

ELEMENTO FINITO PARA CASCAS LAMINADAS

Amir Elias Abdalla Kurban
Departamento de Engenharia Civil
Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, Brasil

Jorge de Mello e Souza
Departamento de Engenharia Mecânica,
Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, Brasil

RESUMO

Neste trabalho foram desenvolvidas as relações para a formulação de um elemento finito para cascas laminadas anisótropas, segundo uma teoria que inclui os efeitos da distorção transversal.

ABSTRACT

This work presents the expressions to formulate a finite element for anisotropic laminated shells based on a theory that include the effects of the transverse shear deformation.

INTRODUÇÃO

Laminados consistem de duas ou mais camadas de materiais (distintos ou não) que são unidas, onde procura-se combinar as melhores propriedades de seus constituintes de modo a obter um composto adequado para uma determinada aplicação. Resistência, rigidez e condutividade térmica são algumas destas propriedades que variam com a direção, no caso de camadas anisótropas.

Estruturas que exigem altas relações resistência / densidade e rigidez / densidade utilizam amplamente estes materiais, como é o caso de mísseis, aeronaves, foguetes e espaçonaves.

Em muitas aplicações é possível, usando materiais conjugados, obter a mesma resistência e rigidez do aço com uma economia de 30 % no peso. Pode-se ainda conseguir o triplo da resistência do alumínio com um peso 40 % menor.

Se, por um lado, os materiais conjugados oferecem muitas características estruturais desejáveis, por outro eles apresentam comportamento e processos de fabricação mais complexos. Materiais conjugados estão inseridos em uma área interdisciplinar onde engenheiros químicos, estruturais, mecânicos, de ciência dos materiais e de fabricação colaboram para o produto final.

Atualmente muitas das teorias para placas e cascas anisótropas laminadas são extensões diretas dos métodos desenvolvidos anteriormente para placas e cascas homogêneas, isotrópicas ou ortótropas.

Um grande problema da maior parte das teorias para laminados é sua adequação a um método numérico, como por exemplo, elementos finitos. Poucas são as que se apresentam atrativas a uma solução computacional mesmo quando o número de camadas não é grande.

A referência [1] relaciona as diferentes formulações de elementos finitos para placas e a referência [2] menciona os trabalhos desenvolvidos nesta área com respeito a cascas.

Neste trabalho será formulado um elemento finito de acordo com uma teoria que considera os efeitos da distorção transversal e a variação da normal, camada a camada.

CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

Seja uma superfície externa da casca, S, aqui designada de superfície de referência, definida por duas coordenadas curvilíneas ortogonais (α, β) , coincidindo com as linhas principais de curvatura.

A e B são os coeficientes da primeira forma fundamental da superfície da casca. O vetor unitário perpendicular a S é chamado de n e é escolhido de tal forma que aponte para as interfaces. R_α e R_β são os raios de curvatura, positivos quando o centro de curvatura estiver na direção positiva de n. A coordenada medida ao longo da normal n é chamada de ζ .

Considera-se uma casca de espessura constante h constituída de N camadas paralelas de material anisótropo perfeitamente ligadas. Considera-se também que cada camada tem espessura constante e possui simetria elástica em relação a uma superfície $\zeta = \text{constante}$. As propriedades e espessuras variam de camada a camada. As relações constitutivas para cada camada, com a suposição de que a tensão normal transversal pode ser abandonada, são :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{\alpha\alpha} \\ \sigma_{\beta\beta} \\ \sigma_{\alpha\beta} \\ \sigma_{\alpha\zeta} \\ \sigma_{\beta\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} & 0 & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{\alpha\alpha} \\ \epsilon_{\beta\beta} \\ \epsilon_{\alpha\beta} \\ \epsilon_{\alpha\zeta} \\ \epsilon_{\beta\zeta} \end{bmatrix} \quad (1)$$

RELAÇÕES FUNDAMENTAIS E CONDIÇÕES NAS INTERFACES

As relações entre deformações e deslocamentos são as mesmas encontradas na referência [3].

Admite-se uma perfeita ligação entre as camadas, não permitindo a ocorrência do deslizamento entre elas. As condições de contato são que em pontos situados imediatamente acima e abaixo da interface, os deslocamentos e tensões com um índice ζ devem ser iguais.

O campo de deslocamentos é definido por u na direção α , v na direção β e w na normal à superfície. A distorção γ contém o índice α caso ocorra no plano α . O índice zero numa grandeza significa que esta é medida na superfície de referência ; $Y(\zeta-\zeta_1)$ é a função unitária de Heaviside.

O seguinte campo de deslocamentos atende automaticamente às condições anteriores (figura 1):

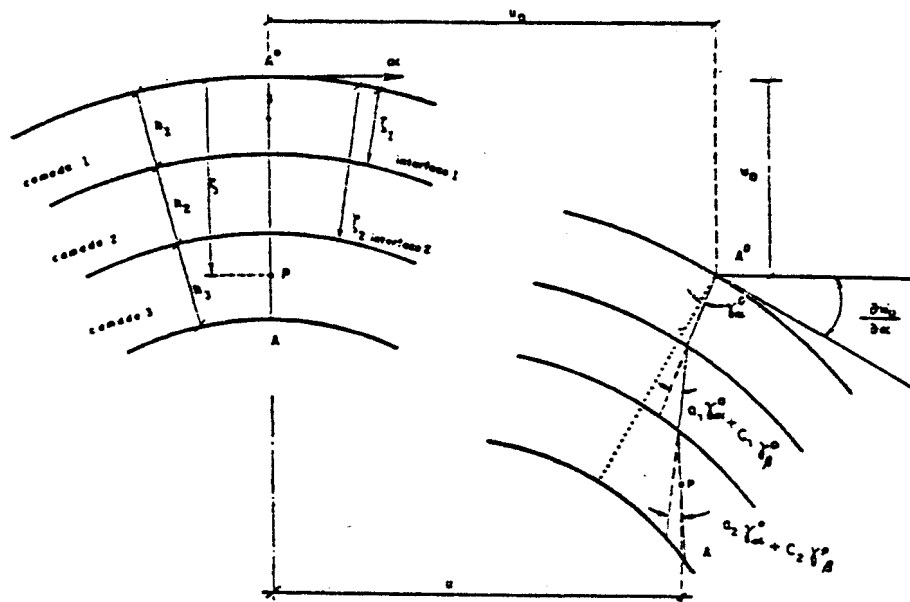


FIGURA 1 : Campo de deslocamentos

$$u(\alpha, \beta, \zeta) = (1 - \zeta/R_\alpha) u_0(\alpha, \beta) + \zeta \left(\gamma_\alpha^0(\alpha, \beta) - \frac{v_0(\alpha, \beta), \alpha}{A} \right) + \sum_k (a_k \gamma_\alpha^0(\alpha, \beta) + c_k \gamma_\beta^0(\alpha, \beta)) (\zeta - \zeta_k) Y(\zeta - \zeta_k) \quad (2)$$

$$v(\alpha, \beta, \zeta) = (1 - \zeta/R_\beta) v_0(\alpha, \beta) + \zeta \left(\gamma_\beta^0(\alpha, \beta) - \frac{w_0(\alpha, \beta), \beta}{B} \right) + \sum_k (d_k \gamma_\alpha^0(\alpha, \beta) + b_k \gamma_\beta^0(\alpha, \beta)) (\zeta - \zeta_k) Y(\zeta - \zeta_k) \quad (3)$$

$$w(\alpha, \beta, \zeta) = w_0(\alpha, \beta) \quad (4)$$

Os coeficientes a , b , c e d , que aparecem nas equações acima são obtidos obrigando as tensões com um índice ζ a serem iguais na interface; dependem apenas dos coeficientes elásticos das camadas. O somatório se estende da primeira camada até a ordem $N-1$, sendo N o número de camadas da casca. Verifica-se que na interface os deslocamentos têm o mesmo valor, mas não sua derivada. Tais derivadas aparecem nas fórmulas das deformações com um índice ζ . Ou seja, ao longo da espessura os deslocamentos u e v são uma linha poligonal [4].

As deformações podem ser expressas em função de 18 incógnitas, que definem o vetor $\{\delta\}$:

$$\begin{aligned} \{\delta\}^T = & \{ u_0, v_0, w_0, u_0',\alpha, v_0',\alpha, u_0',\beta, v_0',\beta, \gamma_\alpha^0, \\ & \gamma_\beta^0, \gamma_{\alpha,\alpha}^0, \gamma_{\alpha,\beta}^0, \gamma_{\beta,\alpha}^0, \gamma_{\beta,\beta}^0, w_0',\alpha, w_0',\beta, \\ & w_0',\alpha\alpha, w_0',\alpha\beta, w_0',\beta\beta \} \end{aligned} \quad (5)$$

Assim sendo, pode-se exprimir as deformações na forma matricial .

$$\{c\} = [M] \{\delta\} \quad (6)$$

$\begin{matrix} 5 \times 1 & & 5 \times 18 & & 18 \times 1 \end{matrix}$

O vetor $\{c\}^T$ é :

$$\{c\}^T = \{ c_{\alpha\alpha}, c_{\beta\beta}, c_{\alpha\beta}, c_{\alpha\zeta}, c_{\beta\zeta} \} \quad (7)$$

A constituição da matriz $[M]$ será :

$$\begin{aligned} m_{15} = m_{16} = m_{17} = m_{111} = m_{113} = m_{117} = m_{118} = 0 \\ m_{24} = m_{25} = m_{26} = m_{210} = m_{212} = m_{216} = m_{217} = 0 \\ m_{33} = m_{34} = m_{37} = m_{318} = m_{319} = 0 \\ m_{41} = m_{42} = m_{43} = m_{44} = m_{45} = m_{46} = m_{47} = m_{410} = m_{411} = m_{412} = 0 \\ m_{413} = m_{414} = m_{415} = m_{416} = m_{417} = m_{418} = 0 \\ m_{51} = m_{52} = m_{53} = m_{54} = m_{55} = m_{56} = m_{57} = m_{510} = m_{511} = m_{512} = 0 \\ m_{513} = m_{514} = m_{515} = m_{516} = m_{517} = m_{518} = 0 \end{aligned}$$

$$m_{11} = -\frac{\zeta}{A(1-\zeta/R_\alpha)} \left(\frac{1}{R_\alpha} \right), \quad m_{12} = \frac{A,\beta (1-\zeta/R_\beta)}{B A (1-\zeta/R_\alpha)}, \quad m_{13} = -\frac{1}{R_\alpha(1-\zeta/R_\alpha)}$$

$$m_{14} = \frac{1}{A}, \quad m_{18} = \frac{A,\beta}{B A (1-\zeta/R_\alpha)} \sum_k d_k (\zeta - \zeta_k) Y(\zeta - \zeta_k),$$

$$m_{19} = \frac{A,\beta}{B A (1-\zeta/R_\alpha)} \left[\zeta + \sum_k b_k (\zeta - \zeta_k) Y(\zeta - \zeta_k) \right],$$

$$m_{110} = \frac{1}{A(1-\zeta/R_\alpha)} \left[\zeta + \sum_k a_k (\zeta - \zeta_k) Y(\zeta - \zeta_k) \right],$$

$$m_{112} = \frac{1}{A(1-\zeta/R_\alpha)} \sum_k c_k (\zeta - \zeta_k) Y(\zeta - \zeta_k), \quad m_{114} = -\zeta \left(\frac{1}{A} \right), \quad m_{115} = \frac{1}{A(1-\zeta/R_\alpha)}$$

$$\begin{aligned}
 m_{1, 18} &= -\zeta \frac{A, \beta}{B^2} \frac{1}{A(1-\zeta/R_\alpha)}, \quad m_{1, 16} = -\zeta \frac{1}{A^2(1-\zeta/R_\alpha)} \\
 m_{2, 1} &= (m_{1, 2})^* , \quad m_{2, 2} = (m_{1, 1})^* , \quad m_{2, 3} = (m_{1, 3})^* , \quad m_{2, 7} = (m_{1, 4})^* , \\
 m_{2, 8} &= (m_{1, 9})^{* a} , \quad m_{2, 9} = (m_{1, 6})^{* c} , \quad m_{2, 11} = (m_{1, 12})^{* d} , \\
 m_{2, 13} &= (m_{1, 10})^{* b} , \quad m_{2, 14} = (m_{1, 15})^* , \quad m_{2, 15} = (m_{1, 14})^* , \\
 m_{2, 16} &= (m_{1, 16})^* , \quad m_{3, 1} = -\left[\frac{A, \beta}{A B} + \frac{\zeta}{B(1-\zeta/R_\beta)} \left(\frac{1}{R_\alpha} \right), \beta \right] , \quad m_{3, 2} = (m_{3, 1})^* \\
 m_{3, 5} &= \frac{(1-\zeta/R_\beta)}{A(1-\zeta/R_\alpha)} , \quad m_{3, 6} = (m_{3, 5})^* , \\
 m_{3, 8} &= \frac{-A, \beta}{(1-\zeta/R_\alpha)AB} \left[\zeta + \sum_k a_k (\zeta-\zeta_k) Y(\zeta-\zeta_k) \right] - \\
 &\quad - \frac{B, \alpha}{(1-\zeta/R_\beta)AB} \sum_k d_k (\zeta-\zeta_k) Y(\zeta-\zeta_k) , \quad m_{3, 9} = (m_{3, 8})^{* b c} \\
 m_{3, 10} &= \frac{1}{A(1-\zeta/R_\alpha)} \sum_k d_k (\zeta-\zeta_k) Y(\zeta-\zeta_k) , \\
 m_{3, 11} &= \frac{1}{B(1-\zeta/R_\beta)} \left[\zeta + \sum_k a_k (\zeta-\zeta_k) Y(\zeta-\zeta_k) \right] , \quad m_{3, 12} = (m_{3, 11})^{* b} \\
 m_{3, 13} &= (m_{3, 10})^{* c} , \quad m_{3, 14} = \zeta \left[\frac{A, \beta}{A^2} \frac{1}{B(1-\zeta/R_\alpha)} - \left(\frac{1}{A} \right), \beta \frac{1}{B(1-\zeta/R_\beta)} \right] \\
 m_{3, 15} &= (m_{3, 14})^* , \quad m_{3, 17} = -\zeta \frac{1}{A B} \left(\frac{1}{(1-\zeta/R_\alpha)} + \frac{1}{(1-\zeta/R_\beta)} \right) \\
 m_{4, 8} &= \frac{1}{(1-\zeta/R_\alpha)} + \sum_k a_k \frac{(1-\zeta_k/R_\alpha)}{(1-\zeta/R_\alpha)} Y(\zeta-\zeta_k) , \\
 m_{4, 9} &= \sum_k c_k \frac{(1-\zeta_k/R_\alpha)}{(1-\zeta/R_\alpha)} Y(\zeta-\zeta_k) , \quad m_{5, 8} = (m_{4, 9})^{* d} , \quad m_{5, 9} = (m_{4, 8})^*
 \end{aligned}$$

(8)

A notação (...) * significa a substituição de α por β e vice-versa. As letras que porventura seguem o símbolo * indicam os coeficientes que substituem aqueles (a, b, c ou d) que aparecem no somatório.

ELEMENTO FINITO PARA A TEORIA BASEADA NA CONTINUIDADE DE TENSÕES

Tomam-se os deslocamentos de membrana e distorções da superfície de referência como sendo da forma :

$$u_0(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 H_{0i}^{(0)}(\xi) H_{0j}^{(0)}(\eta) u_{ij} \quad (9)$$

As fórmulas para v_0 , γ_α^0 e γ_β^0 são similares .

Os graus de liberdade correspondentes em cada nó serão os deslocamentos e distorções u_{ij} , v_{ij} , $(\gamma_\alpha)_{ij}$ e $(\gamma_\beta)_{ij}$.

O deslocamento transversal será dado por

$$w_0(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 [H_{0i}^{(1)}(\xi) H_{0j}^{(1)}(\eta) w_{ij} + H_{1i}^{(1)}(\xi) H_{0j}^{(1)}(\eta) (w_{,\alpha})_{ij} + H_{0i}^{(1)}(\xi) H_{1j}^{(1)}(\eta) (w_{,\beta})_{ij} + H_{1i}^{(1)}(\xi) H_{1j}^{(1)}(\eta) (w_{,\alpha\beta})_{ij}] \quad (10)$$

A última parcela da expressão (10) torna presentes todos os termos exigidos em um polinômio cúbico. Um estudo sobre os efeitos da inclusão deste termo na convergência da solução, para placas homogêneas, encontra-se em [5]. Nesta referência encontra-se também um estudo mais detalhado sobre a geração das funções de interpolação.

Com estas considerações, o elemento proposto passa a ser o da figura 2.

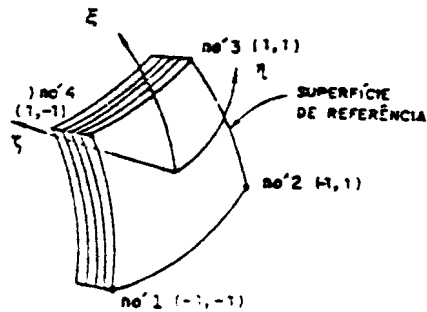


FIGURA 2 : Elemento finito para casca laminada

Com os limites $-1 \leq \xi \leq 1$ e $-1 \leq \eta \leq 1$, os polinômios de Hermite ficam :

$$\begin{aligned}
 H_{01}^{(0)}(\xi) &= \frac{1}{2} (1 - \xi) & H_{02}^{(0)}(\xi) &= \frac{1}{2} (1 + \xi) \\
 H_{01}^{(1)}(\xi) &= \frac{1}{4} (\xi^3 - 3\xi + 2) & H_{02}^{(1)}(\xi) &= -\frac{1}{4} (\xi^3 - 3\xi - 2) \\
 H_{11}^{(1)}(\xi) &= \frac{1}{4} (\xi^3 - \xi^2 - \xi + 1) & H_{12}^{(1)}(\xi) &= \frac{1}{4} (\xi^3 + \xi^2 - \xi - 1)
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Os graus de liberdade ficam sendo 8 por nó : 3 deslocamentos, 2 rotações devidas ao cisalhamento e 2 à flexão, e a curvatura de torção, totalizando 32 graus de liberdade por elemento.

ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

A energia de deformação por unidade de área da superfície de referência é dada por :

$$\Phi = \sum_{s=1}^k \Phi_s \tag{12}$$

Onde a fórmula para a energia de deformação por unidade de área de cada lâmina, chamada de Φ_s , é :

$$\Phi_s = \frac{1}{2} \int_{\zeta_{s-1}}^{\zeta_s} \{ \sigma \}^T \{ \epsilon \} d\zeta \tag{13}$$

Substituindo (1), (6) e (13) em (12), fica-se com :

$$\Phi = \sum_{s=1}^k \frac{1}{2} \int_{\zeta_{s-1}}^{\zeta_s} \{ \delta \}^T [M]^T [C] [M] \{ \delta \} d\zeta \tag{14}$$

Fazendo com que $[M]^T [C] [M] = [B]$ pode-se escrever :

$$\Phi = \sum_{s=1}^k \frac{1}{2} \int_{\zeta_{s-1}}^{\zeta_s} \{ \delta \}^T [B] \{ \delta \} d\zeta \tag{15}$$

Um aspecto muito importante a destacar aqui é que, devido à existência de diferentes camadas, a integração ao longo da espessura da casca deverá ser realizada explicitamente. Em consequência os limites de integração dependem diretamente das espessuras das camadas .

PRINCÍPIO VARIACIONAL

Seja um corpo elástico sujeito a forças externas (de corpo ou de superfície). A energia potencial pode ser escrita como :

$$\Pi = \iiint_V \left[(\delta)^T [M]^T [C] [M] (\delta) - 2 (\delta)^T [M]^T [C] \{\bar{c}\} \right] dV - \iint_S (\bar{F})^T (\delta) dV - \iint_S (\bar{T})^T (\delta) dS \quad (16)$$

Aqui $\{F\}$ indica as forças de corpo e $\{T\}$ indica as forças de superfície atuando em uma porção S da superfície do corpo. As deformações iniciais são indicadas por $\{\bar{c}\}$ e as quantidades que possuem barras como sobre-escritos são valores previamente conhecidos.

Verifica-se então que aparecem no funcional as derivadas primeiras dos deslocamentos de membrana e das distorções e derivadas segundas do deslocamento w , de acordo com o vetor $\{\delta\}$ e a matriz $[M]$ definidos anteriormente.

MATRIZ $[N]$ E DE RIGIDEZ

Escrevendo agora o vetor $\{\delta\}$ em função dos graus de liberdade do elemento obtém-se :

$$\{\delta\} = [N] \{U\}_e \quad (17)$$

18x1 18x32 32x1

O vetor $\{\delta\}$ é o definido em (5) e o vetor dos graus de liberdade do elemento é $\{U\}_e$, definido por :

$$\{U\}_e^T = (u_{11}, v_{11}, w_{11}, (\gamma_\alpha)_{11}, (\gamma_\beta)_{11}, (w_{,\alpha})_{11}, (w_{,\beta})_{11}, (w_{,\alpha\beta})_{11}, u_{21}, \dots, (w_{,\alpha\beta})_{12}) \quad (18)$$

Os termos de $[N]$ são obtidos pelo produto dos polinômios de Hermite entre si ou por suas derivadas.

Assim, a energia de deformação do elemento fica determinada pela expressão :

$$\Phi_e = \frac{1}{2} \{U\}_e^T [K]_e \{U\}_e \quad (19)$$

Onde

$$[K]_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T [B^*] [N] \det [J] d\xi d\eta \quad (20)$$

$$[B^*] = \sum_{s=1}^n \int_{\zeta_{s-1}}^{\zeta_s} [B] d\zeta \quad (21)$$

O determinante do jacobiano que aparece na expressão acima é encontrado ao se relacionar os sistemas global e local. O procedimento a seguir é o constante em várias referências, como por exemplo [6] e [7]. Deve-se ressaltar aqui que o valor do determinante do jacobiano envolve as funções que definem a configuração do elemento, aqui chamadas de N_i .

A integração em duas dimensões pode ser efetivada através da quadratura de Gauss. O número de pontos a utilizar indica o grau do polinômio que é integrado exatamente. Como polinômios cúbicos estão sendo utilizados para funções de interpolação, um esquema 2 x 2 atende ao elemento proposto .

CONFIGURAÇÃO

A fim de modelar os lados curvos do elemento, pode-se usar polinômios quadráticos ou cúbicos. Assim, para definir a configuração do elemento necessita-se de outras informações além das coordenadas dos nós de canto. Para isto, pode-se utilizar 1 ponto (polinômios quadráticos) ou 2 pontos (polinômios cúbicos) entre os nós de canto.

Assim, pontos na superfície de referência são aproximados por :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^k N_i^r \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (22)$$

A referência [6] mostra as funções de interpolação aqui utilizadas.

CONCLUSÃO

As expressões necessárias para o desenvolvimento de um elemento finito para cascas laminadas foram apresentadas no presente trabalho, segundo uma teoria baseada na continuidade de tensões nas interfaces.

REFERÊNCIAS

1. NOOR, A.K. & BURTON, W. S., "Assessment of Shear Deformation Theories for Multilayered Composite Plates", Applied Mechanics Review, Vol 42, 1989, pag. 1-13.
2. KURBAN, A.E.A., "Cascas Anisótropas Laminadas", Tese de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 1990.
3. KRAUS, H., "Thin Elastic Shells", John Wiley & Sons, New York, 1967.
4. DI SCIUVA, M., "An Improved Shear - Deformation Theory for Moderately Thick Multilayered Anisotropic Shells and Plates", Journal of Applied Mechanics, Vol 54, 1987, pag. 589-596.
5. BOGNER, F.K., FOX, R.L. e SCHMIT Jr, L.A., "The Generation of Inter-Element-Compatible Stiffness and Mass Matrices by the Use of Interpolation Formulas", AFFDL-TR-66-80 Proc. of Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, 1965, pag 397-443.
6. BATHE, K.J., "Finite Elements Procedures in Engineering Analysis", Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, 1982.
7. COOK, R.D., MALKUS, D.S. e PLESHA, M.E., "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", John Wiley & Sons, New York, 1989.

