

ANALISIS POSCRITICO ASINTOTICO DE LAMINAS DE REVOLUCION
COMPUESTAS BAJO CARGA AXILSIMETRICA

Fernando G. FLORES

Luis A. GODOY

Departamento de Estructuras
Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales
Universidad Nacional de Córdoba
Casilla de Correos 916
5000 Córdoba - Argentina

RESUMEN

Se presenta una formulación teórica para el análisis de la estabilidad elástica de sistemas discretos frente a bifurcaciones simétricas. El desarrollo sigue los lineamientos dados por Thompson y Hunt. Se particulariza la formulación para una cáscara de revolución cargada axilsimétricamente, la que se discretiza por elementos finitos semianalíticos. Se combinan los métodos de continuación para el análisis precrítico no lineal y la técnica de perturbaciones para el cálculo poscrítico. Finalmente se presentan algunos resultados numéricos.

ABSTRACT

A theoretical formulation for the elastic stability of discret systems is presented. Only symmetrical bifurcations are considered. This development follows closely the theory presented by Thompson and Hunt. The formulation is applied to symmetrically loaded shells of revolution discretized using a semianalytical finite element. Continuation methods are used for the non-linear precritical path while perturbation techniques are used for the asymptotic approach to the postcritical branch. Finally some numerical results are presented.

INTRODUCCION

Las estructuras laminares capaces de resistir solicitaciones considerables debido a formas geométricas convenientes son muchas veces proclives a fallar por inestabilidad, ya sea debido a bifurcaciones o a puntos límites. Las láminas de revolución cargadas axilsimétricamente son un ejemplo clásico de este tipo de comportamiento [1].

Tradicionalmente la forma mas simple de tratar este tipo de estructuras ha sido mediante análisis de bifurcación considerando trayectorias precriticas lineales y despreciando la flexión introducida por los apoyos [2]. Sin embargo se presentaron casos donde existian fuertes divergencias entre los resultados teóricos y experimentales [1,2]. Se ensayaron distintas explicaciones para estas anomalías. El aporte mas significativo fue indudablemente debido a Koiter [3] quien en su teoría para estabilidad de sólidos continuos mostró que las discrepancias eran debidas a las inevitable imperfecciones existentes en las estructuras reales no consideradas en el modelo; esta teoría permite predecir la mayor o menor sensibilidad de la carga máxima frente a la existencia de dichas imperfecciones. Los desarrollos de Koiter fueron usados extensamente en los años 60 y comienzos de los 70 [4-6]. Posteriormente Thompson y Hunt desarrollaron una teoría similar para sistemas discretos [7], sin embargo sus aplicaciones han sido limitadas.

Otra forma de analizar estas estructuras es introduciendo una imperfección en la estructura y convertir la bifurcación en un punto límite, este esquema combinado con los métodos de continuación desarrollados a partir de finales de los años 70 permiten (si bien a un costo computacional mucho mas elevado) seguir en forma completa las trayectorias poscriticas [8].

La ventaja de usar la primera aproximación radica en que, además del costo computacional, la determinación de las cargas límites para distintos valores de las imperfecciones se realiza en una única corrida. En tanto la desventaja está dada en que la formulación asintótica solo es válida en la vecindad del punto de bifurcación, y para valores pequeños de la imperfección. Además la segunda es indispensable cuando resulta de interés el comportamiento de la estructura a lo largo de la rama poscritica ya que permite seguirla con precisión para grandes desplazamientos. Sin embargo existen muchos casos donde sólo resulta de interés el comportamiento en la vecindad de la trayectoria primaria y la estabilidad del punto crítico mismo; en esos caso el análisis asintótico es indudablemente conveniente.

En este trabajo se presenta un ampliación de la teoría de Thompson y Hunt y su particularización al análisis por elementos finitos de láminas de revolución cargada axilsimétricamente. Se presentan además algunos ejemplos analizados con el objeto de validar la formulación.

TEORIA DE ESTABILIDAD ELASTICA

a) Análisis de puntos criticos distintos con bifurcación simétrica

Consideremos la energía potencial V de un sólido elástico que puede modelarse con un número finito "n" de coordenadas Q_i . Supongamos que esta energía posee a lo mas términos cuárticos en Q_i . Sea Λ un parámetro que indica el nivel de solicitaciones sobre la estructura;

supondremos que V es lineal en Λ y que a su vez los términos que contienen a Λ son lineales en Q_k . Tenemos entonces:

$$V(Q_k, \Lambda) = U(Q_k) + \Lambda f_k Q_k \quad (1)$$

Las ecuaciones de equilibrio resultan (un subíndice en V indica derivada parcial respecto a la coordenada Q_k):

$$V_{k,j} = 0 \quad (2)$$

en tanto que la condición de punto crítico, esto es donde hay un cambio en la estabilidad del sistema está dada por aquellos puntos que satisfacen (2) y la condición:

$$|V_{k,j}| = 0 \quad (3)$$

Supongamos entonces que partimos de un punto de equilibrio conocido, por ej. $(Q_k, \Lambda) = (0, 0)$, y avanzamos sobre la trayectoria no lineal de equilibrio (a lo largo de la cual se satisface (2)) hasta un punto crítico (Q_k^c, Λ^c) . Posicionándonos en este punto aplicamos la técnica de perturbaciones sobre las ecuaciones (2) utilizando como parámetro la coordenada Q_1 . Definamos además:

$$\begin{aligned} Q_k &= Q_k^c + q_k \\ \Lambda &= \Lambda^c + \lambda \end{aligned} \quad (4)$$

la idea de la técnica de perturbaciones es obtener una expansión de q_k y λ en términos del parámetro de perturbación q_1

$$\begin{aligned} Q_k &= Q_k^c + q_k^{(1)} q_1 + \frac{1}{2!} q_k^{(2)} q_1^2 + \dots \\ \Lambda &= \Lambda^c + \lambda^{(1)} q_1 + \frac{1}{2!} \lambda^{(2)} q_1^2 + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

donde se ha usado la notación $()^{(i)} = \frac{\partial^i ()}{\partial q_1^i}$

reemplazando las (5) en la (2) y derivando respecto al parámetro de perturbación obtenemos las 1^{ra} ecuaciones de perturbación

$$V_{k,j} q_j^{(1)} + f_k \lambda^{(1)} = 0 \quad (6)$$

supondremos que el punto de equilibrio es distinto, esto es que el núcleo de $V_{k,j}$ sea de dimensión 1; llamando x al vector que genera al núcleo de $V_{k,j}$

$$V_{k,j}^c x_j = 0 \quad (7)$$

y tomemos $x_1 = 1$. Además por ser q_1 el parámetro de perturbación:

$$q_1^{(i)} = \delta_1^i \quad (8)$$

donde δ_1^i es el delta de Kronecker. Reemplazando (8) en (6) y valuando en el punto crítico:

$$V_{k,j} q_j^{(1)} = -f_k \lambda^{(1)} - V_{k,1} \quad i=1, n \quad j=2, n \quad (9)$$

si $f^T \cdot x \neq 0$ (10)

que corresponde a un punto límite, la solución de (9) es:

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)} &= 0 \\ q_j^{(1)} &= x_j \end{aligned} \quad (11)$$

si $f^T \cdot x = 0$ (12)

el sistema admite mas de una solución y tenemos bifurcación, que es precisamente lo que nos interesa estudiar. Para resolver (9) es necesario considerar las $Z^{2^{\text{da}}}$ ecuaciones de perturbación; derivemos entonces (6):

$$V_{LJK} q_j^{(1)} q_k^{(1)} + V_{LJ} q_j^{(2)} + f_L \lambda^{(2)} = 0 \quad (13)$$

y apliquemos el mecanismo de contracción que consiste en multiplicar cada ecuación por x_L , sumarlas y evaluar en el punto crítico. Teniendo en cuenta además las ecuaciones (7) y (12) obtenemos:

$$V_{LJK} x_L q_j^{(1)} q_k^{(1)} = 0 \quad (14)$$

de (9) podemos escribir:

$$q_j^{(1)} = x_j + y_j \lambda^{(1)} \quad j=2,n \quad (15)$$

donde

$$\begin{aligned} y_L &= 0 \\ y_j &= -(V_{LJ})^{-1} f_L \quad i,j = 2,n \end{aligned} \quad (16)$$

es la tangente a la trayectoria primaria. Reemplazando (15) en (14) y desarrollando

$$\lambda^{(1)2} V_{LJK} x_L y_j y_k + \lambda^{(1)2} 2 V_{LJK} y_k x_L x_j + V_{LJK} x_L x_j x_k = 0 \quad (17)$$

ecuación de $Z^{2^{\text{da}}}$ grado en $\lambda^{(1)}$, si

$$V_{LJK} x_L x_j x_k = 0 \quad (18)$$

entonces $\lambda^{(1)}=0$ es solución (Bif Simétrica) que es el caso que nos interesa aquí, si $V_{LJK} x_L x_j x_k \neq 0$ entonces $\lambda^{(1)} \neq 0$ (Bif asimétrica). Tenemos entonces (consideraremos de ahora en mas sólo bif. simétrica):

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)} &= 0 \\ q_j^{(1)} &= x_j \end{aligned} \quad (19)$$

reemplazando (19) en (13) obtenemos:

$$V_{LJ} q_j^{(2)} = - V_{LJK} x_j x_k - f_L \lambda^{(2)} \quad (20)$$

que puede resolverse similarmente que (15), obteniendo:

$$q_j^{(2)} = z_j + \gamma_j \lambda^{(2)} \quad (21)$$

con

$$\begin{aligned} z_i &= 0 \\ z_j &= -(V_{Lj})^{-1} (V_{Lk1} x_k x_1) \quad \begin{matrix} i, j = 2, n \\ k, l = 1, n \end{matrix} \end{aligned} \quad (22)$$

derivando las (13) obtenemos las 3^{er} ecuaciones de perturbación:

$$V_{LjK1} q_j^{(1)} q_k^{(1)} q_1^{(1)} + 3 V_{Ljk} q_j^{(1)} q_k^{(2)} + V_{Lj} q_j^{(3)} + f_L \lambda^{(3)} = 0 \quad (23)$$

aplicando el mecanismo de contracción y considerando (8)(12)(19) y (22) obtenemos una ecuación lineal en $\lambda^{(2)}$ de donde ésta puede despejarse:

$$\lambda^{(2)} = - \frac{\frac{1}{3} V_{LjK1} x_L x_j x_k x_1 + V_{Ljk} x_L x_j z_k}{V_{Ljk} x_L x_j \gamma_k} \quad (24)$$

el signo de $\lambda^{(2)}$ determina si la bifurcación es estable(+) o inestable (-). Notar que estamos asumiendo que el denominador es no nulo lo que es la condición de un punto crítico distinto. La ecuación (23) permite escribir en forma similar a (15) y (21)

$$q_j^{(3)} = z_j + \gamma_j \lambda^{(3)} \quad (25)$$

En forma similar a lo realizado hasta aquí puede procederse para obtener las derivadas superiores. Notar que los sistemas de ecuaciones lineales a resolver (16) y (22) tienen la misma matriz de coeficientes.

b) Análisis con imperfecciones

Consideremos ahora el caso en que exista una imperfección ϵ tal que convierta el punto de bifurcación en un punto límite. Interesa ahora encontrar la posición de estos puntos límites, esto es la relación que existe entre la magnitud de la imperfección y la disminución que se produce en el valor de la carga máxima (interesan ahora sólo los casos en que $\lambda^{(2)} < 0$). Consideraremos aquí exclusivamente imperfecciones que puedan modelarse como un sistema de cargas. La energía potencia se escribirá ahora como:

$$V(Q_L, \Lambda, \epsilon) = U(Q_L) + \Lambda f_L Q_L + \epsilon g_L Q_L \quad (26)$$

las ecuaciones a perturbar son ahora las de equilibrio (2) y la condición de punto crítico (7), que escribimos como:

$$\begin{aligned} U_L + \Lambda f_L + \epsilon g_L &= 0 \\ V_{Lj} x_j &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

continuaremos usando a la primera coordenada como parámetro de imperfección. Interesa ahora hallar:

$$Q_L^m = Q_L^c + q_L^{m(1)} q_1^m + \frac{1}{2!} q_L^{m(2)} q_1^{m^2} + \dots$$

$$\begin{aligned} \Lambda^M &= \Lambda^e + \lambda^{M(1)} q_1^M + \frac{1}{2!} \lambda^{M(2)} q_1^{M^2} + \dots \\ \epsilon &= 0 + \epsilon^{(1)} q_1^M + \frac{1}{2!} \epsilon^{(2)} q_1^{M^2} + \dots \\ x_1^M &= x_1^e + x_1^{M(1)} q_1^M + \frac{1}{2!} x_1^{M(2)} q_1^{M^2} + \dots \end{aligned} \quad (28)$$

donde el supraíndice M (máximo) es para distinguir de los resultados anteriores. Las primeras ecuaciones de perturbación son:

$$V_{LJ} q_J^{M(1)} + g_L \epsilon^{(1)} + f_L \lambda^{M(1)} = 0 \quad (29.1)$$

$$V_{LJK} q_K^{M(1)} x_J + V_{LJ} x_J^{M(1)} = 0 \quad (29.2)$$

imponiendo $x_1^M = 1$ lo que implica $x_1^{M(1)} = 0$, utilizando el mecanismo de contracción sobre (29.1), tenemos:

$$\underbrace{V_{LJ} x_L}_{0} q_J^{M(1)} + g_L x_L \epsilon^{(1)} + f_L x_L \underbrace{\lambda^{M(1)}}_0 = 0 \quad (30)$$

de donde

$$\epsilon^{(1)} = 0 \quad (31)$$

donde hemos asumido que

$$g_L x_L \neq 0 \quad (32)$$

lo que implica que la imperfección tiene influencia sobre el comportamiento crítico. Llevando este resultado a (29.1) y usando (8) tenemos:

$$V_{LJ} q_J^{M(1)} = -V_{L1} - f_L \lambda^{M(1)} \quad (33)$$

de donde podemos expresar:

$$q_J^{M(1)} = x_J + y_J \lambda^{M(1)} \quad (34)$$

contrayendo ahora las (29.2) nos queda:

$$V_{LJK} x_L x_J q_K^{M(1)} = 0 \quad (35)$$

reemplazando la 34 en la 35 obtenemos

$$V_{LJK} x_L x_J x_K + V_{LJK} x_L x_J y_K \lambda^{M(1)} = 0 \quad (36)$$

recordando la (18) resulta

$$\begin{aligned} \lambda^{M(1)} &= 0 \\ q_J^{M(1)} &= x_J \end{aligned} \quad (37)$$

reemplazando (37) en la (29.2) obtenemos $x_J^{M(1)}$ (recordando que: $x_1^{M(1)} = 0$)

$$x_J^{M(1)} = - (V_{LJ})^{-1} V_{Lk1} x_k x_1 \quad \begin{matrix} i, j = 2, n \\ k, l = 1, n \end{matrix} \quad (38)$$

observando (22) vemos que del análisis sin imperfecciones

$$x_j^{m(1)} = z_j \quad (39)$$

consideremos ahora las $Z^{m(2)}$ ecuaciones de perturbación

$$V_{LJK} q_j^{m(1)} q_k^{m(1)} + V_{LJ} q_j^{m(2)} + g_L \epsilon^{(2)} + f_L \lambda^{m(2)} = 0 \quad (40.1)$$

$$V_{LJK_1} x_j q_k^{m(1)} q_1^{m(1)} + V_{LJK} x_j q_k^{m(2)} + 2V_{LJK} q_k^{m(1)} x_j^{m(1)} + V_{LJ} x_j^{m(2)} = 0 \quad (40.2)$$

realizando contracción sobre la ec. (40.1) nos queda:

$$\underbrace{V_{LJK} x_L x_J x_K}_0 + g_L x_L \epsilon^{(2)} = 0 \quad (41)$$

de donde

$$\epsilon^{(2)} = 0 \quad (42)$$

llevando este resultado a la ec (40.1) valuada en el punto crítico

$$V_{LJ} q_j^{m(2)} = -V_{LJK} x_J x_K - f_L \lambda^{m(2)} \quad (43)$$

en donde puede expresarse $q_j^{m(2)}$ en función de $\lambda^{m(2)}$

$$q_j^{m(2)} = z_j + y_j \lambda^{m(2)} \quad (44)$$

realizando contracción sobre la (40.2) nos queda:

$$V_{LJK_1} x_L x_J x_K x_1 + V_{LJK} y_K x_L x_J \lambda^{m(2)} + 3 V_{LJK} x_L x_J z_K = 0 \quad (45)$$

despejando $\lambda^{(2)}$

$$\lambda^{m(2)} = - \frac{V_{LJK_1} x_L x_J x_K x_1 + 3 V_{LJK} x_L x_J z_K}{V_{LJK} x_L x_J y_K} \quad (46)$$

observando (24) vemos que:

$$\lambda^{m(2)} = 3 \lambda^{(2)} \quad (47)$$

reemplazando (44)(46) y (47) en (40.2) obtenemos:

$$V_{LJK} x_j^{m(2)} = - [V_{LJK_1} x_1 x_m + 3(V_{LJK_1} z_1 + V_{LJK_1} y_1 \lambda^{(2)})] x_m \quad (48)$$

observando (23) y (25) y comparando con (48) concluimos

$$x_j^{m(2)} = z_j \quad (49)$$

derivando la (40.1) y contrayendo obtenemos:

$$V_{LJK_1} x_L x_J x_K x_1 + 3 V_{LJK} x_L x_J q_j^{m(2)} + g_L x_L \epsilon^{(3)} = 0 \quad (50)$$

despejando $\epsilon^{(3)}$ y reemplazando (46) tenemos:

$$\epsilon^{(3)} = 2 \frac{V_{LJK_1} x_L x_J x_K x_1 + 3V_{LJK} x_L x_J z_K}{g_L x_L} \quad (51)$$

En una forma similar puede continuarse para obtener las derivadas superiores de este esquema de perturbaciones.

FORMULACION POR ELEMENTOS FINITOS

La energía V puede escribirse en forma matricial como:

$$V = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \varepsilon \, dV - Q^T \Lambda \int_V \phi^T p \, dV \quad (52)$$

donde σ y ε son las componentes del tensor de tensiones y de deformaciones ordenadas como vectores. En tanto que el vector ϕ está formado por las funciones de mapeamiento de los desplazamientos (ver por ej. [9]) y V es el dominio de la estructura en estudio.

$$\sigma = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}] \quad (53)$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{23}] \quad (54)$$

$$\phi^T Q = (u_1, u_2, u_3) \quad (55)$$

$$p = (p_1, p_2, p_3) \quad (56)$$

Las deformaciones ε se escriben en función de los coordenadas generalizadas Q como

$$\varepsilon = [B_0 + B_1(Q)] Q \quad (57)$$

en tanto que las tensiones se relacionan con estas últimas a través de la matriz de elasticidad D

$$\sigma = D \varepsilon \quad (58)$$

Las ecuaciones de equilibrio (2) resultan ahora:

$$V_i = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_i^T \varepsilon + \sigma^T \varepsilon_i) \, dV + \Lambda f^i = 0 \quad (59)$$

donde

$$\varepsilon_i = [B_0 + B_1(Q)]^i + B_1(\delta_i^j) Q = [B_0 + 2 B_1(Q)]^i \quad (60)$$

$$f^T = \int_V \phi^T p \, dV \quad (61)$$

un supraíndice indica la columna de la matriz o vector correspondiente. Reemplazando (58)(60) en (59) obtenemos:

$$V_i = \frac{1}{2} \int_V [B_0 + 2 B_1(Q)]^{iT} D [B_0 + 2 B_1(Q)] Q + Q^T [B_0 + 2 B_1(Q)]^T D [B_0 + 2 B_1(Q)]^i \, dV + \Lambda f^i = 0 \quad (62)$$

Para resolver el presente problema (ec.62) por medio de un algoritmo numérico es necesario derivar este conjunto de ecuaciones no lineales respecto a los coordenadas generalizadas, lo que permite,

partiendo de un punto de equilibrio conocido, resolver esta ecuación en forma incremental;

$$V_{i,j} = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{i,j}^T \epsilon + \sigma_i^T \epsilon_j + \sigma_j^T \epsilon_i + \sigma^T \epsilon_{i,j}) dV \quad (63)$$

$$\epsilon_{i,j} = 2 B_i(\delta_i^i) \delta_j^j = 2 B_i^i(\delta_i^i) \quad (64)$$

reemplazando (58) y (64) en la (63) obtenemos:

$$\begin{aligned} V_{i,j} = \frac{1}{2} \int_V & \left[B_i^i{}^T D B_i^i + B_i^i{}^T D B_i^i + [2B_i^i(\delta_i^i)]^T \sigma + \sigma^T [2B_i^i(\delta_i^i)] \right. \\ & + B_i^i{}^T D [2B_i^i(Q)] + [2B_i^i(Q)]^T D B_i^i + B_i^i{}^T D [2B_i^i(Q)] + [2B_i^i(Q)]^T D B_i^i \\ & \left. + [2B_i^i(Q)]^T D [2B_i^i(Q)] + [2B_i^i(Q)]^T D [2B_i^i(Q)] \right] dV \quad (65) \end{aligned}$$

las componentes de $V_{i,j}$ forman una matriz que denominaremos K_T (matriz de rigidez tangente)

$$K_T = K_0 + K_\sigma + K_1 + K_2 \quad (66)$$

K_0 es la bien conocida matriz de rigidez de pequeños desplazamientos

$$K_0^{i,j} = \frac{1}{2} \int_V [B_i^i{}^T D B_i^i + B_i^i{}^T D B_i^i] dV \quad (67)$$

K_σ es la matriz de tensiones iniciales

$$K_\sigma^{i,j} = \frac{1}{2} \int_V [2B_i^i(\delta_i^i)]^T \sigma + \sigma^T [2B_i^i(\delta_i^i)] dV \quad (68)$$

y K_1 y K_2 son las componentes de la matriz de grandes desplazamientos

$$K_1 = \frac{1}{2} \int_V B_i^i{}^T D [2B_i^i(Q)] + [2B_i^i(Q)]^T D B_i^i + B_i^i{}^T D [2B_i^i(Q)] + [2B_i^i(Q)]^T D B_i^i dV \quad (69)$$

$$K_2 = \frac{1}{2} \int_V [2B_i^i(Q)]^T D [2B_i^i(Q)] + [2B_i^i(Q)]^T D [2B_i^i(Q)] dV \quad (70)$$

finalmente la ecuación incremental queda:

$$K_T \Delta Q + \Delta \Lambda f = 0 \quad (71)$$

Si se considera que los desplazamientos son pequeños la (71) resulta simplemente:

$$K_0 Q = \Lambda f \quad (72)$$

Para realizar un análisis de estabilidad con trayectorias precriticas lineales (en la cual σ es proporcional a Λ) hay que

resolver el siguiente problema de autovalores:

$$(K_0 + \Lambda K_\sigma(\sigma_0)) \phi = 0 \quad (73)$$

donde σ_0 es el estado tensional para el valor de carga de referencia ($\Lambda=1$) obtenido con (72).

Análisis de estabilidad con trayectorias poscríticas no lineales pueden resolverse llevando a cabo un análisis no lineal hasta que ocurra una bifurcación. Dicha bifurcación se detecta resolviendo un problema de autovalores de la forma:

$$[K_T + \Delta \Lambda K_T'] \phi = 0 \quad (74)$$

donde K_T' es la derivada de la matriz tangente respecto al parámetro de carga Λ ; para obtener dicha matriz recordando que $K_T^{i,j} = V_{i,j}$, observemos que $\frac{dV_{i,j}}{d\Lambda} = V_{i,jk} \frac{dQ_k}{d\Lambda}$, de (71) obtenemos que:

$$\frac{dQ}{d\Lambda} = -K_T^{-1} f = y \quad (75)$$

en tanto que $V_{i,jk}$ se deriva a partir de las (63) usando (60) y (64)

$$V_{i,jk} = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{i,j}^T \epsilon_k + \sigma_{i,k}^T \epsilon_j + \sigma_{i,j}^T \epsilon_{j,k} + \sigma_{i,k}^T \epsilon_{j,i} + \sigma_{j,i}^T \epsilon_{k,i} + \sigma_{j,i}^T \epsilon_{k,i}) dV \quad (76)$$

$$\begin{aligned} V_{i,jk} = \frac{1}{2} \int_V & \left\{ [ZB_1^i(\delta_1^i)]^T [B_0 + 2B_1(Q)]^{k+} [B_0 + 2B_1(Q)]^{kT} [ZB_1^i(\delta_1^i)] \right. \\ & + B_0^T D [ZB_1^i(\delta_1^i)] + [ZB_1^i(\delta_1^i)]^T D B_0^T + B_0^T D [ZB_1^i(Q)] + [ZB_1^i(Q)]^T D B_0^T \\ & + [ZB_1^i(Q)]^T D [ZB_1^i(\delta_1^i)] + [ZB_1^i(\delta_1^i)]^T D [ZB_1^i(Q)] \\ & \left. + [ZB_1^i(\delta_1^i)]^T D [ZB_1^i(Q)] + [ZB_1^i(Q)]^T D [ZB_1^i(\delta_1^i)] \right\} dV \end{aligned} \quad (77)$$

$$V_{i,j} = V_{i,jk} \frac{dQ_k}{d\Lambda} = K_T' \quad (78)$$

$$K_T' = K_0' + K_1' + K_2' \quad (79)$$

La resolución de la ecuación incremental (71) combinada con la búsqueda del punto crítico lleva finalmente a la determinación precisa del punto de bifurcación. A partir de ese punto es necesario realizar la aproximación asintótica, para lo cual se necesita de la derivada cuarta de V , la cual puede obtenerse de (76) y (77)

$$V_{i,jk_1} = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{i,j}^T \epsilon_{k_1} + \sigma_{i,k_1}^T \epsilon_j + \sigma_{i,j}^T \epsilon_{j,k_1} + \sigma_{i,k_1}^T \epsilon_{j,i} + \sigma_{j,i}^T \epsilon_{k_1,i} + \sigma_{j,i}^T \epsilon_{k_1,i}) dV \quad (80)$$

reemplazando (58) y (64) en (80)

$$\begin{aligned} V_{i,jk_1} = \frac{1}{2} \int_V & \left\{ [ZB_1^i(\delta_1^i)]^T [ZB_1(\delta_1^i)]^{k_1+} [ZB_1(\delta_1^i)]^{k_1T} [ZB_1^i(\delta_1^i)] \right. \\ & + [ZB_1^i(\delta_1^i)]^T D [ZB_1^i(\delta_1^i)] + [ZB_1^i(\delta_1^i)]^T D [ZB_1^i(\delta_1^i)] \\ & \left. + [ZB_1^i(\delta_1^i)]^T D [ZB_1^i(\delta_1^i)] + [ZB_1^i(\delta_1^i)]^T D [ZB_1^i(\delta_1^i)] \right\} dV \end{aligned} \quad (81)$$

PARTICULARIZACION PARA LAMINAS DE REVOLUCION

La formulación hasta aquí presentada es particularmente fácil de implementar en láminas de revolución bajo carga axilsimétrica utilizando elementos finitos para discretizar el meridiano y series de Fourier para modelar el comportamiento a lo largo del paralelo (Elementos Finitos Semianalíticos). En tal caso al ser la carga axilsimétrica el comportamiento precritico es también axilsimétrico, y basta considerar el modo 0 de la serie de Fourier, entonces el sistema incremental (71) resulta con un limitado número de grados de libertad; por lo que el análisis no lineal no es costoso. La (63) se escribe:

$$\begin{bmatrix} N_{\alpha 1} \\ N_{\alpha 2} \\ N_{\alpha 3} \\ M_{\alpha 1} \\ M_{\alpha 2} \\ M_{\alpha 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_m & C_n & & & & \\ & C_n & C_r & & & \\ & & & C_\alpha & & \\ & & & & D_m & D_n \\ & & & & D_n & D_r \\ & & & & & & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \\ \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ 2\chi_{12} \end{bmatrix} \quad (82)$$

donde $N_{\alpha j}$ y $M_{\alpha j}$ son los esfuerzos membranales y momentos flectores en la lámina y $\epsilon_{\alpha j}$ y $\chi_{\alpha j}$ son las deformaciones y cambios de curvatura de la superficie media. Por otro lado la (57) se escribe:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \\ \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ 2\chi_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right] B_0 \end{bmatrix} + \frac{1}{Z} \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta & \beta \\ & \beta_2 & \beta \\ & \beta_2 & \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix} \quad Q \quad (83)$$

donde los β_i son los giros de la normal y G_i son las componentes de la matriz que relaciona los β_i con las Q (ver por ej. [10-11]). Reemplazando en (68)(69) y (70) obtenemos la matriz tangente K_T para la armónica circunferencial J en un punto de equilibrio $E (G_i^E, A^E)$:

$${}^J K_T^E = {}^J K_C^E + {}^J K_C^E + {}^J K_\alpha^E + {}^J K_G^E \quad (84)$$

con

$${}^J K_C^E = \pi \int_0^{s_0} r {}^J B_0^T D {}^J B_0 dx_1 \quad (85)$$

donde s_0 es la longitud del elemento y r es la distancia al eje de revolución. Notar que la integral en la dirección del paralelo ya ha sido realizada. Llamando

$${}^J K_G^E = {}^J K_1^E + {}^J K_2^E + {}^J K_3^E \quad (86)$$

reemplazando (82)(83) en (68)-(70) y sumando, puede demostrarse que:

con lo que se obtiene un aproximación a la carga $\Lambda^C = \Lambda^E + \Delta\Lambda$, al desplazamiento $Q^C = Q^E + \Delta Q$ y al modo crítico ψ . Este esquema de autovalores combinado con el avance sobre la trayectoria no lineal axilsimétrica, permite obtener con precisión el punto crítico (denominaremos x al modo crítico definitivo).

Una vez determinado el o los puntos críticos de interés, cada uno asociado a un armónica circunferencial dada J , planteamos el método de las perturbaciones como fue descripto en la primera parte de este trabajo utilizando como parámetro de perturbación la componente de mayor valor absoluto de x .

Para determinar si la bifurcación es simétrica o asimétrica, hay que evaluar $V_{LJK} x_L x_J x_K$. Teniendo x sólo componentes en la armónica J , la integral se reduce a esta; Al explicitar este producto aparecen en todos los términos productos entre funciones senos y cosenos de a J en la misma armónica J que integrados entre 0 y 2π se anulan (salvo que $J=0$), de donde puede extraerse la siguiente conclusión:

En Cáscaras de Revolución Cargadas Axilsimetricamente sólo es posible una Bifurcación SIMETRICA en Modos no Axilsimétricos.

Bifurcación en J distinto de 0

Siendo la bifurcación simétrica ($\lambda^{(1)}=0, q_j^{(1)}=x_j$) calculemos ahora las derivadas segundas; necesitamos los vectores $V_{LJK} x_L x_J x_K$ cuyas componentes no nulas son exclusivamente en las armónicas 0 y $2J$; llamando 0g y 2g a las componentes de $V_{LJK} x_L x_J x_K$ en las armónicas 0 y $2J$ respectivamente estos pueden calcularse mediante las integrales:

$${}^0g = \pi \int_0^{S_0} r^0 [B_{01}, B_{02}, G_2] \begin{bmatrix} C_0 \dot{\beta}_1^2 + (C_0 + C_n) \dot{\beta}^2 + C_n \dot{\beta}_2^2 \\ C_n \dot{\beta}_1^2 + (C_n + C_r) \dot{\beta}^2 + C_r \dot{\beta}_2^2 \\ \beta_1 (3C_0 \dot{\beta}_1^2 + (C_0 + C_n) \dot{\beta}^2 + (C_n + 2C_e) \dot{\beta}_2^2 \\ + 2((C_0 \dot{\epsilon}_1 + C_n \dot{\epsilon}_2) \dot{\beta}_1 + C_e \dot{\epsilon} \dot{\beta}_2) \end{bmatrix} dx_1 \quad (93)$$

$${}^2g = \frac{\pi}{2} \int_0^{S_0} r^{2J} [B_{01}, B_{02}, B_{03}, G_1, G_2, G_3] \begin{bmatrix} C_0 \dot{\beta}_1^2 - (C_0 + C_n) \dot{\beta}^2 - C_n \dot{\beta}_2^2 \\ C_n \dot{\beta}_1^2 - (C_n + C_r) \dot{\beta}^2 - C_r \dot{\beta}_2^2 \\ 2C_e \beta_1 \dot{\beta}_2 \\ \beta_1 (3C_0 \dot{\beta}_1^2 - (C_0 + C_n) \dot{\beta}^2 - (C_n + 2C_e) \dot{\beta}_2^2 + 2((C_0 \dot{\epsilon}_1 + C_n \dot{\epsilon}_2) \dot{\beta}_1 - C_e \dot{\epsilon} \dot{\beta}_2) \\ 2(\beta_1 (C_n + 2C_e) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 + (C_n \dot{\epsilon}_1 + C_r \dot{\epsilon}_2) \dot{\beta}_2 + C_e \dot{\epsilon} \dot{\beta}_1) \\ 2\dot{\beta}((C_0 + C_n)(\beta_1 \dot{\beta}_1 + \dot{\epsilon}_1) + (C_n + C_r) \dot{\epsilon}_2) \end{bmatrix} dx_1 \quad (94)$$

estas integrales permiten calcular:

$${}^0z = -[{}^0K_T]^{-1} {}^0g \quad {}^2z = -[{}^2J K_T]^{-1} {}^2g \quad (95)$$

a continuación notemos que

$$V_{LJK} x_L x_J x_K = {}^0g^T \cdot {}^0z + {}^2g^T \cdot {}^2z \quad (96)$$

en tanto que

$$V_{LJK} x_L x_J y_k = {}^0g^T \cdot y \quad (97)$$

sólo resta entonces calcular $V_{LJKL} x_L x_J x_k x_L$ para obtener $\lambda^{(2)}$

$$V_{LJKL} x_L x_J x_k x_L = \frac{3}{4} \pi \int_0^{2\pi} 3(C_0 \beta_1^4 + C_r \beta_2^4 + (C_0 + 2C_r + C_r) \beta^4) + 2((C_0 + C_r) \beta_1^2 \beta^2 + (C_r + 2C_e) \beta_2^2 \beta^2 + 3(C_r + C_r) \beta_2^2 \beta^2) dx_1 \quad (98)$$

de donde podemos calcular

$$\lambda^{(2)} = - \frac{\frac{1}{3} V_{LJKL} x_L x_J x_k x_L + {}^0g^T \cdot {}^0z + {}^2g^T \cdot {}^2z}{{}^0g^T \cdot y} \quad (99)$$

en tanto que

$$q^{(2)} = ({}^0z + y \lambda^{(2)}) + {}^2z \quad (100)$$

En caso de presencia de imperfecciones, la derivada tercera del parámetro de imperfección resulta :

$$\epsilon^{(3)} = 2 \frac{V_{LJKL} x_L x_J x_k x_L + 3({}^0g^T \cdot {}^0z + {}^2g^T \cdot {}^2z)}{x^T \cdot f} \quad (101)$$

Similarmente pueden calcularse las siguientes derivadas. Digamos además que $\lambda^{(3)} = 0$ y que $q^{(3)}$ tiene componentes en las armónicas J y 3J, en tanto que $q^{(4)}$ tiene componentes en las armónicas 0, 2J y 4J. La determinación de las integrales necesarias para el cálculo de las derivadas ha sido llevada a cabo usando un manipulador simbólico (REDUCE) ya que a partir de las derivadas terceras se vuelve engorroso el manejo algebraico de las ecuaciones.

RESULTADOS NUMERICOS

Con el objeto de validar la formulación utilizada y el código desarrollado, es necesario comparar casos resueltos en la literatura con los resultados que arroja el programa.

. Placa circular simplemente apoyada con carga coplanar (Fig.1)

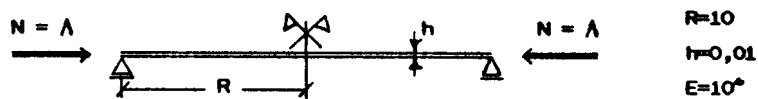


Fig. 1. Placa simplemente apoyada, geometría y cargas

Este caso es tal vez el caso mas simple que se puede analizar en el caso de láminas de revolución. Una solución analítica del mismo en términos de funciones de Bessel se ha obtenido en [7]. Para los valores de la Fig.1 y $\nu = 0,3$ los resultados son los siguientes:

$$\Lambda^c = 3,84432 \text{ y } \lambda^{(2)} = 20778$$

donde se usa como parámetro de perturbación el desplazamiento del centro de la placa en el modo crítico, que en este caso es axisimétrico. El programa, con 5 elementos igualmente espaciados, da los siguientes valores:

$$\Lambda^c = 3,84413 \text{ y } \lambda^{(2)} = 20787$$

que muestra una excelente concordancia con los obtenidos por Thompson. Por otro lado con el objeto de mostrar la aproximación a la trayectoria postcrítica, se ha realizado un análisis no lineal de la placa (usando una versión anterior del código debidamente probado [11]), en la que se ha introducido una pequeña carga normal para obligarla a que se desvíe por la trayectoria secundaria. En la Fig.2 se muestran las trayectorias no lineal y asintótica, donde se ve la excelente aproximación lograda aún para valores del orden de dos veces la carga crítica.

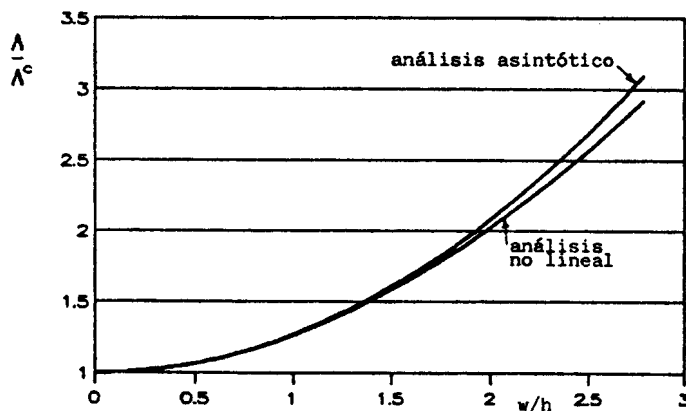


Fig. 2. Análisis No-Lineal vs. Análisis Asintótico

Placa Anular Empotrada con Carga Coplanar (Fig.3)

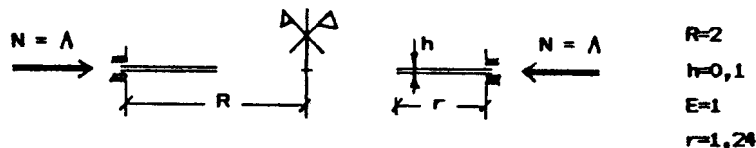


Fig.3 Placa anular empotrada-libre, geometría y carga

Este ejemplo fue considerado en la ref.[12]; allí se introduce una imperfección lateral y se resuelven las ecuaciones no lineales de equilibrio en forma numérica. En la Fig.4 se muestran las trayectorias postcríticas para los primeros 5 modos obtenidos con el presente código. Los resultados comparados con [12] muestran las mismas cargas críticas en tanto que las trayectorias postcríticas son cualitativamente

similares pero difieren un poco en sus valores; estas diferencias aparecen también en la trayectoria axilsimétrica, la que podemos comparar con resultados no lineales propios y hemos encontrado una coincidencia del tipo mostrado en la Fig.2

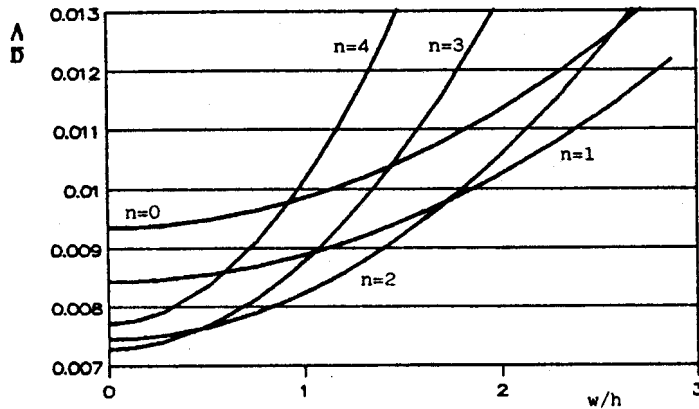
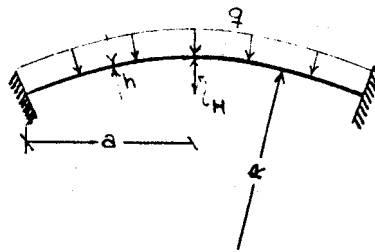


Fig.4. Trayectorias poscríticas (Δ vs w) para distintos modos

Esfera Rebajada Empotrada Sometida a Presión Externa

Este tipo de estructuras han sido objeto de numerosos estudios teóricos [5,13] y experimentales [14] en los años 60 y comienzos de los 70. En particular de [5] (donde se realizan extensos estudios paramétricos) se ha tomado un ejemplo cuya geometría y cargas se muestran en la Fig.5



- $a = 21$
- $R = 100$
- $h = 0,1$
- $H = 2,73$
- $E = 10^6$
- $\nu = 1/3$

Fig.5 Domo empotrado bajo presión externa, geometría y cargas

En [5] los resultados se presentan en forma adimensional, en particular la carga aparece referida a la carga crítica clásica de un esfera completa bajo presión externa $q_0 = 2 E (h/R)^2 / [3(1-\nu^2)]^{1/2}$. Para la geometría y carga de la Fig.5 los resultados obtenidos por Fitch y Budiansky son:

$$q^c/q_0 = 0,78$$

$$n = 7 \text{ (número de la armónica circunferencial)}$$

$$\frac{1}{2}[q^{(2)}/q^c] h^2 = b = -1.08$$

donde el parámetro de perturbación es el máximo desplazamiento normal a la cáscara en el modo crítico (a aproximadamente $a/4$ medido desde el empotramiento); reemplazando los valores de la Fig.5 se obtiene:

$$q_0 = 0,012247 \quad q^c = 0,00955301 \quad q^{(2)} = -2,06345$$

el presente código, modelando con 12 elementos (85 grados de libertad en el análisis no lineal y 121 en el cálculo de autovalores) produce los siguientes resultados:

$$q^c = 0,00955773 \quad q^{(2)} = -2,00$$

vemos que los resultados muestran una excelente correlación no sólo en el valor de la carga crítica sino también en la derivada segunda.

CONCLUSIONES

Basandose en la teoría elaborada por Thompson y Hunt se ha desarrollado una estrategia que no incluye el reemplazo de la trayectoria precritica en la energía potencial V . En particular se han estudiado bifurcaciones del tipo simétricas y se ha considerado análisis de sensibilidad ante imperfecciones.

Se ha presentado una formulación general usando el método de elementos finitos y se ha particularizado para láminas de revolución cargadas axilsimetricamente, donde la metodología resulta particularmente simple y eficiente.

El código computacional desarrollado ha sido empleado para comparar resultados existentes en la literatura, los que han mostrado una excelente correlación con los entregados por el programa. Además se ha comparado la aproximación asintótica con el análisis no lineal en un caso de imperfecciones pequeñas; los resultados en el ejemplo presentado han sido excelentes, si bien la estructura analizada es particularmente simple y con comportamiento poscrítico estable.

Queda abierta la posibilidad de utilizar esta herramienta numérica para el análisis de muchas estructuras de interés en los campos de la ingeniería civil y mecánica, cuyo comportamiento es fundamentalmente del tipo de inestabilidad por bifurcación

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo brindado por CONICET durante el desarrollo de la presente investigación.

REFERENCIAS

- [1] Bushnell, D., "Computerized Buckling Analysis of Shells", Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1985.

- [2] Brush, D., Almroth, B., "Buckling of Bars Plates and Shells", Mc. Graw Hill Co., New York, 1975.
- [3] Koiter, W.T., "Elastic Stability and Postbuckling Behaviour", Proc. Symp. Nonlinear Problems, R.E.Langer (Ed.), pp. 257-275, Univ. of Wisconsin Press, Madison, 1963.
- [4] Budiansky, B., Amazigo, J.C., "Initial Postbuckling Behaviour of Cylindrical Shells under External Pressure", J. Math. Phys., vol. 47, 1968, pp. 223-235.
- [5] Budiansky, B., Hutchinson, J.W., "A Survey of Some Buckling Problems", AIAA J., vol. 4, 1966, pp. 1505-1510.
- [6] Fitch, J.R., Budiansky, B., "Buckling and Postbuckling Behaviour of Spherical Caps under Axisymmetric Load", AIAA Journal, vol. 8(4), 1970, pp. 686-693.
- [7] Thompson, J.M.T., Hunt, G.W., "A General Theory of Elastic Stability", John Wiley & Sons, New York, 1973.
- [8] Riks, E., "Some Computational Aspects of the Stability Analysis of Non-linear Structures", Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., vol. 47, 1984, pp.219-259.
- [9] Zienkiewicz, O.C., "The Finite Element Method", Mc. Graw Hill, London, 1977.
- [10] Flores, F.G., Godoy, L.A., "Un Elemento Semianalitico para Cáscaras de Revolución con Intersecciones bajo Cargas Arbitrarias" IV Encuentro Nacional de Investigadores y Usuarios del Método de Elementos Finitos (ENIEF'86), Mecánica Computacional vol. 5, L. Godoy (Ed.), pp. 28-48, 1986.
- [11] Flores, F.G, Godoy, L.A., "Finite Element Applications of the Internal Pressure Loadings on Spherical and Other Shells of Revolution", Finite Element Applications of Thin Walled Structures II, John Bull (Ed.), cap. 9, Elsevier, (en prensa).
- [12] Radwanska, W., Waszczyszyn, Z., "Numerical Analysis of Nonsymmetric Behaviour of Elastic Annular Plates", Compt. Meths. Applied Mech. Engng., vol. 23, 1980, pp. 341-353.
- [13] Akkas, N., Bauld, N.R., "Buckling and Postbuckling of Spherical Caps", ASCE J. Engng. Mech. Div., (june 1971), pp. 727-740.
- [14] Penning, F.A., "Experimental Buckling Modes of Clamped Shells under Concentrated Loads", J. of Applied Mechanics, vol. 33, 1966, pp. 297-304.