

APROXIMACIONES EXTERNAS PARA LA ECUACIÓN DE POISSON
FORMULACIONES DE VOLÚMENES DE CONTROL: EQUIVALENCIA
NUMÉRICA CON FORMULACIONES TIPO GALERKIN

Claudio Padra
Enzo A. Dari
División Mecánica Computacional
Centro Atómico Bariloche - CNEA
Bariloche - Argentina

RESUMEN

Se implementó un programa con Elementos Finitos no conformes (triángulos lineales de Crouzeix-Raviart) para la resolución de la ecuación de Poisson.

Se demuestra la convergencia de algunas formulaciones de tipo Petrov-Galerkin para espacios de funciones discontinuas (formulaciones de elementos finitos basados en volúmenes de control) y su equivalencia numérica con formulaciones de tipo Galerkin.

ABSTRACT

A program with non-conforming Finite Elements (linear Crouzeix - Raviart triangles) has been implemented in order to solve the Poisson equation.

Convergence of some Petrov - Galerkin type formulations in non-continuous functional spaces (Control Volume based Finite Element Method) and their numerical equivalence with the Galerkin method are proved.

INTRODUCCIÓN

En el Método de Elementos Finitos, varios de los elementos usados desde la década del '70 son no-conformes, es decir, si la ecuación a resolver numéricamente es de orden $2m$, la derivada de orden $m - 1$ tiene discontinuidades.

Uno de los elementos no-conformes más populares, por ser simple y útil, es el formado por funciones lineales sobre triángulos, con nodos ubicados en el punto medio de los lados [1,2], que llamaremos de Crouzeix-Raviart.

Por otro lado, los Métodos de Elementos Finitos basados en volúmenes de control son relativamente nuevos, y tienen la ventaja de poseer una interpretación física clara y directa.

En este trabajo escribiremos la formulación del problema de Poisson con volúmenes de control como una formulación del tipo Petrov-Galerkin en la cual se utilizan como funciones de peso funciones constantes en cada volumen de control.

Se demuestra que en el caso en que las funciones base sean las de Courant o las de Crouzeix-Raviart, son equivalentes las formulaciones de tipo Galerkin a las de volúmenes de control. Estas combinaciones de funciones base y peso fueron utilizadas para problemas de fluidos [3]; y la utilización de otras funciones base para el Método de Elementos Finitos basado en volúmenes de control es un tema en constante desarrollo [4,5,6].

EL PROBLEMA DE POISSON: CASO CONTINUO

Sea Ω un dominio poligonal acotado y abierto en \mathbb{R}^2 y sea $\partial\Omega$ su frontera. Sea Γ_1 una porción de la frontera, que suponemos consiste en un número finito de segmentos. Emplearemos el espacio usual de Sobolev $V = H^1(\Omega)$ y su norma $\|\cdot\|_1$, y definimos $V_0 = \{v \in V / v = 0 \text{ en } \Gamma_1\}$

El problema se enuncia de la siguiente manera:

Hallar $u \in V$ tal que:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(b \nabla u) = g & \text{en } \Omega \\ u = u_0 & \text{en } \Gamma_1 \\ \nabla u \cdot n = \gamma & \text{en } \Gamma_2 = \partial\Omega - \Gamma_1 \end{cases} \quad (1)$$

Si es necesario supondremos que g y u_0 son lo suficientemente suaves, y, para simplificar, supondremos que $\gamma = 0$.

La formulación variacional del problema continuo es:

Encontrar $u \in V$ tal que $u = u_0$ en Γ_1 y a $(u,v) = L(v)$ para todo $v \in V_0$, donde:

$$a(u,v) = \int_{\Omega} b \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

$$L(v) = \int_{\Omega} g v \, dx$$

ESQUEMA CLÁSICO DE ELEMENTOS FINITOS

Sea $\{T^h\}$ una familia de triangulaciones regulares de Ω , en la cual h denota el lado de máxima longitud de todos los triángulos $\tau \in T^h$ y todos los vértices de los triángulos serán llamados nodos $\{P_i / 1 \leq i \leq \text{NOD}\}$.

Definimos los siguientes espacios:

$$V^h = \{v^h \in C(\Omega) / v^h \text{ es un polinomio de grado 1 en cada } \tau \in T^h\}$$

$$V_0^h = \{v^h \in V^h / v^h = 0 \text{ en } \Gamma_1\}$$

Sea $\{\phi_i, 1 \leq i \leq \text{NOD}\}$ la base local de V^h tal que

$$\phi_i(P_j) = \delta_{ij}$$

$$\text{Definimos } u_0^h = \int_{P_i \in \Gamma_1} u_0(P_i) \phi_i$$

Entonces la aproximación de Galerkin es:

Hallar $u^h \in V^h$ tal que $u^h - u_0^h \in V_0^h$ y

$$a(u^h, v^h) = L(v^h) \text{ para todo } v^h \in V_0^h \quad (2)$$

Si suponemos que tenemos NDIR nodos con condición de Dirichlet y que éstos son los últimos tenemos:

$$u^h = \int_{1 \leq i \leq \text{NOD}} u_i \phi_i = \int_{1 \leq i \leq M} u_i \phi_i + \int_{M+1 \leq i \leq \text{NOD}} u_i \phi_i$$

donde $M = \text{NOD} - \text{NDIR}$, luego el sistema es:

$$\int_{1 \leq i \leq M} u_i a(\phi_i, \phi_j) = L(\phi_j) - \int_{M+1 \leq i \leq \text{NOD}} u_i a(\phi_i, \phi_j)$$

donde $1 \leq j \leq M$, o en forma matricial:

$$A u = B$$

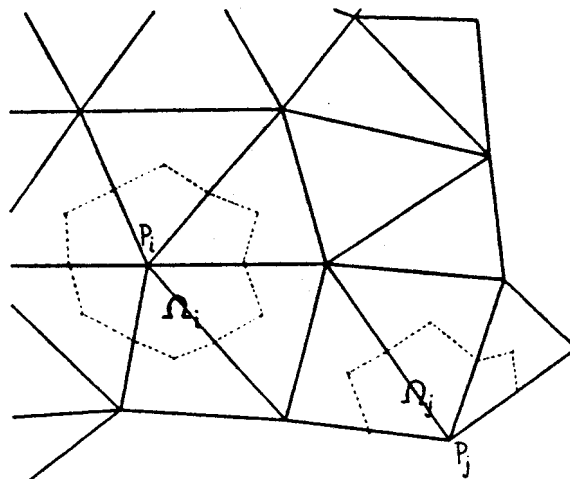
con:

$$A_{ij} = a(\phi_i, \phi_j)$$

$$B_j = L(\phi_j) - \int_{M+1 \leq i \leq \text{NOD}} u_i a(\phi_i, \phi_j)$$

ESQUEMA DE ELEMENTOS FINITOS BASADO EN VOLÚMENES DE CONTROL: CASO DE FUNCIONES BASE CONTINUAS

Dada una discretización del dominio en elementos triangulares conformes de 3 nodos, definimos los volúmenes de control Ω_i alrededor de cada nodo P_i de la red, como se muestra en la figura 1.



Ω_i : volumen de control asociado al nodo P_i

Figura 1: Definición de los volúmenes de control

Sea X_i la función característica de Ω_i :

$$X_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega_i \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Sea $L^h = \{ \eta \text{ tal que } \eta = \sum_i c_i X_i \text{ con } c_i \in \mathbb{R} \}$

Y sea $q : C(\Omega) \rightarrow L^h$ dada por $q(v) = \sum_i v(P_i) X_i$

$q|_{V^h} : V^h \rightarrow L^h$ es una biyección. Más aún: $q(\phi_j) = X_j$

Si $v \in L^h$, v puede ser discontinua en $\partial\Omega_i$, pero continua y constante en Ω_i , con lo cual se puede demostrar:

$$a'(u, v) = L(v) \quad (3)$$

donde:

$$a'(u, v) = - \sum_i \int_{\partial\Omega_i} b \nabla u \cdot \vec{v} \, d\Gamma$$

y $L(v)$ el definido anteriormente.

Si ahora tomamos $v = X_j$ tenemos:

$$a'(u, X_j) = - \int_{\partial\Omega_j} b \nabla u \cdot \vec{v} \, d\Gamma = \int_{\Omega_j} g \, dx = L(X_j) \quad (3')$$

$$\sum_{1 \leq i \leq M} u_i a'(\phi_i, X_j) = L(X_j) - \sum_{M+1 \leq i \leq \text{NOD}} u_i a'(\phi_i, X_j)$$

donde $1 \leq j \leq M$, o en forma matricial:

$$A' u = B'$$

con:

$$A'_{ij} = a'(\phi_i, X_j)$$

$$B'_j = L(X_j) - \sum_{M+1 \leq i \leq \text{NOD}} u_i a'(\phi_i, X_j)$$

Veamos la equivalencia numérica de las dos formulaciones:

Proposición 1: a) Si b es constante por elemento:

$$a(u, v) = a'(u, q(v)) \text{ para todo } u, v \text{ en } V^h$$

b) Si g es constante por elemento:

$$L(v) = L(q(v)) \text{ para todo } v \text{ en } V^h$$

Demostración a):

Basta ver que $a(\phi_k, \phi_j) = a'(\phi_k, X_j)$, es decir:

$$\int_{\Omega} \nabla \phi_k \nabla \phi_j \, dx = - \int_{\partial \Omega_j} \nabla \phi_k \, d\vec{\Gamma}$$

$$\int_{\Omega} \nabla \phi_k \nabla \phi_j \, dx = \sum_{e \in T^h} \nabla N_k^e \nabla N_j^e \text{ area}(e)$$

donde N_i^e es la función de forma del nodo P_i restringida al elemento e , y

$$- \int_{\partial \Omega_j} \nabla \phi_k \, d\vec{\Gamma} = \sum_{e \in T^h} \nabla N_k^e \left(- \int_{\partial \Omega_j \cap e} d\vec{\Gamma} \right)$$

La afirmación queda probada si se verifica la siguiente igualdad:

$$- \int_{\partial \Omega_j \cap e} d\vec{\Gamma} = \nabla N_j^e \text{ area}(e)$$

Sean \vec{n}_1 , \vec{n}_2 , \vec{t}_1 y \vec{t}_2 los vectores indicados en la figura 2, y sea R la matriz de rotación de -90° .

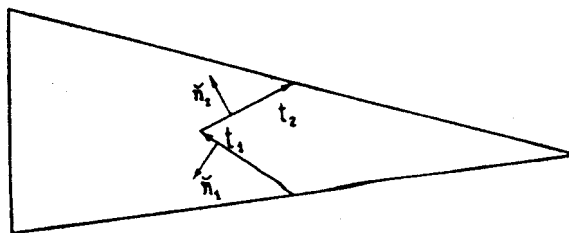


Figura 2: Elemento e

$$R(\text{area}(e) \nabla N_j^e) = \text{area}(e) \|\nabla N_j^e\| \frac{\overrightarrow{P_i P_k}}{\|\overrightarrow{P_i P_k}\|} = \dots$$

$$\dots = \overrightarrow{P_i P_k} / 2$$

$$R\left(-\int_{\partial\Omega_j} d\Gamma \vec{n}_e\right) = \|\vec{t}_1\| R(-\vec{n}_1) + \|\vec{t}_2\| R(-\vec{n}_2) = \overrightarrow{P_i P_k} / 2$$

luego la afirmación a) es cierta.

Demostración b):

$$\int_{\Omega_j} g \, dx = \int_{\text{ecT}^h} g^e (1/3 \text{ area}(e)) \, dx = \int_{\Omega} g \, \phi_j \, dx \quad +$$

$$L(X_j) = L(\phi_j) \quad + \quad L(q(\phi_j)) = L(\phi_j)$$

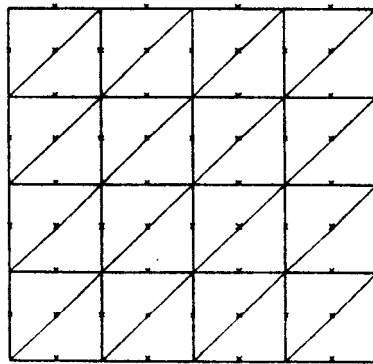
luego la afirmación b) es cierta.

Con lo cual $A = A'$ y $B = B'$

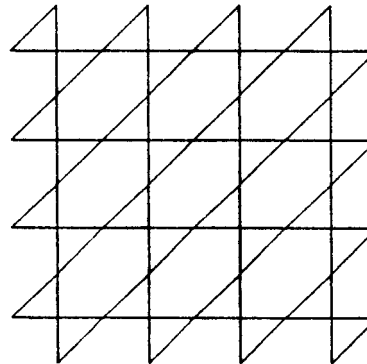
APROXIMACIÓN EXTERNA PARA LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE POISSON

Se implementó un programa para resolver el problema (1), utilizando elementos finitos no-conformes (triángulos de 3 nodos en los puntos medios de los lados). La convergencia de este método está probada en [1], y es de orden 2 (en la norma de $L^2(\Omega)$), al igual que en el caso conforme de triángulos cuadráticos de 6 nodos.

Se puede demostrar, y además se verificó numéricamente el hecho de que la solución con una red de elementos no-conformes como la que se muestra en la figura 3a es idéntica a la que se obtendría de la resolución con triángulos lineales conformes en la red no simplemente conexa que se muestra en la figura 3b.



(a)



(b)

Figura 3: a: Red de elementos no-conformes
b: Red de elementos conformes que da la misma solución

ESQUEMA DE ELEMENTOS FINITOS BASADO EN VOLÚMENES DE CONTROL: CASO DE FUNCIONES BASE DISCONTINUAS

En esta sección probaremos la equivalencia del MEF con los elementos de la sección anterior y del método de elementos finitos basados en volúmenes de control, los cuales son definidos alrededor de cada nodo P_i de la red como se muestra en la figura 4.

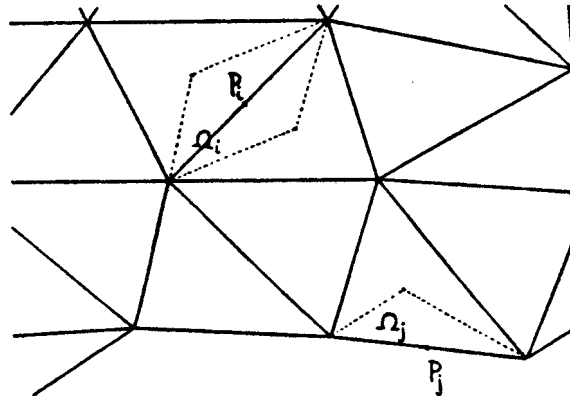


Figura 4: Volumen de control del nodo P_i

Sean ψ_j dadas por: $\psi_j(P_i) = \delta_{ij}$ y lineales en cada triángulo, y sean W^h el espacio generado por ellas. Observemos que las funciones de W^h son discontinuas en los bordes de los elementos pero continuas en los nodos. Debido a ello está bien definida la función q_* : $W^h \rightarrow L^h$, dada por:

$$q_*(v) = \sum_i v(P_i) X_i$$

donde L^h es:

$$L^h = \{ \eta \text{ tal que } \eta = \sum_i c_i X_i \text{ con } c_i \in \mathbb{R} \}$$

Ahora las funciones base son discontinuas en ∂e y las funciones de peso discontinuas en $\partial \Omega_i$. Usando el teorema de Green en el recinto $e \cap \Omega_i$ y sumando sobre e y sobre i se obtiene:

$$-\sum_e \sum_i \int_{\partial \Omega_i \cap e} \nabla u \cdot w \, d\vec{\Gamma} - \sum_e \sum_i \int_{\partial \Omega_i \cap e} \nabla u \cdot w \, d\vec{\Gamma} = \int_{\Omega} g \cdot w \, dx$$

poniendo $w = X_j$ obtenemos:

$$a_*^j(u^h, \psi_j) - P(\psi_j) = \sum_e \int_{\partial \Omega_i \cap e} \nabla u^h \cdot d\vec{\Gamma} \quad (4)$$

con $u^h \in W^h$

donde $a_*^1(u^h, \psi_j) = a'(u^h, \chi_j) = - \int_e \int_{\partial\Omega_j} \nu u^h d\vec{\Gamma}$

y $F(\psi_j) = F(\chi_j) = \int_{\Omega_j} g dx$.

Se resuelve:

$$a_*^1(u^h, w^h) = F(w^h) \quad (5)$$

es decir:

$$\sum_i u_i A''_{ij} = B''_j$$

donde:

$$A''_{ij} = - \int_e \int_{\partial\Omega_j} \nu N_i^e d\vec{\Gamma}$$

y

$$B''_j = \int_{\Omega_j} g dx$$

Proposición 2: a) Si b es constante por elemento:

$$- \int_e \int_{\partial\Omega_j} \nu N_i^e d\vec{\Gamma} = \int_e \nu N_i^e \nu N_j^e dx$$

b) Si g es constante por elemento:

$$\int_{\Omega_j} g dx = \int_{\Omega_j} g \psi_j dx$$

Demostración: Análoga a la de la sección anterior.

Como "corolario" resulta a_*^1 elíptica y entonces podemos aplicar el Lema de Strang (ver apéndice), que nos da una acotación del error. Según (4):

Si u^h es continua en Ω tenemos que:

$$a_*^1(u^h, \psi_j) - F(\psi_j) = 0 \rightarrow a_*^1(u^h, w^h) = F(w^h) \quad (5)$$

con lo cual el segundo y el tercer término de la acotación del error son nulos, resultando u_*^h , la solución del problema (5) convergente a la solución del problema (1).

APÉNDICE:

Supongamos que tenemos la siguiente formulación variacional de un problema elíptico:

Hallar $u \in H^1_E$ tal que:

$$a(u, v) = F(v) \text{ para todo } v \in H^1_{E0} \quad (1A)$$

donde H^1_E es el espacio de las funciones admisibles y H^1_{E0} es el espacio en el cual las condiciones de borde forzadas son nulas.

Supongamos que tenemos dos discretizaciones: una conforme:

Hallar $u^h \in V^h_E$ tal que:

$$a(u^h, v^h) = F(v^h) \text{ para todo } v^h \in V^h \quad (2A)$$

y otra no conforme :

Hallar $u^h_* \in V^h_{*E}$ tal que:

$$a_*(u^h_*, v^h_*) = F_*(v^h_*), \text{ para todo } v^h_* \in V^h_* \quad (3A)$$

Sean u , u^h y u^h_* las soluciones de los problemas (1A), (2A) y (3A) respectivamente.

Se tiene:

Proposición: Si a_* es una forma bilineal acotada entonces:

$$|a(u^h_* - v^h_*, w^h_*)| \leq \gamma \|u - v^h_*\|_* \|w^h_*\|_* + |F_*(w^h_*) - a_*(u, w^h_*)|$$

para todo $v^h_*, w^h_* \in V^h_*$, donde $\|v\|_* = (a_*(v, v))^{1/2}$

Luego se sigue:

Lema de Strang: Si a_* es una forma bilineal acotada y elíptica entonces existe $c > 0$ tal que:

$$\|u - u^h_*\|_* \leq c [\inf\{\|u - v^h_*\|_* : v^h_* \in V^h_*\} + \sup\{|F(w^h_*) - a_*(u, w^h_*)| \|w^h_*\|_*^{-1} : w^h_* \in V^h_*\} + \sup\{|F_*(w^h_*) - F(w^h_*)| \|w^h_*\|_*^{-1} : w^h_* \in V^h_*\}]$$

Una demostración de este lema se puede encontrar en [7, pp 174].

REFERENCIAS

- [1] CROUZEIX and RAVIART - "Conforming and nonconforming Finite Element Methods for solving the stationary Stokes equations I" R.A.I.R.O. R-3 pp 33-76 (1973)
- [2] F. THOMASSET - "Implementation of Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations" Springer series in computational physics. Springer-Verlag (1981)
- [3] KIKUCHI F. and USHIJIMA T. - "Theoretical Analysis of Some Finite Element Methods for Convective Diffusion Equations" in "Finite Elements in Fluids Vol. 4 Edited by GALLAGHER et al. John Wiley & Sons Ltd (1982)

- [4] PRAKASH C. and PATANKAR S.V. - "A Control Volume Based Finite Element Method for Solving the Navier Stokes Equation using Equal-Order Variable Interpolation" Numer. Heat Transfer, Vol. 8, pp 259-280, 1985
- [5] PRAKASH C. - "An Improved Control Volume Based Finite Element Method for Heat and Mass Transfer using Equal-Order Velocity-Pressure Interpolation", Numer. Heat Transfer, Vol. 9, pp 253-276, 1986
- [6] LARRETEGUY A., CONVERTI J. - "Algoritmo para Resolver la Ecuación de Transporte por Volúmenes de Control", presentado en MECOM'88, IX Congreso Latinoamericano e Ibérico sobre Métodos Computacionales para Ingeniería, Córdoba, 1988
- [7] STRANG G. and FIX G. - "An Analysis of the Finite Element Method" Prentice-Hall series in automatic computations. Prentice-Hall (1973)