ANALISIS DE ESTABILIDAD DE ARCOS BAJO PRESION UNIFORME MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS

Jorge E. Crempien Laborie
Departamento de Ingeniería Civil
Facultad de Arquitectura, Ingeniería y Const. Civil
Universidad del Norte
Antofagasta, Chile

RESUMEN

Este tipo de estructuras presenta un estado de tensiones que no es trivial, una carga límite superior, una carga límite inferior y un punto de bifurcación.

Primero, el criterio de Trefftz es expresado explicitamente en términos de los componentes radiales y tangenciales de desplazamientos del arco tratado como un continuo. Seguidamente, se establece una discretización del critério de Trefftz en la cual los términos correspondientes a la rigidez elástica, la rigidez geométrica y los términos lineales y cuadráticos de las matrices de desplazamientos iniciales son identificados separadamente. Se remarca que la teoría clásica de pandeo de Euler, la cual desprecia los desplazamientos prepandeo, corresponde a una aproximación de primer orden incompleta del critério de Trefftz. Otras dos alternativas al proceso son las aproximaciones de primer orden completa y de segundo orden completa. También se analiza una versión simple del critério de Dupuis.

ABSTRACT

This type of structure presents a nontrivial state of stress, an upper limit load, a lower limit load and a bifurcation load.

First, The Trefftz criterion is expressed explicitly in terms of the radial and tangential displacements of the arch treated as a continuum. A finite element discretization of the Trefftz criterion is then proposed. In this formulation the elastic stiffness, the geometric stiffness, and the linear and quadratic terms of the initial displacement matrix are identified. It is enphasised that the classical Euler buckling analisis, which neglects prebuckling displacements, corresponds to an incomplete first order approximation of the Trefftz criterion. Two other possible aproximations are the complete first order and the second order aproximations. A simple version of the Dupuis buckling analysis is also applied.

1 COMPORTAMIENTO DE UN ARCO CIRCULAR BAJO PRESION UNIFORME

De la solución exacta completa [1] se encuentra que el arco se pandea en un modo antisimétrico en el punto de bifurcación, en tanto que lo hace en forma simétrica en los puntos de carga límite superior y límite inferior. La carga de bifurcación es inferior a la carga límite superior.

2 ESTABILIDAD DEL ARCO - EL CRITERIO DE TREFFTZ

2.1 EXPRESIONES DE TENSIONES Y DEFORMACIONES

A continuación se desarrolla el critério de Trefftz para analizar la estabilidad del arco. En la figura 1 se muestran las propiedades geométricas de un segmento de arco.

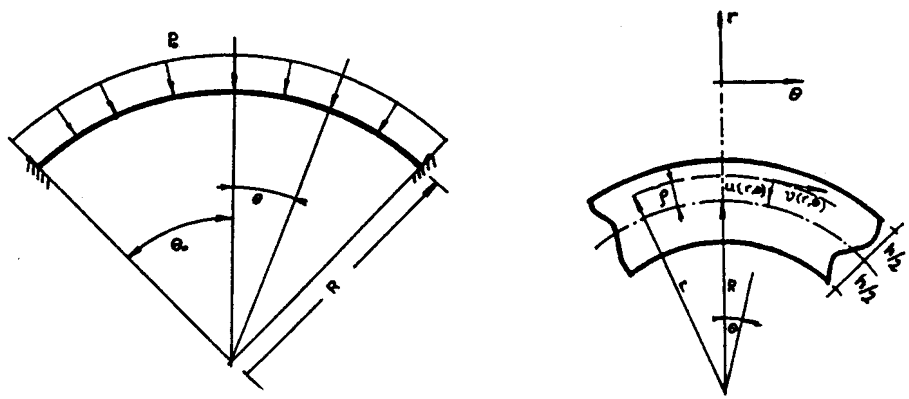

Fig. 1 Propiedades geométricas de un segmento de arco, mostrando las variables cinemáticas

Primeramente, se adoptan las siguentes supociciones usuales para anillos, las que se resumen como

$$\sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{rr} << \sigma_{\theta\theta} \tag{1a}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{zr} = 0 \tag{1b}$$

El tensor de deformaciones de Green-Lagrange $\varepsilon_{\theta\theta}$ se puede escribir en terminos de los desplazamientos como

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\left[v,_{\theta} + u + \frac{1}{r}(v,_{\theta} + u)^2 + \frac{1}{2r}w,^2_{\theta} + \frac{1}{2r}(u,_{\theta} - v)^2\right] \tag{2}$$

y usando las condiciones dadas en la Ec. 1 se puede reducir a

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\,(\,v,_{\theta} + u\,) + \frac{1}{2r^2}\,u,^2_{\theta} \tag{3}$$

en el caso de un arco delgado. Notese que $w,_{\theta}=0$, y que se desprecia v^2, $(v,_{\theta})^2$, y u^2 y se retiene $(u,_{\theta})^2$. Esto corresponde a una suposición de que los desplazamientos son pequeños y las rotaciones grandes. Más aún, se puede escribir

$$u(r,\theta) = u(R,\theta) = \hat{u}(\theta) \tag{4a}$$

$$v(r,\theta) = v(R,\theta) + (r-R)v(R,\theta),_{r} = \hat{v}(\theta) + \rho\hat{v},_{r} \tag{4b}$$

Como el problema presenta simetría puntual, se supuso que $\varepsilon_{r\theta}=0$, esto hace que se pueda escribir que:

$$v,_{r} = \frac{1}{r}(u,_{\theta} + v) \tag{5}$$

Utilizando la Ec. (5), se puede encontrar un relación aproximada para los desplazamientos longitudinales del arco v dados por

$$v(r,\theta) = \hat{v} + \frac{\rho}{R}\,\hat{u},_{\theta} \tag{6}$$

luego, las componentes del tensor de deformaciones pueden escribirse en términos de los desplazamientos obtenidos en las ecuaciones (4) a (6) como

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \hat{\varepsilon}_{\theta\theta} + \rho\hat{\varkappa} \tag{7a}$$

$$\hat{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{1}{R}\hat{u},_{\theta} - \frac{\hat{u}}{R} + \frac{1}{2R^2}\,\hat{u},^2_{\theta} \tag{7b}$$

$$\hat{\varkappa} = \frac{1}{R^2}\,\hat{u},_{\theta\theta} \tag{7c}$$

Con las expresiones de la cinemática del problema resueltas, se puede emprender la tarea de formular la energía potencial del sistema.

2.2 ENERGIA POTENCIAL TOTAL

Suponiendo que el material de que esta hecho el arco es linealmente elástico, las relaciones constititivas entregan las tensiones de acuerdo con

$$\sigma_{\theta\theta} = E\ \varepsilon_{\theta\theta} \tag{8}$$

La energía de deformación en el arco es

$$\mathbb{U} = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{\theta\theta}\ \varepsilon_{\theta\theta}\ dV = \frac{1}{2}\int_V E\ \varepsilon^2_{\theta\theta} dV \tag{9}$$

Sustituyendo las Ecs. 7 en esta última ecuación, y además notando que

$$\int_A \rho dA = 0 \quad ; \quad \int_A \rho^2\ dA = 0 \tag{10}$$

la energía de deformación se puede escribir como

$$\mathbb{U} = \frac{1}{2}\int_{-\theta_\circ}^{\theta_\circ} (E\ A\ \hat{\varepsilon}^2_{\theta\theta} + E\ I\ \hat{\kappa}^2)\ R\ d\theta \tag{11}$$

Por otra parte, la energía potencial debido a la presion uniforme es

$$\mathbb{V} = \int_{-\theta_\circ}^{\theta_\circ} p_\circ\ \hat{u}\ R\ d\theta \tag{12}$$

Por lo tanto, la energía potencial total del sistema se puede expresar como sigue

$$\mathbb{P} = \mathbb{U} + \mathbb{V} \tag{13}$$

En que $\mathbb{U}$ esta dada por la Ec. (11) y $\mathbb{V}$ está dada por la Ec. (12).

2.3 EL CRITERIO DE TREFFTS PARA LA ESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO

Si la estructura ha alcanzado la configuración de equilibric bajo la acción de una presión $p_\circ$, en que $\hat{u}_\circ$ y $\hat{v}_\circ$ son los desplazamientos correspondientes, se puede analizar la estabilidad de dicha configuración para una configuración muy próxima dada por los desplazamientos

$$\hat{u} = \hat{u}_\circ + \varepsilon\ u^* \tag{14a}$$
$$\hat{v} = \hat{v}_\circ + \varepsilon\ v^* \tag{14b}$$

en que ε es un escalar infinitesimal, y u^* y v^* corresponden a desplazamientos arbitrarios pero cinemáticamente admisibles.

Sustituyendo las Ecs. (14) en la Ec. (7) se obtienen las componentes del tensor de deformaciones,

$$\hat{\varepsilon}_{\theta\theta} = g_{\circ} + \varepsilon\, g_{1} + \frac{\varepsilon^{2}}{2}\, g_{2} \tag{15a}$$

$$\hat{\varkappa} = h_{\circ} + \varepsilon\, h_{1} \tag{15b}$$

en que

$$g_{\circ} = \frac{1}{R}\frac{dv_{\circ}}{d\theta} - \frac{u_{\circ}}{R} + \frac{1}{2R^{2}}\left(\frac{du_{\circ}}{d\theta}\right)^{2} \tag{16a}$$

$$g_{1} = \frac{1}{R}\frac{dv^{*}}{d\theta} - \frac{u}{R} + \frac{1}{2R^{2}}\left(\frac{du_{\circ}}{d\theta}\right)^{2} \tag{16b}$$

$$g_{2} = \frac{1}{R^{2}}\left(\frac{du^{*}}{d\theta}\right)^{2} \tag{16c}$$

$$h_{\circ} = \frac{1}{2R^{2}}\frac{d^{2}u_{\circ}}{d\theta^{2}} \tag{16d}$$

$$h_{1} = \frac{1}{R^{2}}\frac{d^{2}u^{*}}{d\theta^{2}} \tag{16e}$$

ahora, sustituyendo las Ecs. (14) y (15) en la Ec. (13), se puede expresar la energía potencial total en series de ε como sigue.

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_{o} + \varepsilon\, \mathbb{P}_{1} + \varepsilon^{2}\, \mathbb{P}_{2} + O(\varepsilon^{3}) \tag{17a}$$

donde $\mathbb{P}_{o}$, $\mathbb{P}_{1}$, y $\mathbb{P}_{2}$ estan dados por:

$$\mathbb{P}_{o} = \frac{1}{2}\int\left[\,E\,A\,g_{o}^{2} + E\,I\,h_{o}^{2}\,\right] R\,d\theta - \int p_{o}\,u_{o}\,R\,d\theta \tag{17b}$$

$$\mathbb{P}_{1} = \int\left[\,E\,A\,g_{o}\,g_{1} + E\,I\,h_{o}\,h_{1}\,\right] R\,d\theta - \int p_{o}\,u^{*}\,R\,d\theta \tag{17c}$$

finalmente,

$$\mathbb{P}_{2} = \frac{1}{2}\int\left[\,E\,A(\,g_{o}\,g_{2} + g_{1}^{2}\,) + E\,I\,h_{1}^{2}\,\right] R\,d\theta \tag{17d}$$

en estas últimas expresiones $\mathbb{P}_{o}$, es la energía potencial total, $\mathbb{P}_{1}$ es la primera variación, y $\mathbb{P}_{2}$ es la segunda variación de la energía potencial total.

Como el sistema está en equilibrio, $\mathbb{P}_{1} = 0$, $\forall\ u^{*}, v^{*}$ cinemáticamente admisible (CA). La estabilidad de esta configuración de equilibrio está determinada por el hecho de si la segunda variación de la energía potencial total $\mathbb{P}_{2}$

es positiva definida o no, esto es:

$$\mathbb{P}_2 > 0 \ , \ \forall\, u^*, \ v^* \ (CA) \tag{18}$$

Esta condición es el **critério de Trefftz.** La estructura está en una configuración de equilibrio inestable si $\mathbb{P}_2 \leq 0$. Luego, el estado crítico queda determinado por

$$\mathbb{P}_2 = 0, \ \forall\, u^*, \ v^* \ (CA) \tag{19}$$

Reemplazando las Ecs. (16) en la Ec. (17d), se obtiene la expresión de la segunda variación, dada por

$$2\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}_{21} + \mathbb{P}_{22} + \mathbb{P}_{23} + \mathbb{P}_{24} = 0 \tag{20a}$$

en que

$$\mathbb{P}_{21} = \int \left[E\ A\ \left(\frac{1}{R}\frac{dv^*}{d\theta} - \frac{u^*}{R}\right)^2 + E\ I\ \frac{1}{R^4}\ \left(\frac{d^2u^*}{d\ \theta^2} \right) \right] R\ d\theta \tag{20b}$$

$$\mathbb{P}_{22} = \int \left[E\ A\ \left(\frac{1}{R}\frac{d\hat{v}_o}{d\theta} - \frac{\hat{u}_o}{R} \right) \frac{1}{R^2} \left(\frac{du^*}{d\theta}\right)^2 \right] R\ d\theta \tag{20c}$$

$$\mathbb{P}_{23} = 2 \int \left[E\ A\ \left(\frac{1}{R}\frac{dv^*}{d\theta} - \frac{u^*}{R} \right) \frac{1}{R^2}\frac{d\hat{u}_o}{d\theta}\frac{du^*}{d\theta} \right] R\ d\theta \tag{20d}$$

$$\mathbb{P}_{24} = \frac{3}{2} \int \left[E\ A\ \frac{1}{R^4} \left(\frac{d\hat{u}_o}{d\theta}\right)^2 \left(\frac{du^*}{d\theta}\right)^2 \right] R\ d\theta \tag{20e}$$

Con estas expresiones para la segunda variacion de la energía total, se obtendrá una formulación del problema mediante elemntos finitos.

3.0 FORMULACION MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS

3.1 FUNCIONES DE FORMA

Con el objeto de aprovechar la uniformidad y simetría del problema, el arco se discretizará usando elementos de igual largo. Para asegurar continuidad C^1 en el interface de los elementos, estos que $\hat{u}$ y $\hat{v}$ sean continuas hasta sus primeras derivadas con respecto a θ, cada nodo tendrá 4 grados de libertad: $\hat{u}$, $d\hat{u}/d\theta$, $\hat{v}$, y $d\hat{v}/d\theta$. De esta forma, los deplazamientos radial y transversal $\hat{u}$ y $\hat{v}$ quedan dados por:

$$\hat{u} = N_1\ \hat{u}_1 + N_2\ \hat{u}_2 + N_3\ \hat{u}_3 + N_4\ \hat{u}_4 \tag{21a}$$

$$\hat{v} = N_1\ \hat{v}_1 + N_2\ \hat{v}_2 + N_3\ \hat{v}_3 + N_4\ \hat{v}_4 \tag{21b}$$

donde los $N_i = N_i(\xi)$ con $i=1,4$ son polinomios de Hermite usados para la interpolación de los desplazamientos. La variable ξ varía entre -1 y 1. Para este caso los polinomios son:

$$N_1(\xi) = \frac{1}{4}\left[\xi^3 - 3\xi + 2\right] \qquad (22a)$$

$$N_2(\xi) = \frac{1}{4}\left[-\xi^3 + 3\xi + 2\right] \qquad (22b)$$

$$N_3(\xi) = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\xi)^2 \qquad (22c)$$

$$N_4 = -\frac{1}{8}(1+\xi)^2(1-\xi) \qquad (22d)$$

La geometría del arco se puede representar en forma exacta por la expresión

$$\theta(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi)\theta_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)\theta_2 \qquad (23)$$

en que θ_1 y θ_2 son los valores del arco en el nudo 1 y 2 respectivamente. En la Fig. 2 se muestra la definición de los grados de libertad y la geometría de un elemento de arco.

Fig. 2 Grados de libertad en un elemeto de arco y geometria

De las Ecs. (7a, 7b, 7c) se tiene que el vector de deformación esta dado por

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \varkappa \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/R & 1/R\dfrac{d}{d\theta} \\ 1/R^2\dfrac{d^2}{d\theta^2} & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{2R^2}\left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (24)$$

$$= \varepsilon_o + \varepsilon_L$$

pero, las deformaciones u y v pueden escribirse matricialmente como

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 N_2 N_3 N_4 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ N_1 N_2 N_3 N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u'_1 \\ u'_2 \\ v_1 \\ v_2 \\ v'_1 \\ v'_2 \end{Bmatrix} = \underline{N}\ \underline{q} \qquad (25)$$

por otra parte, el término ε_o puede obtenerse como

$$\varepsilon_o = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N'_1 & N'_2 & N'_3 & N'_4 \\ N''_1/R & N''_2/R & N''_3/R & N''_4/R & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{q} = \underline{B}_o \underline{q} \qquad (26)$$

donde

$$N'_i = \frac{dN_i}{d\theta} = \frac{dN_i}{d\xi} \frac{d\xi}{d\theta} \ ; \ \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{1}{2} \{\theta_2 - \theta_1\} = J \qquad (27)$$

en que J es el jacobiano de la transformación de θ a ξ. Las derivadas de los N_i quedan dados por

$$\begin{aligned} N'_1 &= \frac{3}{2} \frac{1}{(\theta_2-\theta_1)} (\xi^2 - 1) \\ N'_2 &= - N'_1 \\ N'_3 &= -\frac{1}{4} \frac{1}{(\theta_2 - \theta_1)} (1 - \xi)(1 + 3\xi) \\ N'_4 &= -\frac{1}{4} \frac{1}{(\theta_2 - \theta_1)} (1 + \xi)(1 - 3\xi) \end{aligned} \qquad (28)$$

de la misma forma, para las segundas derivadas de los N_i se tiene

$$N''_i = \frac{d^2 N_i}{d\xi^2} \left(\frac{d\xi}{d\theta}\right)^2 \qquad (29)$$

lo que entrega

$$\begin{aligned} N''_1 &= \frac{6\ \xi}{(\theta_1 - \theta_2)^2} \\ N''_2 &= -N''_1 \end{aligned} \qquad (30)$$

$$N_3'' = - \frac{1 - 3\xi}{(\theta_2-\theta_1)^2}$$

$$N_4'' = \frac{1 + 3\xi}{(\theta_2-\theta_1)^2}$$

Evaluando primeramente las expresiones discretizadas de los términos que componen $\mathbb{P}_2$ se tiene

$$\mathbb{P}_{21} = \bar{\underline{q}}^T \int_{-1}^{1} \underline{B}_o^T \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \underline{B}_o \; R \; J \; d\xi \; \bar{\underline{q}} = \bar{\underline{q}}^T \underline{K}_o \bar{\underline{q}} \qquad (31)$$

en que $\underline{K}_o$ es la matriz de rigidez elástica del elemento de arco. El término $\mathbb{P}_{22}$ queda dado por

$$\mathbb{P}_{22} = \bar{\underline{q}}^T \int_{-1}^{1} \underline{B}_o^T \left\{ \begin{matrix} N_1' \\ N_2' \\ N_3' \\ N_4' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} [N_1' \; N_2' \; N_3' \; N_4' \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \,] \; R \; J \; d\xi \; \bar{\underline{q}} =$$

$$\bar{\underline{q}}^T \underline{K}_g \underline{q} \qquad (32)$$

en que $\underline{K}_g$ es la matriz de rigidez geométrica. Considerando a continuación el término $\mathbb{P}_{23}$ se tiene

$$\mathbb{P}_{23} = \bar{\underline{q}}^T \int_{-1}^{1} EA \begin{bmatrix} B_o''^T \\ B_o'^{2T} \end{bmatrix} \frac{1}{R^2} \begin{bmatrix} B_L' & 0 \end{bmatrix} R \; J \; d\xi \; \bar{\underline{q}}$$

$$+ \bar{\underline{q}}^T \int_{-1}^{1} \frac{1}{R^2} \begin{bmatrix} B_L'^T \\ 0 \end{bmatrix} EA \begin{bmatrix} B_o'' & B_o'^2 \end{bmatrix} R \; J \; d\xi \; \bar{\underline{q}} = \bar{\underline{q}}^T K_{L1} \bar{\underline{q}} \qquad (33)$$

En que $\underline{K}_{L1}$ es lineal en $\hat{u}_o$ y $\hat{v}_o$. Esta es la parte lineal de la matriz de desplazamientos iniciales. Finalmente el cuarto término $\mathbb{P}_{24}$ se obtiene como

$$\mathbb{P}_{24} = \frac{3}{2} \bar{\underline{q}}^T \int_{-1}^{1} EA \frac{1}{R^4} \begin{bmatrix} B_L'^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_L' & 0 \end{bmatrix} R \; J \; d\xi \; \bar{\underline{q}}$$

$$= \frac{3}{2} \bar{\underline{q}}^T K_{L2} \bar{\underline{q}} \qquad (34)$$

en que $\underline{K}_{L2}$ es cuadráticamente dependiente en $\hat{u}_o$, corresponde a la parte cuadrática de la matriz de desplazmientos iniciales.

4.0 ANALISIS DE PANDEO

Si las cargas se mantienen paralelas a la dirección inicial en cualquier instante de tiempo, y los desplazamientos son proporcionales a las fuerzas,' el problema conduce a un problema de valores propios, en el cual el valor más bajo es el factor crítico de carga. En este caso, el problema de estabilidad expresado por $\mathbb{P}_2 = 0$, conduce a

$$\bar{q}^T \left[\underset{\sim}{K}_o + \lambda \left(\underset{\sim}{K}_g (q_o) + K_{L1} (q_o) \right) + \frac{3}{2} \lambda^2 K_{L2}(q_o, q_o) \right] \bar{q} = 0$$

$$\forall \bar{q} \quad (CA) \qquad (35)$$

Por lo que el problema de valores propios es

$$\left[\underset{\sim}{K}_o + \lambda \left(\underset{\sim}{K}_g (q_o) + K_{L1} (q_o) \right) + \frac{3}{2} \lambda^2 K_{L2}(q_o, q_o) \right] \bar{q} = 0 \quad (36)$$

donde λ es el factor de multiplicación de cargas.

4.1 ANALISIS DE PANDEO DE EULER

Despreciando las dos contribuciones de los desplazamientos iniciales de la matriz se llega al problema de valores propios

$$\left[\underset{\sim}{K}_o + \lambda \underset{\sim}{K}_g (\underset{\sim}{q}_o) \right] \bar{\underset{\sim}{q}} = \underset{\sim}{0} \qquad (37)$$

este corresponde al problema clásico de pandeo de Euler el cual es una aproximación incompleta de primer orden.

Segundo, si se considera ahora solo la parte lineal de desplazamiento conjuntamente con la rigidez geométrica, el problema de valores propios queda

$$\left[\underset{\sim}{K}_o + \lambda \left(K_g(\underset{\sim}{q}_o) + \underset{\sim}{K}_{L1}(\underset{\sim}{q}_o) \right) \right] \bar{\underset{\sim}{q}} = \underset{\sim}{0} \qquad (38)$$

Esta última ecuación representa una aproximación completa de primer orden. Finalmente, la aproximación de segundo orden corresponde a la ecuación inicial (36) en su forma completa.

4.2 ANALISIS DE PANDEO DE DUPUIS

En la formulación de Euler se mira la configuración adyacente a la inicial para investigar la estabilidad de esta última. Ahora supongase que se ha llegado a una configuración de equilibrio correspondiente a un nivel de carga λ_o y a partir de esta configuración se busca el estado crítico [2]. Para esto, se puede escribir la matriz de rigidez tangente [3]

$$\underline{K}_T = \underline{K}_o + \underline{K}_g + \underline{K}_{L1} + K_{L2} \qquad (39)$$

aplicando a continuación un incremento de carga $\Delta\lambda$ y siguiendo el razonamiento de las secciones 2 y 3, se forma la matriz de rigidez geométrica incremental y las matrices de desplazamientos iniciales: $\underline{K}_g^{(1)}$, $\underline{K}_{L1}^{(1)}$, $\underline{K}^{(1)}$. A continuación, se puede resolver el problema de valores propios resultantes para determinar el incremento de carga crítico. Esto es

$$\left[\underline{K}_T + \Delta\lambda \left(\underline{K}_g^{(1)} + \underline{K}_{L1}^{(1)}\right) + \Delta\lambda^2 K^{(1)} \right] \bar{\underline{q}} = \underline{0} \qquad (40)$$

La carga crítica será $\lambda_o + \Delta\lambda_{crit.}$. Aquí nuevamente se pueden usar distintos tipos de aproximación: De primer orden incompleta, de primer orden completa y de segundo orden (Ec. 40).

La solución del problema de valores y vectores propios formulada en las equaciones anteriores se pueden resolver mediante cualquier método estandar. En el caso de las aproximaciones lineales el problema de valores propios es del tipo

$$\underline{A}\,\underline{x} = \lambda \underline{B}\,\underline{x} \qquad (41)$$

Como se necesista el valor propio mas bajo, se puede adoptar el método de iteración inversa.

En el caso del análisis empleando la aproximación cuadrática, el problem de valores propios es del tipo

$$(\underline{A} + \lambda\underline{B} + \lambda^2 C)\,\underline{x} = \underline{0} \qquad (42)$$

Este puede reescribirse como

$$\left\{ \begin{bmatrix} \underline{C} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{A} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{C} \\ \underline{C} & \underline{B} \end{bmatrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \underline{x}' \\ \underline{x} \end{matrix} \right\} = \underline{0} \qquad (43)$$

donde $x' = \lambda x$. En este caso si se usa el método de iteración inversa se converge al valor propio más pequeño [4].

6.0 ANALISIS DE UN ANILLO CICULAR Y UN ARCO DELGADO BAJO PRESION UNIFORME

6.1 ANILLO CIRCULAR

Debido a la simetría, se considera solo una cuarta parte, y se modela con cuatro elementos. El problema se resolvió usando FEAP [5]. Usando una aproximación con elementos viga y con elementos arco. En la Fig. 3 se muestran ambas modelaciones.

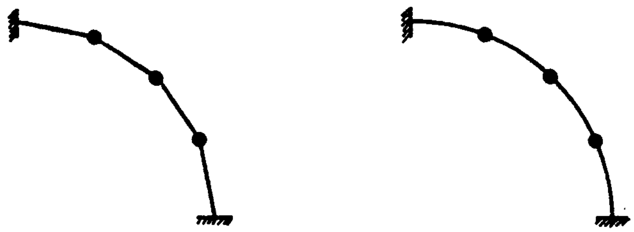

Fig. 3 Modelación de un anillo con elementos viga y arco

En este caso se encontró que la carga crítica es muy cercana a la solución exacta dada por:

$$P_{crit.} = \alpha \frac{E\,I}{R^3} \tag{44}$$

En la tabla 1 a continuación se comparan los valores obtenidos

Tabla 1. Comparación de Resultados para el anillo circular

Método	Valor de α	Error
Exacto	4.0	0.00%
FEAP Elemento viga	4.347	8.70%
Elemento de arco	4.003	0.08%

6.2 ARCO DELGADO

Las propiedades del arco delgado se eligieron de la siguente forma

R = 25cm., h=0.164cm., θ=15°, EA=9.334*10⁵Kg.,
EI = 2.332*10⁹ Kg. cm².

El caso del punto de bifurcación es estudiado primero. En este caso la estructura se pandea en un modo antisimétrico. Sin embargo, debido a los desplazamientos de prepandeo no nulos del nodo en el eje de simetría el arco completo es modelado con elementos de arco de igual longitud.

A continuación, se estudió el punto límite forzando a la estructura a que se comportara en forma simétrica. En este caso se modela solo la mitad del arco.

En ambos casos la convergencia del método se muestra en forma explícita mediante resultados numéricos.

La carga crítica se entrega en la forma normalizada y adimensional

$$\bar{P} = P_o \frac{R^2 h}{EI} \tag{45}$$

Los resultados se muestran en la tabla 2 para el punto de bifurcación y en la tabla 3 para el caso del punto límite.

En el caso de la teoría linealizada [1], la carga de bifurcación se alcanzó con $\bar{P}_{crt}$=2.0824, y con $\bar{P}_{crt}$=1.9005 en el caso de la teoría nolineal. El resultado para el punto límite obtenido con la teoría linealizada [1]es $\bar{P}_L$=3.372, y $\bar{P}_L$=2.261 en la teoría nolineal. En las tablas 2 y 3 se presenta un resumen de los resultados obtenidos con el método descrito usando las diferentes aproximaciones. En estas tablas se indica el número de elementos usados y se comparan con las diferentes aproximaciones usadas.

Se puede apreciar de las tablas 2 y 3 que mientras la teoría clásica de pandeo de Euler da buenos resultados en el caso de la bifurcación, pero da valores considerablemente por exceso en el caso de los puntos límites. El análisis de primer orden de Dupuis da mejores resultados y converge desde abajo, en tanto que la resolución del problema de valores propios cuadráticos da el peor resultado de todos, lo cual se debe a una linearización inconsistente [6].

Tabla 2. Resultados Punto de Bifurcación

No. de Elementos		6	12	24	48	
Aproximación						Ec. No.
	1	2.1031	2.0906	2.0897	2.0795	(37)
Euler	2	2.1026	2.1340	2.1553	2.1556	(38)
	3	2.2887	2.3327	2.3609	------	(36)
	1	2.1033	2.1292	2.1467	------	
Dupuis	2	2.0634	2.0998	2.1182	------	
	3	2.0746	2.0998	2.1182	------	

Tabla 3. Resultados Punto Límite

Aproximación	No. de Elementos	6	12	24	48	Ec. No.
Euler	1	3.4333	3.4124	3.3843	3.3761	(37)
	2	3.1497	3.1703	3.1955	3.2012	(38)
	3	3.7378	3.7889	3.8340	3.4190	(36)
Dupuis	1	3.1702	3.1801	3.2005	3.2041	
	2	2.8468	2.9010	2.9417	2.9560	
	3	3.0694	3.1459	3.1983	3.2185	

7.0 REFERENCIAS

[1] Schreyer, H.,L., y Masur, E.,F., "Bucking of Shallow Arches," Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol 92, EM4, 1966, pag. 1.

[2] Dupuis, G., "Stabilite Elastique des Structures Unidimensionelles," Z. Angnew. Mathematical Physics, Vol. 20 1969, pags. 94-106.

[3] Ziwenkiewicz, O.,W., The Finite Element Method, McGrew Hill, New York, N.Y. 1978.

[4] Gupta, K.,K., "Development of a Unified Numerical Procedure for Free Vibrations Analysis of Structures," Intenational Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 17, No. 2, 1981,

[5] Taylor, R., L., "Computer Procedures for Finite Element Analysis," Capítulo 24 de The Finite Element Method por O.,C., Zienkiewicz, Mc.Grew Hill, New York, N.Y., 1978.

[6] Carnay, "Buckling of Shells by Finite Element Method," Disertación Doctoral, Universidad de Lieja, 1980.