

CALCULO NUMERICO DE PROBLEMAS ELIPTICOS MIXTOS
CON PRESENCIA DE CAMBIO DE FASE
MEDIANTE EL SOFTWARE CIENTIFICO MODULEF

María C. SANZIEL

Domingo A. TARZIA

PRDMAR (CONICET-UNR),
Instituto de Matemática "B. Levi",
Facultad de Cs.Ex., Ing. y Agr.,
Avda. Pellegrini 250,
(2000) Rosario, Argentina.

RESUMEN

Se considera un material Ω , dominio acotado de \mathbb{R}^n ($n=1,2,3$ en práctica), con una frontera regular $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$, con $\text{med}(\Gamma_1) > 0$ y $\text{med}(\Gamma_2) > 0$. Se impone sobre Γ_1 una ley de tipo Newton con coeficiente de transferencia $\alpha > 0$ y temperatura exterior $b > 0$, y sobre Γ_2 se considera un flujo de calor saliente $q > 0$.

En este trabajo se verifican numéricamente las condiciones necesarias y/o suficientes halladas teóricamente en [8], para $\alpha > 0$ y $q > 0$ de manera de obtener un cambio de fase, para un dado valor de temperatura exterior $b > 0$. Para ello, se resuelven numerosos problemas elípticos de tipo mixto usando el software científico MODULEF [1] para diversos dominios Ω .

ABSTRACT

We consider a material Ω , a bounded domain in \mathbb{R}^n ($n = 1, 2, 3$ in practice), with a regular boundary $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$, with $\text{meas}(\Gamma_1) > 0$ and $\text{meas}(\Gamma_2) > 0$. We impose on Γ_1 a Newton law with heat transfer coefficient $\alpha > 0$ and exterior temperature $b > 0$, and on Γ_2 we consider an outside heat flux $q > 0$.

In this work we do the numerical verification of the necessary and/or sufficient conditions developed in [8] for $\alpha > 0$ and $q > 0$ to obtain a change of phase, for a given value of the exterior temperature $b > 0$. For this purpose, we solve several elliptic problems of mixed-type, using the MODULEF Software [1] for various domains Ω .

I INTRODUCCION

Se considera un material Ω , un dominio acotado de \mathbb{R}^n ($n=1,2,3$ en la práctica), con frontera suficientemente regular $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$ ($\text{med}(\Gamma_1) > 0$ y $\text{med}(\Gamma_2) > 0$). Se supone, sin pérdida de generalidad, que la temperatura de cambio de fase es 0°C .

Se impone sobre Γ_1 una condición de tipo Newton con coeficiente de transferencia $\alpha > 0$ y temperatura exterior $b > 0$, y sobre Γ_2 un flujo de calor saliente $d > 0$. También se supone que la porción de frontera Γ_3 (cuando existe) es una pared adiabática al calor, es decir que el flujo de calor sobre Γ_3 es nulo.

Si se plantea en Ω un problema de conducción de calor estacionario, interesa encontrar condiciones necesarias y/o suficientes para el flujo de calor q sobre Γ_2 y para el coeficiente de transferencia de calor α sobre Γ_1 de manera de obtener un cambio de fase en Ω , es decir un problema de Stefan estacionario a dos fases en Ω . En otras palabras, interesa obtener temperaturas numéricas estacionarias de signo no-constante en Ω .

Empleando el método de los Elementos Finitos, a través del Software Científico MODULEF [1,6], se resuelven numerosos problemas elípticos de tipo mixto a fin de verificar numéricamente las condiciones suficientes, y en numerosos casos también necesarias, halladas en [8].

II FORMULACION MATEMATICA Y PROPIEDADES

Sea $\theta=\theta(x)$ ($x \in \Omega$) la temperatura en Ω . Si se supone que θ puede representarse de la siguiente manera:

$$\theta(x)=\begin{cases} \theta_1(x) < 0, & x \in \Omega_1 \quad (\text{fase sólida}), \\ 0 & x \in \Gamma \quad (\text{frontera libre}), \\ \theta_2(x) > 0, & x \in \Omega_2 \quad (\text{fase líquida}), \end{cases} \quad (1)$$

y se define la nueva función incógnita [3,4,9]

$$u = k_2\theta^+ - k_1\theta^- \quad \text{en } \Omega, \quad (2)$$

donde k_i es la conductividad térmica de la fase i ($i=1,2$), entonces se obtiene el problema ($B = k_2b > 0$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) } \Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega, \\ \text{(ii) } \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} = \alpha(u - B), \quad \text{(iii) } \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = q, \quad \text{(iv) } \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_3} = 0, \end{array} \right. \quad (3)$$

cuya formulación variacional está dada por [9] ($u = u_{\alpha q b}$):

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{\alpha}(u, v) = L_{\alpha q B}(v), \quad \forall v \in V, \\ u \in V. \end{array} \right. \quad (4)$$

donde

$$\begin{aligned} V &= H^1(\Omega), & a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \\ a_{\alpha}(u, v) &= a(u, v) + \alpha \int_{\Gamma_1} uv \, d\gamma, \end{aligned} \quad (5)$$

$$L_{\alpha q B}(v) = -q \int_{\Gamma_2} v \, d\gamma + \alpha B \int_{\Gamma_1} v \, d\gamma.$$

Problema: Para el caso $b > 0$, $q > 0$ y $\alpha > 0$ constantes se desean encontrar condiciones necesarias y/o suficientes para α y q en función del parámetro $b > 0$ ó $B > 0$, de manera de obtener un problema estacionario de Stefan a dos fases.

Observación 1: Si en (3) se sustituye la condición (3ii) por

$$u \Big|_{\Gamma_1} = B \quad (6)$$

entonces existe una constante $C = C(\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3) > 0$ de manera que si $q > q_0(B)$ se obtiene un problema de Stefan a 2 fases en Ω , donde [10]

$$q_0(B) = \frac{B}{C} \text{med}(\Gamma_2) \quad (7)$$

Para el problema planteado se obtuvieron en [8] los siguientes resultados:

Teorema 1: Si $q > q_0(B)$ se tiene un problema de Stefan a dos fases en Ω para todo $\alpha > \alpha_0$, donde

$$\alpha_0 = \alpha_0(q, B) = \frac{\text{med}(\Gamma_2) q}{\text{med}(\Gamma_1) B} \quad (8)$$

Teorema 2 Si $(\alpha, q) \in S^{(2)}(B)$, entonces se tiene un problema de Stefan a dos fases en Ω , donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} S^{(2)}(B) = \{(\alpha, q) \in (\mathbb{R}^+)^2 / q_m(\alpha, B) < q < q_M(\alpha, B)\}, \quad (B > 0) \\ q_m(\alpha, B) = \frac{B \text{med}(\Gamma_2)}{A(\alpha)}, \quad q_M(\alpha, B) = B\alpha \frac{\text{med}(\Gamma_1)}{\text{med}(\Gamma_2)}, \end{array} \right. \quad (9)$$

con $A = A(\alpha) > 0$ una función definida para $\alpha > 0$ y que tiene las siguientes propiedades:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{i) } A(\alpha) \text{ es decreciente,} & \text{ii) } A(\alpha) > \frac{[\text{med}(\Gamma_2)]^2}{\text{med}(\Gamma_1) \alpha}, \\ \text{iii) } \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha) = C, & \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha A'(\alpha) = 0. \end{array} \right. \quad (10)$$

Caso particular

En el caso en que la solución $u_{\alpha q B}$ verifique la condición

$$\frac{1}{q^2} a(u_{\alpha q B}, u_{\alpha q B}) = \text{constante} \quad (11)$$

se tiene

Teorema 3 Si $u_{\alpha q B}$ verifica (11), entonces se deduce que

$$u_{\alpha q B} \Big|_{\Gamma_1} = B - \frac{q \text{med}(\Gamma_2)}{\alpha \text{med}(\Gamma_1)} \quad (12)$$

$$A(\alpha) = C + \frac{[\text{med}(\Gamma_2)]^2}{\text{med}(\Gamma_1) \alpha}$$

y por ende se tiene una descripción completa del conjunto $S^{(2)}(B)$.

Observación 2 En el caso en que, debido a propiedades de simetría del

conjunto Ω , se verifica que $u_{\alpha qB}$ es constante sobre Γ_1 y sobre Γ_2 la condición suficiente dada por el Teorema 2, es también necesaria.

III RESULTADOS NUMERICOS

A continuación se verán los resultados numéricos obtenidos utilizando el método de los Elementos Finitos, a través del software científico MODULEF [1,5,6].

En todos los casos se trabajó con los siguientes datos:

$$\begin{cases} k_2 = 0,0014 \left[\frac{\text{cal}}{\text{cm seg } ^\circ\text{C}} \right] & (\text{conductividad térmica del agua}) \\ b = 5 \text{ } (^\circ\text{C}) \end{cases} \quad (13)$$

Ejemplo 1: Se consideran los siguientes datos

$$\begin{cases} n = 2, & \Omega = (0,1) \times (0,1), & \Gamma_1 = (0) \times [0,1], \\ \Gamma_2 = (1) \times [0,1], & \Gamma_3 = (0,1) \times (0) \cup (0,1) \times (1). \end{cases} \quad (14)$$

En este caso se verifica la condición (11) y los valores exactos de $A(\alpha)$, $q_m(\alpha, B)$ y $q_M(\alpha, B)$ vienen dados por [8]:

$$A(\alpha) = 1 + \frac{1}{\alpha}, \quad q_m(\alpha, B) = \frac{B}{1 + \frac{1}{\alpha}}, \quad q_M(\alpha, B) = B\alpha \quad (15)$$

Se realiza un mallado de 121 nodos y 100 elementos cuadriláteros de tipo Lagrange de grado 1 [2].

Considerando diferentes valores de α dados, se resuelven numerosos problemas del tipo (3) a fin de determinar valores máximos ($q_1(\alpha, B)$) y mínimos ($q_2(\alpha, B)$) para que no se produzca cambio de fase.

Se observa que la diferencia entre $q_m(\alpha, B)$ y $q_1(\alpha, B)$ y entre $q_M(\alpha, B)$ y $q_2(\alpha, B)$ es del orden de $5 \cdot 10^{-7} \left[\frac{\text{cal}}{\text{cm}^2 \text{ seg}} \right]$.

Los resultados obtenidos se resumen en la figura 1 en la cual se han considerado las siguientes notaciones:

----- : valores de $q_M(\alpha, B)$ exactos, ————— : valores de $q_m(\alpha, B)$ exactos,
 x x x x : valores de $q_2(\alpha, B)$ logrados, o o o o : valores de $q_1(\alpha, B)$ logrados.

Ejemplo 2: Se consideran los siguientes datos:

$$n = 2, \quad \Omega = \{(x,y) / x > 0, y > 0, 1 < x^2 + y^2 < 2\}$$

$$\Gamma_1 = \{(x,y) / x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 = 1\}$$

$$\Gamma_2 = \{(x,y) / x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 = 2\}$$

(16)

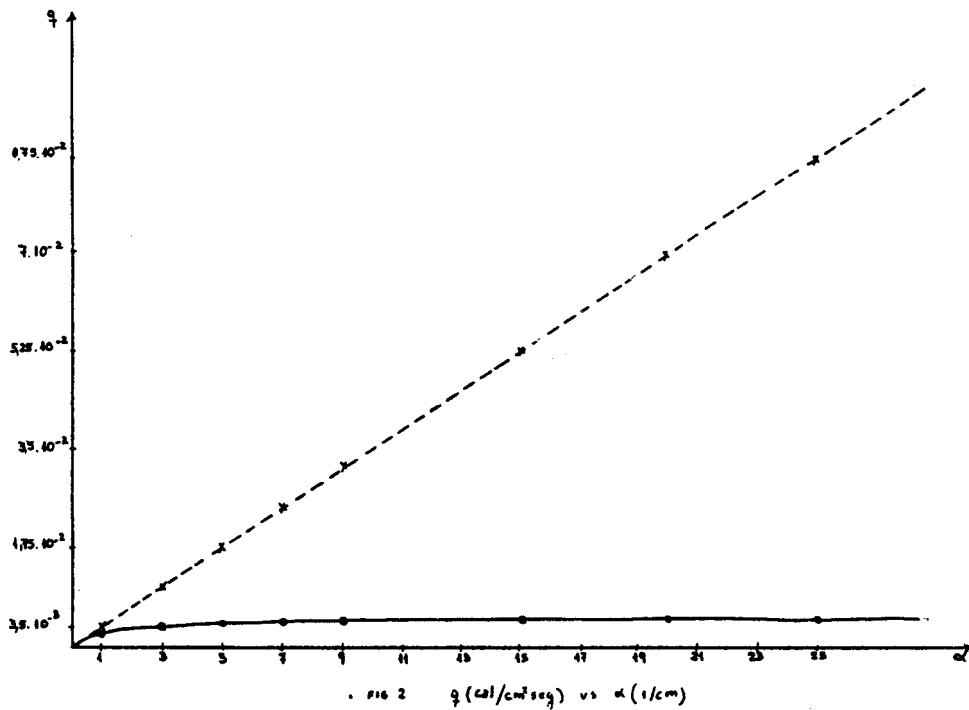
$$\Gamma_3 = (1,2) \times (0) \cup (0) \times (1,2).$$

En este caso también se verifica la condición (11) obteniéndose:

$$A(\alpha) = 2\pi(\log 2 + \frac{1}{2}), \quad a_m(\alpha, B) = B/2(\log 2 + \frac{1}{2}), \quad a_M = \frac{B}{2}x \quad (17)$$

Se realiza un mallado de 121 nodos y 100 elementos cuadriláteros de tipo Lagrange de grado 1 [2].

Procediendo como en el ejemplo 1 se obtienen los resultados que se muestran en la figura 2.



Ejemplo 3 Finalmente, se consideran los siguientes datos

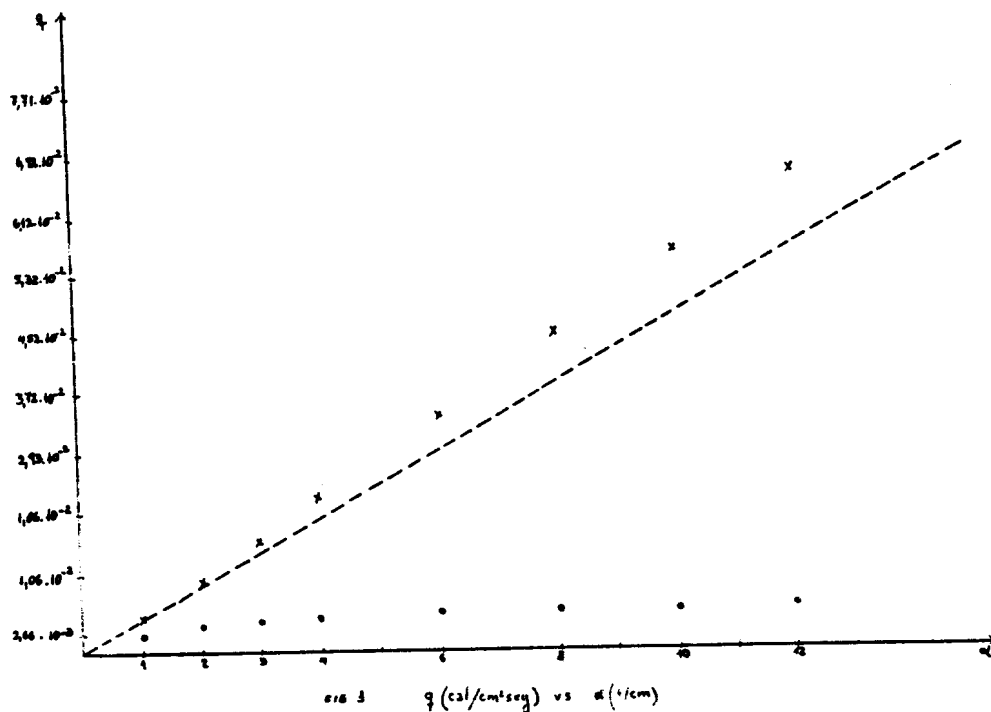
$$n = 2, \quad \Omega = \{(x,y) / x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < 1\}$$

$$\Gamma_1 = \{0\} \times [0,1], \quad \Gamma_3 = (0,1) \times \{0\}, \quad (18)$$

$$\Gamma_2 = \{(x,y) / x > 0, y > 0, x^2 + y^2 = 1\}$$

Se realiza un mallado de 86 nodos y 140 triángulos de tipo Lagrange de grado 1 [2].

Los resultados obtenidos se muestran en la figura 3.



Observación 3 En los dos primeros ejemplos los resultados numéricos obtenidos coinciden exactamente con los teóricos [8], pues la condición suficiente resulta ser también necesaria para la obtención de un cambio de fase.

En el tercer ejemplo se nota que la condición suficiente $(\alpha, q) \in S^{(2)}(B)$ no es necesaria para la obtención de un cambio de fase. Más aún, se obtienen numéricamente dos funciones $q_1(\alpha, B) < q_2(\alpha, B)$ que tienen las siguientes propiedades:

$$i) \quad q_1 \leq q_m < q_M \leq q_2 \quad \forall \alpha > 0, B > 0,$$

ii) la condición necesaria y suficiente para que exista un cambio de fase es que $\alpha > 0$ y $q > 0$ verifiquen las siguientes desigualdades:

$$q_1(\alpha, B) < q < q_2(\alpha, B) \quad \alpha > 0 \text{ para cada } B > 0.$$

El estudio teórico de la existencia y propiedades de q_1 y q_2 está siendo efectuado en [7].

REFERENCIAS

- [1] M. BERNADOU et al, "MODULEF: Une bibliothèque modulaire d'éléments finis", INRIA, Rocquencourt (1985).
- [2] P.G. CIARLET, "The finite element method for elliptic problems", North-Holland, Amsterdam (1978).
- [3] G.DUVAUT, "Problèmes à frontière libre en théorie des milieux continus", Rapport de Recherche N°185, LABORIA-IRIA, Rocquencourt (1976).
- [4] MFREMOND, "Diffusion problems with free boundaries", in Autumn Course on Application of Analysis to Mechanics, ICTP, Trieste (1976).
- [5] P.L.GEORGE, "Utilisation conversationnelle de MODULEF", Publications MODULEF N°108, INRIA, Rocquencourt, Mai 1984.
- [6] P.L.GEORGE, "Introducción al software científico MODULEF", CUADERNOS del Instituto de Matemática "BLevi", N°15, Rosario (1988).
- [7] R.L.V.GONZALEZ-D.A.TARZIA, "On some thermic flux optimization problems in a domain with Fourier boundary conditions and state restrictions", to appear.
- [8] E.D. TABACMAN-D.A. TARZIA, "Sufficient and/or necessary conditions for the heat transfer coefficient on Γ_1 and the heat flux on Γ_2 to obtain a steady-state two-phase Stefan problem", J. Diff. Eq., to appear.
- [9] D.A.TARZIA, "Sur le problème de Stefan à deux phases", Thèse 3ème Cycle, Univ. Paris VI (Mars 1979). C.R.Acad. Sc. Paris, 288A(1979),941-944. Ver también Math. Notae, 27(1979/80), 145-156, 157-165.
- [10] D.A.TARZIA, "Una desigualdad para el flujo de calor constante a fin de obtener un problema estacionario de Stefan a dos fases", en Mecánica Computacional, Vol. 2, S.R. Idelson (Ed), EUDEBA. Ver también "The two-phase Stefan problem and some related conduction problems", Reuniones em Matemática Aplicada e Computação Científica, Vol.5, SBMAC, Granada (1987).