, Universidad Nacional de Rosario, 1991.
- [12] Mancinelli E. M.: Sobre la resolución numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales débilmente acopladas. Trabajo en preparación, Universidad Nacional de Rosario.