ANÁLISIS NUMÉRICO DE UN PROBLEMA ELIPTICO MIXTO CON CAMBIO DE FASE

Domingo A. Tarzia

PROMAR (CONICET-UNR),

Instituto de Matemática "Beppo Levi",

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agr., Univ. Rosario,

Avda. Pellegrini 250,

(2000) Rosario , Argentina.

RESUMEN

Se considera un conductor de calor que ocupa un dominio convexo poligonal y acotado $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ con una frontera regular $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ con med$(\Gamma_1) = |\Gamma_1| > 0$ y $|\Gamma_2| > 0$. Se asume, sin pérdida de generalidad, que la temperatura de cambio de fase es 0°C. Se impone una temperatura b = const.>0 sobre Γ_1 y un flujo de calor saliente q = const. > 0 sobre Γ_2 . Se considera en Ω un problema estacionario de conducción de calor .

Se considera una triangulación regular del dominio Ω con triángulos tipo Lagrange de tipo 1. Se estudian condiciones suficientes (y/o necesarias) para el flujo de calor constante q en Γ_2 con el objeto de obtener un cambio de fase (problema estacionario discreto de Stefan a dos fases) en el dominio discretizado correspondiente, es decir una temperatura discreta de signo no-constante en Ω.

ABSTRACT

We consider a material $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ which occupies a convex polygonal bounded domain, with regular boundary $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ with meas$(\Gamma_1) = |\Gamma_1| > 0$ and $|\Gamma_2| > 0$. We assume, without loss of generality, that the melting temperature is 0°C. We apply a temperature b=Const. > 0 on Γ_1 and a heat flux q = Const. > 0 on Γ_2 . We consider a steady-state heat conduction problem in Ω.

We consider a regular triangulation of the domain Ω with Lagrange triangles of type 1. We study sufficient (and/or necessary) conditions for the constant heat flux q on Γ_2 to obtain a change of phase (steady-state two-phase discretized Stefan problem) into the corresponding discretized domain, that is a discrete temperature of non-constant sign in Ω.

I. INTRODUCCIÓN.

Se considera un material Ω, dominio convexo y acotado de R^n ($n = 1, 2, 3$ para las aplicaciones), con una frontera $\Gamma = \partial\Omega$ regular, sobre el cual se estudiará un problema estacionario de conducción de calor con cambio de fase y su correspondiente análisis numérico. Se supone que la temperatura del cambio de fase es 0°C y que Γ está compuesta de dos porciones Γ_1 y Γ_2, ambas con medida superficial positiva. Sobre la porción de frontera Γ_1 se aplica una temperatura $b = b(x)$ y sobre la porción de frontera restante Γ_2 se impone un flujo de calor $q=q(x)$. El estudio que se realizará no sufrirá ningún cambio si se supone además que Γ tiene una porción de frontera Γ_3 impermeable al calor.

El problema consiste en estudiar la temperatura $\theta = \theta(x)$, definida para $x \in \Omega$. El conjunto Ω puede expresarse de la forma $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \mathcal{L}$, donde

$$\begin{aligned} &\Omega_1 = \left\{ x \in \Omega \;/\; \theta(x) < 0 \right\}, \;\; \Omega_2 = \left\{ x \in \Omega \;/\; \theta(x) > 0 \right\}, \\ &\mathcal{L} = \left\{ x \in \Omega \;/\; \theta(x) = 0 \right\}, \end{aligned} \tag{1}$$

son respectivamente la fase sólida Ω_1, la fase liquida Ω_2 y la frontera libre $\mathcal{L}$ que las separa en el caso en que ésta exista. Si la temperatura b asume sobre Γ_1 valores positivos y negativos entonces la frontera libre $\mathcal{L}$ existe realmente, cosa que no es siempre cierta en el caso en que b asuma valores de signo constante, por ejemplo positivo.

La temperatura θ puede ser representada en Ω de la siguiente manera [1] :

$$\theta(x) = \begin{cases} \theta_1(x) < 0 & , x \in \Omega_1 , \\ 0 & , x \in \mathcal{L} , \\ \theta_2(x) > 0 & , x \in \Omega_2 , \end{cases} \tag{2}$$

y satisface las siguientes condiciones :

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \;\; \Delta\theta_i = 0 \;\text{ en } \Omega_i \;(i = 1, 2) \;, \\ &\text{(ii)} \;\; \theta_1 = \theta_2 = 0 \;,\; k_1 \frac{\partial\theta_1}{\partial n} = k_2 \frac{\partial\theta_2}{\partial n} \;\text{ sobre } \mathcal{L} \\ &\text{(iii)} \;\; \theta_2 / \Gamma_1 = b \;, \\ &\text{(iv)} \;\; \begin{cases} - k_2 \dfrac{\partial\theta_2}{\partial n} \mid_{\Gamma_2} = q \;\text{ si }\; \theta \mid_{\Gamma_2} > 0 \;, \\ - k_1 \dfrac{\partial\theta_1}{\partial n} \mid_{\Gamma_2} = q \;\text{ si }\; \theta \mid_{\Gamma_2} < 0 \;, \end{cases} \end{aligned} \tag{3}$$

donde $k_i > 0$ $(i = 1, 2)$ es la conductividad térmica de la fase i ($i = 2$: fase líquida, $i = 1$: fase sólida).

Si se define una nueva función incógnita [1,2]

$$u = k_2\, \theta^{+} - k_1\, \theta^{-} \quad \text{en } \Omega\,, \tag{4}$$

donde θ^{+} y θ^{-} representan la parte positiva y negativa de la función θ respectivamente, entonces el problema (3) se transforma en el siguiente problema elíptico con condiciones mixtas :

$$\begin{aligned} &\Delta u = 0\,, \text{ en } D'(\Omega)\,, \\ &u\,|_{\Gamma_1} = b_0 \equiv k_2\, b^{+} - k_1\, b^{-}\,, \\ &-\frac{\partial u}{\partial n}\,|_{\Gamma_2} = q\,, \end{aligned} \tag{5}$$

cuya formulación variacional está dada por :

$$a(u, v - u) = L(v-u)\,, \quad \forall v \in K\,, \quad u \in K \tag{6}$$

donde

$$\begin{aligned} &V = H^1(\Omega)\,, \qquad V_0 = \left\{ v \in V \,/\, v\,|_{\Gamma_1} \right\}\,, \\ &K = \left\{ v \in V \,/\, v\,|_{\Gamma_1} = b_0 \right\}\,, \qquad H = L^2(\Omega)\,, \\ &a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \,.\, \nabla v \, dx\,, \qquad (u,v) = \int_\Omega u \,.\, v \, dx \\ &L(v) = -\int_{\Gamma_2} q\, v\, d\gamma\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Bajo la hipótesis $b \in H^{1/2}(\Gamma_1)$ se tiene que existe $B \in V$ tal que $B\,|_{\Gamma_1} = b_0$. Entonces, si se define $U = u - B \in V_0$, se tiene que (6) es equivalente a (8) , donde

$$a(U,v) = F(v)\,, \quad \forall v \in V_0\,, \; U \in V_0 \tag{8}$$

con

$$F(v) = L(v) - a(B,v)\,. \tag{9}$$

Si además se tiene la hipótesis $q \in L^2(\Gamma_2)$, entonces por el Teorema de Lax-Milgram se deduce que existe una única solución U de (8) y por ende una única solución u de (6).

Se asume que el dominio Ω, la frontera Γ y los datos b_0 sobre Γ_1 (ó B en Ω) y q sobre Γ_2 son suficientemente regulares para grantizar la propiedad de regularidad $u, U \in H^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ (para $n \leq 3$, $H^2(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$) [3,4,5,6] (por ejemplo, $b_0 \in H^{3/2}(\Gamma_1)$ ó $B \in H^2(\Omega)$ y $q \in H^{1/2}(\Gamma_2)$).

Además existen tres ejemplos en los cuales la solución satisface dicha condición para el caso de datos constantes $b = \text{Const.} > 0$ (ó $B = k_2\, b = \text{Const.} > 0$) y $q = \text{Const.} > 0$ [7,8].

Sean Ω un dominio poligonal convexo con frontera regular y τ_h una triangulación regular de Ω, donde $h > 0$ es un parámetro destinado a tender a cero, formada por elementos finitos afín-equivalentes de clase C^0. Se toma h igual a la longitud del lado más grande de los triángulos $T \in \tau_h$ y se aproxima V_0 por [9] :

$$V_h = \left\{ v_h \in C^0(\bar{\Omega}) \;/\; v_h\,|_T \in P_1(T)\,,\ \forall T \in \tau_h\,,\ v_h\,|_{\Gamma_1} = 0 \right\}, \tag{10}$$

donde P_1 es el conjunto de los polinomios de grado menor o igual a 1 .

Sea π_h el operador de interpolación lineal correspondiente. Se considera el siguiente problema aproximado, en dimensión finita, del problema continuo (8):

$$a(U_h,v_h) = F(v_h)\,,\quad \forall v_h \in V_h\ \ ,\ U_h \in V_h\ \ , \tag{11}$$

obteniéndose los siguientes resultados (en los tres primeros lemas se sigue el estudio realizado en [9]) :

Lema 1. Si $b \in H^{1/2}(\Gamma_1)$ y $q \in L^2(\Gamma_2)$ entonces se tienen las siguientes propiedades :

i) Existe una única solución U_h de (11), que satisface

$$a(U-U_h,v_h) = 0\,,\quad \forall v_h \in V_h\ \ , \tag{12}$$

es decir que $U_h = P_{V_h}(U)$.

ii) La sucesión U_h está acotada en V, es decir

$$\| U_h \|_V \le \frac{\| F \|}{\alpha}\ ,\ \forall h > 0\,. \tag{13}$$

donde $\alpha > 0$ es la constante de coercividad de a sobre V_0, definida en (15).

iii) $U_h \to U$ en V débil, cuando $h \to 0$.

iv) $U_h \to U$ en V fuerte, cuando $h \to 0$, es decir

$$\lim_{h \to 0}\ \| U_h - U \|_V = 0\,. \tag{14}$$

Demostración. Del hecho que $\text{med}(\Gamma_1) > 0$, se tiene que la forma bilineal a es coerciva sobre V_0 , es decir :

$$\exists\ \alpha > 0 \;/\; a(v,v) = \| v \|^2_{V_0} \ge \alpha\, \| v \|^2_V\ \ ,\ \forall v \in V_0\ \ . \tag{15}$$

y por ende $\|\cdot\|_{V_0}$ y $\|\cdot\|_V$ son dos normas equivalentes en V_0 .

(i) Surge por aplicación del Teorema de Lax-Milgram y por (8) y (11).

(ii) Tomando $v_h = U_h$ en (11), se obtiene

$$\alpha \| U_h \|_V^2 \leq a(U_h,U_h) = <F,U_h> \leq \| F \| \; \| U_h \|_V \;\; , \;\; \forall h > 0 \; ,$$

de donde surge (13).

(iii) De (13) se deduce que existe una sub-sucesión, llamada igualmente U_h , y un elemento $U_0 \in V_0$ (pues $U_h \in V_0$, $\forall$ $h > 0$), de manera que $U_h \rightharpoonup U_0$ en V débil cuando $h \to 0$.

Sea $v \in W = V_0 \cap H^2(\Omega)$. Si se toma $v_h = \pi_h(v) \in V_h$ en (11) y se pasa al límite $h \to 0$, se tiene que :

$$a(U_0,v) = <F,v> \;\; ,\forall v \in W \; ,$$

de donde, por densidad y por unicidad de la solución de (8), se deduce que $U_0 = U$.

iv) Utilizando (12) se obtiene

$$\alpha \| U_h - U \|_V^2 \leq \; a(U,U-U_h)$$

Como el segundo miembro $a(U,U-U_h)$ en la desigualdad anterior tiende a cero cuando $h \to 0$, se deduce el resultado buscado.

Por otra parte, las soluciones U de (8) y U_h de (11) están caracterizadas, respectivamente por los siguientes problemas de mínimo :

$$J(U) \leq J(v) \; , \; \forall v \in V_0 \;\; , \; U \in V_0 \;\; , \tag{16}$$

$$J(U_h) \leq J(v_h) \; , \; \forall v_h \in V_h \; , \; U_h \in V_h \;\; , \tag{17}$$

donde el funcional J está definido por :

$$J(v) = \frac{1}{2}\, a(v,v) - F(v) \;\; , \;\; v \in V \; . \tag{18}$$

Además, se tienen las siguientes propiedades complementarias :

Lema 2. Bajo la hipótesis de regularidad $U \in H^2(\Omega)$ (por ejemplo, $B \in H^2(\Omega)$ y $q \in H^{1/2}(\Gamma_2)$), se obtienen las siguientes estimaciones :

i) $$\| U - U_h \|_V \leq \frac{1}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \| U - v_h \|_V \ . \tag{19}$$

ii) Existe una constante C_1 (independiente de h) de manera que :

$$\| U - U_h \|_V \leq C_1 h \ . \tag{20}$$

Demostración. (i) Utilizando (12) y (13), se deduce

$$\alpha \| U - U_h \|_V^2 \leq a(U-U_h , U-U_h) = a(U-U_h,U) = a(U - U_h,U - v_h) \leq$$

$$\leq \| U - U_h \|_V \ \| U - v_h \|_V \ , \quad \forall v_h \in V_h \ ,$$

de donde surge (19).

(ii) Como las solución U de (8) verifica que $U \in H^2(\Omega)$ y además $\pi_h U \in V_h$, entonces se puede aplicar (19) y el resultado de interpolación siguiente [9] : Existe una constante $C_0 > 0$ (independiente de h) de manera que

$$\| v - \pi_h v \|_V \leq C_0 h \, | v |_{2,\Omega} \ , \quad \forall v \in H^2(\Omega) \ , \tag{21}$$

obteniéndose de este modo (20) con

$$C_1 = \frac{C_0}{\alpha} \, | U |_{2,\Omega} \ ,$$

donde con $| v |_{2,\Omega}$ se simboliza la semi-norma de mayor orden de v en $H^2(\Omega)$.

Si se definen

$$\begin{aligned} &K_h = V_h + \pi_h(B) \\ &u_h = U_h + \pi_h(B) \in K_h \ , \ \theta_h = \frac{1}{k_2} u_h^+ - \frac{1}{k_1} u_h^- \in V \ , \\ &u = U + B \in K \ , \ \theta = \frac{1}{k_2} u^+ - \frac{1}{k_1} u^- \in V \end{aligned} \tag{22}$$

entonces se deduce

Lema 3. i) Bajo las hipótesis del Lema 2 se tienen :

$$\lim_{h \to 0} \| u_h - u \|_V = 0 \ , \tag{23a}$$

$$\lim_{h \to 0} \| \theta_h - \theta \|_H = 0 \ . \tag{23b}$$

ii) Además existen dos constantes $C_2 > 0$, $C_3 > 0$ (independiente de h) de manera que

$$\| u_h - u \|_V \leq C_2 \, h \ , \tag{24a}$$

$$\| \theta_h - \theta \|_H \leq C_3 \, h \ . \tag{24b}$$

Demostración. (23a) se deduce teniendo en cuenta la estimación

$$\| u_h - u \|_V \leq \| U_h - U \|_V + \| \pi_h(B) - B \|_V \ , \tag{25}$$

(14) ó (20) y las propiedades del operador de interpolación [9].

Por otra parte, se tiene :

$$\begin{aligned} \| u_h - u \|_H^2 &= \| u_h^+ - u^+ \|_H^2 + \| u_h^- - u^- \|_H^2 + 2 \, (u_h^+, u^-) + \\ &+ 2 \, (u_h^-, u^+) \geq \| u_h^+ - u^+ \|_H^2 + \| u_h^- - u^- \|_H^2 \ , \end{aligned} \tag{26}$$

de donde surge que

$$\text{Máx} \, (\| u_h^+ - u^+ \| , \| u_h^- - u^- \|) \leq \| u_h - u \|_H \ . \tag{27}$$

De (22) se obtiene :

$$\begin{aligned} \| \theta_h - \theta \|_H &\leq \frac{1}{k_2} \| u_h^+ - u^+ \|_H + \frac{1}{k_1} \| u_h^- - u^- \|_H \leq \\ &\leq \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) \| u_h - u \|_H \ , \end{aligned} \tag{28}$$

que, conjuntamente con (23a), se deduce (23b).

ii) Como $B \in H^2(\Omega)$, se utiliza (21) para obtener (24) con

$$C_2 = C_1 + C_0 \, | \, B \, |_{2,\Omega} \ , \quad C_3 = \frac{k_1 + k_2}{k_1 \, k_2} \, C_2 \ . \tag{29}$$

Observación 1. i) A través de las propiedades anteriores se ha construido una aproximación $\theta_h(u_h)$ que converge fuertemente en $L^2(\Omega)$ (V) a la temperatura $\theta(u)$.

ii) La hipótesis $B \in H^2(\Omega)$ se tiene, por ejemplo, en el caso en que $b \in H^{3/2}(\Gamma_1)$ y sea de signo constante (positivo), y que el flujo de calor $q = q(x) > 0$ verifique una cierta desigualdad para que se tenga un problema a dos fases (ver el Lema siguiente). Cabe destacar que si $B \notin H^2(\Omega)$, entonces las estimaciones de errores (24) no pueden, en general, asegurarse.

Lema 4. (i) Si se nota con $u = u_{bq}$ la solución de la ecuación variacional (6) donde $K = K_b$, definido en función de b, entonces se tiene el siguiente resultado de comparación :

$$b_1 \leq b_2 \text{ sobre } \Gamma_1 \text{ , } q_2 \leq q_1 \text{ sobre } \Gamma_2 \Rightarrow u_{b_1 q_1} \leq u_{b_2 q_2} \text{ en } \bar{\Omega}. \tag{30}$$

(ii) Si $b = \text{Const.} > 0$ sobre Γ_1 y $q = \text{Const.} > 0$ sobre Γ_2 verifican la desigualdad

$$q > q_0(B) = \frac{B \mid \Gamma_2 \mid}{C} \text{ , } B = k_2\, b > 0 \text{ ,} \tag{31}$$

donde $\mid \Gamma_2 \mid = \text{med}(\Gamma_2) > 0$ y $C = C(\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2) = \text{Const.} > 0$ es una adecuada constante positiva [10] entonces se tiene un problema estacionario de Stefan a dos fases, es decir la solución u de (5) ó (6) es de signo no-constante en Ω.

(iii) Si $b = b(x) > 0$ sobre Γ_1 y si el flujo de calor $q = q(x) > 0$ sobre Γ_2 verifican la desigualdad

$$\operatorname*{Inf}_{x \in \Gamma_2} q(x) > \frac{k_2 \mid \Gamma_2 \mid}{C} \operatorname*{Sup}_{x \in \Gamma_1} b(x) \tag{32}$$

donde C es la constante dada en (ii) entonces se tiene un problema de Stefan a dos fases.

Demostración. (i) Se nota por conveniencia $u_i = u_{b_i q_i}$ $(i = 1,2)$. La condición (30) es cierto si y sólo si $w = 0$ en Ω , donde $w = (u_2 - u_1)^- \in V_0$, pues se tiene que $(u_2 - u_1) \mid_{\Gamma_1} \geq 0$. Si se pone $v = u_2 + w \in K_{b_2}$ en la ecuación variacional correspondiente a u_2 y $v = u_1 + w \in K_{b_1}$ en la ecuación variacional correspondiente a u_1 , se restan ambas igualdades, entonces se obtiene que

$$0 \geq - a(w,w) = a(u_2 - u_1, w) = \int_{\Gamma_2} (q_1 - q_2)\, w \, d\gamma \geq 0 \text{ .}$$

Por lo tanto, se tiene que $a(w,w) = 0$ y como $w \in V_0$ se deduce que $w = 0$ en Ω, es decir (30).

(ii) Esta propiedad surge de [10], teniendo en cuenta que la constante geométrica $C > 0$ viene dada por

$$C = a(u_3, u_3) = \int_{\Gamma_2} u_3 \, d\gamma > 0 \tag{33}$$

donde u_3 es la solución del problema

$$\Delta u_3 = 0 \text{ en } \Omega ,$$
$$u_3 \mid_{\Gamma_1} = 0 \ , \ \frac{\partial u_3}{\partial n} \mid_{\Gamma_2} = 1 \ , \tag{34}$$

cuya formulación variacional está dada por

$$a(u_3,v) = \int_{\Gamma_2} v \, d\gamma \ , \ \forall v \in V_0 \, , \, u_3 \in V_0 \ . \tag{35}$$

(iii) Teniendo en cuenta (i), (ii) y el hecho

$$b(x) \leq b_2 = \operatorname*{Sup}_{x \in \Gamma_1} b(x) \quad , \quad \operatorname*{Inf}_{x \in \Gamma_2} q(x) = q_2 \leq q(x) \ ,$$

se deduce la propiedad buscada.

A contiuación se estudiarán para el caso b = Const. > 0 condiciones suficientes (y/o necesarias) para el flujo de calor constante $q > 0$ en Γ_2 con el objeto de obtener un cambio de fase (problema estacionario discreto de Stefan a dos fases) en el dominio discretizado correspondiente, es decir una temperatura discreta de signo no-constante en Ω. Se obtiene que :

i) Existe una constante $C_h > 0$ (que depende de la geometría y está caracterizada por un problema variacional) de manera que si $q > q_{0_h}(B) = B|\Gamma_2|/C_h$ el problema estacionario discreto presenta dos fases.

ii) Se tienen las estimaciones $C_h < C$ y $q_0(B) < q_{0_h}(B)$ donde C y $q_0(B)$ fueron obtenidos para el problema continuo [10].

iii) Se dan estimaciones, en función de h, para $C - C_h$ y $q_{0_h}(B) - q_0(B)$.

En otras palabras, se tratará de obtener para el problema elíptico mixto discreto, definido por u_h , condiciones análogas a las obtenidas para el problema continuo correspondiente [10], definido por u, y sus respectivas relaciones.

II. CONDICIONES PARA EL FLUJO DE CALOR DISCRETO.

De ahora en adelante, además de las hipótesis dadas anteriormente (en particular, las propiedades de regularidad) se considerará el caso particular,

$$b = \text{Const.} > 0 \ (\text{i.e. } B = k_2\, b = \text{Const.} > 0\ ),\quad q = \text{Const.} > 0 \tag{36}$$

y se analizarán, siguiendo [8,10] las condiciones que deberá verificar q sobre Γ_2 de manera que la temperatura discreta θ_h (o en forma equivalente la función $u_h = B + U_h$) sea de signo no-constante, es decir que representa el caso estacionario discreto de un problema de Stefan a dos fases. Éste estudio se realizará utilizando la teoría de la inecuaciones variacionales elípticas [11,12].

Para cada $q > 0$ se consideran las funciones $u(q) \in K$ y $u_h(q) \in K_h$ como las únicas soluciones de las ecuaciones variacionales (6) (problema continuo) y (37) (problema discreto), donde

$$a(u_h(q),v_h) = L(v_h)\ ,\ \ \forall v_h \in V_h\ ,\ \ u_h \in B + V_h \tag{37}$$

Sea la función real $f_h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida, para cada $h > 0$, de la siguiente forma

$$f_h(q) = J(u_h(q)) = \tfrac{1}{2}\, a(u_h(q),u_h(q)) + q \int_{\Gamma_2} u_h(q)\, d\gamma\ ,\ \ q > 0\,. \tag{38}$$

Entonces se tienen las siguientes propiedades :

TEOREMA 5. (i) Si $u_i = u_h(q_i)$ es la solución de (37) para $q_i > 0$ $(i = 1,2)$, entonces se tienen las siguientes igualdades:

$$(a)\ \ a(u_2 - u_1\,,\, u_2 - u_1) = (q_1 - q_2) \int_{\Gamma_2} (u_2 - u_1)\, d\gamma\ , \tag{39}$$

$$(b)\ \ a(u_2,u_2) - a(u_1,u_1) = a(u_2 + u_1,\, u_2 - u_1) = (q_1 + q_2) \int_{\Gamma_2} (u_1 - u_2)\, d\gamma$$

(ii) Para todos los reales $q > 0$ y Δ de manera que $(q + \Delta) > 0$, se tienen las siguientes estimaciones:

$$\left\| \frac{1}{\Delta}[u_h(q) - u_h(q+\Delta)] \right\|_V \leq D_1 = \frac{\|\gamma_0\|}{\alpha}\ \ |\Gamma_2|^{1/2} \tag{40}$$

$$\left\| \frac{1}{\Delta}[u_h(q) - u_h(q+\Delta)] \right\|_{L^2(\Gamma_2)} \leq D_2 = D_1 \|\gamma_0\| \tag{41}$$

donde γ_0 es el operador traza (lineal y continuo, definido sobre V). Más aún, la función

$$q > 0 \ \ \to \int_{\Gamma_2} u_h(q)\, d\gamma \in \mathbb{R} \tag{42}$$

es continua y monótona no-creciente.

(iii) La función $f_h = f_h(q)$ es derivable. Su derivada es continua y está dada por

$$f_h'(q) = \int_{\Gamma_2} u_h(q)\, d\gamma \tag{43}$$

Demostración. (i) Si se toma $v = u_2 - u_1 \in V_h$ en la ecuación variacional correspondiente a u_1 y $v = u_1 - u_2 \in V_h$ en la correspondiente a u_2, luego se suman y se restan ambas igualdades, entonces se obtienen (39a) y (39b) respectivamente.

(ii) Teniendo en cuenta (15), (38), la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la continuidad de γ_0 se deduce (40). De (40) y la continuidad de γ_0 se tiene (41) y por ende (42), si se considera

$$\left| \int_{\Gamma_2} [u_h(q) - u_h(q + \Delta)]\, d\gamma \right| \leq D_2\, |\Gamma_2|^{1/2}\, \Delta\,. \tag{44}$$

Por otra parte, la propiedad de monotonía surge de (39a).

(iii) A través de cálculos elementales se deduce

$$\frac{1}{\Delta}\,[\, f_h(q + \Delta) - f_h(q)\,] = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} [u_h(q) + u_h(q + \Delta)]\, d\gamma \tag{45}$$

es decir (43), utilizando (44).

LEMA 6. Se tienen las siguientes expresiones:

$$a(u_h(q)\,,\, u_h(q)) = q\, B\, |\Gamma_2| - q \int_{\Gamma_2} u_h(q)\, d\gamma\,, \tag{46}$$

$$f_h(q) = q\, B\, |\Gamma_2| - \frac{1}{2}\, a(u_h(q)\,,\, u_h(q))\,, \tag{47}$$

$$f_h(q) = \frac{q\, B\, |\Gamma_2|}{2} + \frac{q}{2} \int_{\Gamma_2} [u_h(q)\, d\gamma\,, \tag{48}$$

$$\frac{d}{dq}[a(u_h(q)\,,\, u_h(q))] = \frac{2}{q}\, a(u_h(q)\,,\, u_h(q))\,. \tag{49}$$

Demostración. Tomando $v_h = B - u_h(q) \in V_h$ en (36) se obtiene (46). Las relaciones restantes se deducen utilizando (37), (43) y (46).

COROLARIO 7. Si se deriva la expresión (48) respecto de q y se tiene en cuenta (43), se tiene

$$f_h'''(q) = 0\,,\ \forall\, q>0\,. \tag{50}$$

Sea la función $Y_h = Y_h(q)$, definida por

$$Y_h(q) = \tfrac{1}{q}\, a(u_h(q)\,,\, u_h(q))\,,\; q>0\,. \tag{51}$$

TEOREMA 8. (i) Existe una constante $C_h > 0$ de mamera que

$$\begin{aligned} &Y_h(q) = C_h\, q \;\;,\;\; a(u_h(q)\,,\, u_h(q)) = C_h\, q^2\,, \\ &f_h''(q) = C_h \quad , \;\; \forall\, q > 0\,. \end{aligned} \tag{52}$$

(ii) La función $f_h = f_h(q)$ viene dada por

$$f_h(q) = q\, B \mid \Gamma_2 \mid - \tfrac{1}{2}\, C_h\, q^2 \;\;,\;\; q > 0\,. \tag{53}$$

(iii) Si $q > q_{o_h}(B)$, entonces el problema (36) representa un caso estacionario discreto de un problema de Stefan a dos fases (i.e. $u_h(q)$ es una función de signo no-constante en Ω), donde

$$q_{o_h}(B) = \frac{B \mid \Gamma_2 \mid}{C_h}\,. \tag{54}$$

(iv) La constante $C_h > 0$ puede además calcularse por la expresión

$$C_h = \tfrac{1}{q} \int_{\Gamma_2} [B - u_h(q)]\, d\gamma\,, \tag{55}$$

para algún $q > 0$. Más aún, C_h viene dada como

$$C_h = a(u_{3_h}\,,\, u_{3_h}) = \int_{\Gamma_2} u_{3_h}\, d\gamma\,, \tag{56}$$

donde u_{3_h} es la única solución de la ecuación variacional

$$a(u_{3h}\,,\, v_h) = \int_{\Gamma_2} v_h\, d\gamma\,, \quad \forall\, v_h \in V_h\,, \quad u_{3h} \in V_h\,. \tag{57}$$

Demostración. (i) La función Y_h satisface el problema de Cauchy siguiente

$$\begin{aligned} &Y_h'(q) = \frac{Y_h(q)}{q}\,,\; q > 0\,, \\ &Y_h(0^+) = 0\,, \end{aligned} \tag{58}$$

debido al hecho $u_h(0^+) = B$. Por lo tanto, se deduce (52).

(ii) La expresión (53) se deduce de (47) y (52).

(iii) La propiedad se obtiene teniendo en cuenta

$$f_h'(q_{o_h}(B)) = 0 \tag{59}$$

y que f_h es monótona decreciente.

(iv) De (46) y (52) se obtiene (55). Por otra parte, sea $w_h = w_h(q) \in V_h$, definido de la siguiente manera

$$w_h(q) = \frac{B - u_h(q)}{q} \tag{60}$$

Entonces, $\forall\, v_h \in V_h$, se tiene:

$$a(w_h(q), v_h) = \frac{1}{q}\, a(B - u_h(q), v_h) = -\frac{1}{q}\, a(u_h(q), v_h) = \int_{\Gamma_2} v_h \, d\gamma\,,$$

es decir $w_h(q) = u_{3_h}$, por unicidad de la ecuación variacional (57), y por ende se deduce (56).

TEOREMA 9. (i) Se tiene la siguiente igualdad

$$a(u(q), u_h(q)) = C_h\, q^2\,,\ \forall\, q > 0\,. \tag{61}$$

(ii) Se tienen las siguientes desigualdadaes:

$$C_h < C\,, \qquad q_0(B) < q_{o_h}(B)\,. \tag{62}$$

Demostración. (i) Si se toma $v = u_h(q) \in K_h = B + V_h \subset B + V_0 = K$ en la ecuación variacional (6), se tienen en cuenta las expresiones (46) y [10]

$$a(u(q), u(q)) = C\, q^2\,,\ \forall\, q > 0 \tag{63}$$

entonces se obtiene (61).

(ii) Por otro lado, se tiene

$$\alpha\, \| u(q) - u_h(q) \|_V^2 \leq a(u(q) - u_h(q), u(q) - u_h(q)) = (C - C_h)\, q^2, \tag{64}$$

es decir (62).

A continuación, se hará uso del resultado de interpolación (21) para la función $u(q) \in H^2(\Omega)$, por hipótesis de regularidad.

TEOREMA 10. Se tienen las siguientes relaciones y estimaciones:

$$a(u(q) - u_h(q), v_h) = 0 \ , \ \forall\, v_h \in V_h \ , \tag{65}$$

$$(C - C_h)\, q^2 = a(u(q) - u_h(q), u(q) - u_h(q)) \leq \inf_{v_h \in V_h} a(u(q) - v_h \, , u(q) - v_h) \tag{66}$$

$$0 < C - C_h \leq \frac{C_0^2\, h^2}{q^2} \; | u(q) |^2_{2,\Omega} \ , \tag{67}$$

$$0 < q_{0_h}(B) - q_0(B) \leq \frac{C_0^2\, h^2}{C\, q^2} \; | u(q) |^2_{2,\Omega} \; q_{0_h}(B) \, . \tag{68}$$

Demostración. (65) y (66) se obtienen del Lema 1 y 2. Utilizando (66), los hechos que

$$\Pi_h\,(u(q)) \in B + V_h \quad , \qquad u(q) - \Pi_h\,(u(q)) \in V_h$$

y el resultado de interpolación (21), se deduce (67). La relación (68) se obtiene por definición de $q_{0_h}(B)$, $q_0(B)$ y (67).

Observación 2. Si $u(q) \in V$ (i.e. $u_3 \in V$) y no necesariamente pertenece a $H^2(\Omega)$, entonces se obtiene que

$$0 < C - C_h \leq \frac{1}{q^2}\, || u(q) - \Pi_h\,(u(q)) ||^2_V = || u_3 - \Pi_h\,(u_3) ||^2_V \tag{69}$$

con un segundo miembro que converge a cero cuando $h \to 0^+$.

Observación 3. Si el flujo de calor constante sobre Γ_2 verifica la desigualdad $q > q_{0_h}(B)$, entonces tanto el problema discreto como el problema continuo representan un caso estacionario de un problema de Stefan a dos fases, es decir, con temperaturas de signo no-constante en Ω.

Observación 4. En el caso de que por cuestiones de simetría se tenga que la función $u_h(q)$ es constante sobre Γ_2 (como función de $x \in \Gamma_2$), entonces la condición suficiente, dada por el Teorema 8, es también necesaria para que el problema discreto correspondiente sea a dos fases.

COROLARIO 11. Si $h, B > 0$, entonces se tienen las siguientes estimaciones:

$$0 < C - C_h \leq C_0^2 \; |u_3|^2_{2,\Omega} \; h^2 \; , \tag{70}$$

$$0 < q_{o_h}(B) - q_0(B) \leq \frac{C_0^2 \; |u_3|^2_{2,\Omega}}{C} \; q_{o_h}(B) \; h^2 \; . \tag{71}$$

Demostración. Basta considerar el hecho de que $u(q) = B - qu_3$, donde u_3 está definida por (34) ó (35).

TEOREMA 12. Si $h, B > 0$, y $A_0 \in (0,1)$ (un parámetro a elección), entonces se tienen las siguientes estimaciones:

$$q_0(B) < q_{o_h}(B) \leq \frac{q_0(B)}{A_0}, \quad C_h \geq C \; A_0 \; , \quad \forall \; h \leq h_0(\,A_0), \tag{72}$$

$$0 < q_{o_h}(B) - q_0(B) \leq \frac{C_0^2 \; |u_3|^2_{2,\Omega}}{C \; A_0} \; q_0(B) \; h^2 \; , \quad \forall \; h \leq h_0(\,A_0), \tag{73}$$

donde

$$h_0(\,A_0) = \frac{[\,C\,(1 - A_0)]^{1/2}}{C_0 \, |u_3|_{2,\Omega}} \; . \tag{74}$$

Demostración. De (71) se deduce

$$A(h) \, q_{o_h}(B) \; \leq q_0(B) \tag{74}$$

donde

$$A(h) = 1 - \frac{C_0^2 \; |u_3|^2_{2,\Omega}}{C} \; h^2 < 1 \; . \tag{76}$$

Por otro lado, se tiene la siguiente equivalencia :

$$0 < A_0 < A(h) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < h < h_0(\,A_0) \tag{77}$$

de la cual se deducen las desigualdades (72) y (73).

COROLARIO 13. Si $B > 0$, entonces se tiene el siguiente límite:

$$\lim_{h \to 0^+} q_{0_h}(B) = q_0(B) . \tag{78}$$

Agradecimiento

El presente trabajo ha sido realizado a través del proyecto de investigación y desarrollo "Análisis numérico de ecuaciones e inecuaciones Variacionales" del CONICET - UNR, Rosario - Argentina.

REFERENCIAS

[1] D.A. TARZIA, "Sur le problème de Stefan à deux phases", Thèse 3ème Cycle, Univ. Paris VI (Mars 1979). See also C.R. Acad. Sc. Paris, 288A(1979), 941-944; Math. Notae,"Aplicación de métodos variacionales en el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases", 27(1979/80), 145-156 .

[2] G. DUVAUT, "Problèmes à frontière libre en théorie des milieux continus", Rapport de Recherche N^0 185, LABORIA - IRIA, Rocquencourt (1976).

[3] A. FRIEDMAN, "Variational principles and free boundary problems", J. Wiley, New York (1982).

[4] P. GRISVARD, "Behavior of the solutions of an elliptic boundary value problem in a polygonal or polyhedral domain", in Numerical Solution of Partial Differential Equations III, SYNSPADE 1975, B. Hubbard(Ed.). Academic Press, New York (1976), 207-274.

[5] M.K.V. MURTHY — G. STAMPACCHIA, "A variational inequality with mixed boundary conditions", Israel J. Math., 13(1972), 188-224.

[6] J. NECAS, "Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques", Masson, Paris (1967).

[7] D.A. TARZIA, "Sobre el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases", Math. Notae, 28(1980/81), 73-89.

[8] D.A. TARZIA, "The two-phase Stefan problem and some related conduction problems", Reuniões em Matemática Aplicada e Computacão Científica, Vol. 5, SBMAC, Gramado (1987). See also "On heat flux in material with or without phase change", in Int. Colloqium on Free Boundary Problems : Theory and Aplications, Irsee/Bavaria, 11-20 June 1987, Research Notes in Math., Pitman, To appear.

[9] P.G. CIARLET, "The finite element method for elliptic problems", North-Holland, Amsterdam (1978).

[10] D.A. TARZIA, "Una desigualdad para el flujo de calor constante a fin de obtener un problema estacionario de Stefan a dos fases", Mecánica Computacional, Vol. 2, S.R. Indelsohn (Ed.), EUDEBA, Santa Fe (1985), 359-370. See also "An inequality for the constant heat flux to obtain a steady-state two-phase Stefan problem", Engineering Analysis, 5(1988), 177-181.

[11] D. KINDERLEHRER – G. STAMPACCHIA, "An introduction to variational inequalities and their applications", Academic Press, New York (1980).

[12] D.A. TARZIA, "Introducción a las inecuaciones variacionales elípticas y sus aplicaciones a problemas de frontera libre", Centro Latinoamericano de Matemática e Informática, CLAMI - CONICET, No. 5, Buenos Aires (1981).