

**SOBRE EL EMPLEO DEL METODO DE SUPERPOSICION MODAL EN EL
ANALISIS NO LINEAL DE CASCARAS DELGADAS**

Fernando G. Flores

Luis A. Godoy

Departamento de Estructuras
Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Nat.
Universidad Nacional de Córdoba
Casilla de Correos 918
5000 Córdoba - Argentina

RESUMEN

En el presente trabajo se muestra una aplicación del método de superposición modal, utilizando los modos lineales de pandeo, al análisis no lineal estático (simplificado) de cáscaras delgadas de revolución. La implementación sigue una formulación desarrollada originalmente por König.

ABSTRACT

An application of the modal superposition method using linear buckling vectors, to nonlinear analysis (simplified) of thin shells of revolution is presented. The implementation follows the formulation originally developed by König.

INTRODUCCION

En el análisis estructural por el método de elementos finitos (MEF), existe una gran diferencia en términos de esfuerzo computacional, entre un análisis estático lineal y uno no lineal; esto es particularmente marcado en el caso de láminas de revolución, donde las formulaciones semianalíticas conducen en el caso lineal a descomponer las cargas actuantes en armónicas circunferenciales y resolver sistemas de ecuaciones lineales desacoplados para cada armónica [1], en tanto que de requerirse un análisis no lineal, no sólo es necesario resolver en forma iterativa las ecuaciones resultantes, sino que los sistemas resultan acoplados.

El costo computacional del análisis no lineal por un lado ha desalentado su utilización y por otro ha dado lugar a la aparición de métodos aproximados, sean pseudo no lineales a través de técnicas de superposición modal o convirtiendo las no linealidades del sistema en pseudo fuerzas. El primero de los métodos ha sido utilizado con éxito en el análisis de entramados [2,3,4], en tanto que el segundo ha sido también aplicado a cáscaras delgadas de revolución [5]. Sin embargo estos métodos han estado restringidos a no linealidades débiles y en ningún caso son capaces de seguir trayectorias poscríticas.

Se han propuesto modificaciones sobre los métodos aproximados con el objeto de mejorar su comportamiento; estas modificaciones han consistido en:

- (a) utilizar distintas bases en el cálculo de los autovectores del sistema, que conduzcan a una convergencia más rápida de los mismos [6]
- (b) realizar actualizaciones intermedias de la matriz de rigidez [4]
- (c) utilizar no sólo los primeros modos sino también sus primeras derivadas como coordenadas generalizadas con el fin de mejorar la aproximación no lineal [7,8].

En este trabajo se ha implementado el método de superposición modal tal como fué presentado por König [2]. La implementación se realizó en un código existente (ALREF) [8] con capacidad de calcular cargas de bifurcación de láminas delgadas de revolución bajo cargas no axisimétricas. Este código utiliza el método de iteración de subespacios para la obtención de los modos de pandeo, por lo que la implementación fue bastante directa. Se presentan los resultados de la aplicación del código al análisis de una cáscara delgada con distintos grados de comportamiento no lineal. Finalmente se realizan algunos comentarios sobre la utilidad del método en este tipo de estructuras.

**IMPLEMENTACION DEL ANALISIS NO-LINEAL CINEMATICO MEDIANTE
LA UTILIZACION DE MODOS CRITICOS DE BIFURCACION**

Hipótesis básicas

La condición de energía potencial estacionaria dice

$$\int_{\mathcal{V}} (\delta \epsilon^T \cdot \sigma - \delta u^T \cdot F) dv = 0 \quad (1)$$

donde ϵ es el vector de deformaciones y F el vector de cargas aplicadas.

En el análisis por elementos finitos el campo de desplazamientos u puede ser expresado en términos de los valores de desplazamientos nodales r a través de las funciones de forma $\bar{\Phi}$

$$u = \bar{\Phi} \cdot r \quad (2)$$

$$\delta u = \bar{\Phi} \cdot \delta r \quad (3)$$

las relaciones deformación-desplazamiento no-lineales completas son:

$$\epsilon(r) = B^0 \cdot r + B^1(r) \cdot r \quad (4)$$

donde B^0 es sólo función de $\bar{\Phi}$, representando la parte lineal y $B^1(r)$ es función de $\bar{\Phi}$ y de r representando la parte no-lineal (cuadrática) de las relaciones deformación-desplazamiento. Puede mostrarse que $B^1(r)$ es puramente lineal en r de tal forma que $B^1(a) \cdot b = B^1(b) \cdot a$ es correcto para dos vectores a y b cualesquiera lo que permite escribir la variación de las deformaciones como:

$$\delta \epsilon = [B^0 + B^1(r)] \delta r + B^1(\delta r) \cdot r = [B^0 + 2B^1(r)] \delta r \quad (5)$$

la inserción de (3) y (5) en (1) lleva a las ecuaciones de equilibrio no-lineales exactas

$$\int_{\mathcal{V}} [B^0 + 2 B^1(r)]^T \sigma dv = R \quad (6)$$

donde

$$R = \int_{\mathcal{V}} \bar{\Phi}^T \cdot F dv \quad (7)$$

son las llamadas fuerzas nodales cinemáticamente equivalentes.

Asumiendo material lineal elástico con una matriz constitutiva D obtenemos

$$\sigma = D [B^0 + B^1(r)] \cdot r \quad (8)$$

esta es la expresión no lineal exacta de las tensiones (2° tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff) función de los desplazamientos nodales. Reteniendo el término $B^1(r)$ en (8) pero despreciándolo en (8), i.e. asumiendo un problema en que las tensiones dependen linealmente de r llegamos a :

$$\left(\int_{\mathcal{V}} [B^0]^T D B^0 dv \right) r + \left(2 \int_{\mathcal{V}} [B^1]^T D B^0 dv \right) r = R \quad (9)$$

La primera integral es la matriz de rigidez elástica. La segunda integral se identifica como la matriz de carga geometría correspondiente a esfuerzos derivados de los desplazamientos r usando relaciones deformación-desplazamiento lineales.

$$\epsilon_L = B^0 \cdot r$$

resultando las tensiones

$$\sigma_L = D \cdot B^0 r \quad (10)$$

usando (10) el segundo término de (9) puede escribirse como :

$$2 \int_V B^{1T}(r) \cdot \sigma_L dv = (2 \int_V C(\sigma_L) dv) r$$

donde la matriz C es simétrica, lineal en el vector de tensiones σ_L , y muy parecida en la forma a $B^1(r)$.

En consecuencia la ec. (9) puede escribirse como :

$$\underbrace{\left(\int_V [B^{0T} \cdot D \cdot B^0] dv \right)}_{K_e} r + \underbrace{\left(2 \int_V C(\sigma_L) dv \right)}_{K_g(\sigma_L)} r = R$$

o

$$[K_e + K_g(\sigma_L)] r = R \quad (11)$$

la ecuación (11) representa una relación entre las cargas aplicadas totales R y los desplazamientos totales r .

Asumimos ahora que las cargas aplicadas $R = \lambda R_0 + S_0$ (donde R_0 es un vector de carga de referencia y S_0 es un vector de cargas de valor fijo) están 'cercañas' a la carga de bifurcación lineal $\lambda R_1 + S_1$. 'Cercanía' entre $\lambda R_0 + S_0$ y $\lambda R_1 + S_1$ se define por ser ambas aproximadamente iguales y por similitud de los estados tensionales correspondientes

$$\sigma_L = \sigma_L (\lambda R_0 + S_0) \approx \sigma (\lambda R_1 + S_1) \quad (12)$$

El estado tensional real σ de acuerdo a $\lambda R_1 + S_1$ puede obtenerse a partir de una solución lineal (aunque satisfagan las relaciones no-lineales completas)

$$\sigma (\lambda R_1 + S_1) = D B^0 K_e^{-1} (\lambda R_1 + S_1) \quad (13)$$

entonces

$$\sigma_L \approx \sigma (\lambda R_1 + S_1) = D B^0 K_e^{-1} (\lambda R_1 + S_1)$$

$$\approx D B^0 K_e^{-1} (\lambda R_0 + S_0) = \lambda \underbrace{D B^0 K_e^{-1} R_0}_{\sigma_{0e}} + \underbrace{D B^0 K_e^{-1} S_0}_{\sigma_{0s}} \quad (14)$$

los vectores σ_{0e} y σ_{0s} contienen tensiones lineales producidas por R_0 y S_0 respectivamente. Reemplazando la ecuación (14) en la (11) obtenemos (haciendo $\sigma_L = \lambda \sigma_{0e} + \sigma_{0s}$)

$$[K_0 + K_G(\sigma_L)] r(\lambda) = \lambda R_0 + S_0 \quad (15)$$

dado que K_G depende linealmente de las tensiones, obtenemos finalmente:

$$[K_0 + K_G(\sigma_{0a}) + \lambda K_G(\sigma_{0r})] r(\lambda) = \lambda R_0 + S_0 \quad (16)$$

En lo siguiente omitimos σ_{0a} y σ_{0r} y reemplazamos $K_G(\sigma_{0a})$ por K_{G0} y $K_G(\sigma_{0r})$ por K_{Gr} .

Transformación de la ecuación básica y la solución no-lineal $r(\lambda)$

La ec. (16) puede transformarse a través del conjunto completo de vectores desplazamientos de los modos de pandeo x_i y puede entonces dejarse $r(\lambda)$.

Denotaremos por X una matriz (de dimensión $n \times n$), las columnas de la cual son los modos de pandeo x_i y por Λ una matriz de diagonal (de dimensión n) que contiene los valores λ_i que resultan de la solución del problema lineal de autovalores i.e., de

$$[K_0 + K_{G0} + \lambda_i K_{Gr}] x_i = [K_k + \lambda_i K_{Gr}] x_i = 0 \quad (17)$$

Entonces X puede normalizarse en la siguiente manera :

$$X^T K_k X = I \quad , \quad X^T K_{Gr} X = -\Lambda^{-1} \quad (18)$$

Además asumimos que los modos de pandeo están ordenados en forma creciente, i.e., $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n|$ (ec.18)

$$(K_k + \lambda K_{Gr}) r(\lambda) = \lambda R_0 + S_0 \quad (19)$$

puede entonces transformarse en :

$$\underbrace{(X^T X^T K_k X X^{-1})}_I + \lambda \underbrace{X^T X^T K_{Gr} X X^{-1}}_{-\Lambda^{-1}} r(\lambda) = \lambda R_0 + S_0 \quad (20)$$

$$y \quad X^T \left(\frac{1}{\lambda} I - \Lambda^{-1} \right) X^{-1} r(\lambda) = Q_0 \quad Q_0 = R_0 + S_0/\lambda \quad (21)$$

despejando $r(\lambda)$ obtenemos

$$r(\lambda) = X \underbrace{\left(\frac{1}{\lambda} I - \Lambda^{-1} \right)^{-1} X^T Q_0}_{\beta} \quad (22)$$

o

$$r(\lambda) = \sum_{i=1}^{i=n} \beta_i X_i \quad \beta_i = \frac{\lambda_i \cdot \lambda}{\lambda_i - \lambda} \alpha_i \quad \alpha_i = X_i^T Q_0 \quad (23)$$

la ec. (23) es una representación de $r(\lambda)$ en coordenadas generalizadas X_i . De la ec. (23) el máximo rango de validéz de la aproximación puede deducirse directamente

$$\lambda_{i-} < \lambda < \lambda_{i+} \quad (24)$$

donde λ_{1-} = máximo valor de los valores $\lambda_1 < 0$ y λ_{1+} , mínimo valor de los valores $\lambda_1 > 0$. Ya que si $|\lambda|$, aumentando desde cero se aproxima a $|\lambda_{1+}|$ o $|\lambda_{1-}|$ entonces $r(\lambda)$ en la ec.(23) se aproxima a infinito y se violan las hipótesis básicas mencionadas en la primera parte.

Solución lineal r_L

Si el problema considerado fuese completamente lineal, la solución puede encontrarse resolviendo

$$K_0 r_L = \lambda R_0 + S_0 \quad (25)$$

la transformación de la ec. (25) puede hacerse considerando que

$$K_0 = K_k - K_{gs}$$

$$r_L = \lambda r_0 + s_0$$

donde

$$r_0 = K_0^{-1} R_0$$

$$s_0 = K_0^{-1} S_0$$

queda entonces

$$K_k r_L = \lambda R_0 + S_0 + K_{gs} (\lambda r_0 + s_0)$$

$$\underbrace{X^{-T} X^T K_k X X^{-1}}_I r_L = \lambda R_0 + S_0 + K_{gs} (\lambda r_0 + s_0) \quad (26)$$

despejando r_L

$$\begin{aligned} r_L &= X X^T (\lambda R_0 + S_0 + K_{gs} (\lambda r_0 + s_0)) \\ &= \lambda X (\alpha + X^T K_{gs} (\lambda r_0 + s_0 / \lambda)) \end{aligned} \quad (27)$$

$$= \lambda X \alpha^*$$

$$r_L = \lambda \sum_{i=1}^n a_i^* X_i \quad a_i^* = X_i^T [Q_0 + K_{gs} q_0] \quad (28)$$

Desviación $rd(\lambda)$ de la solución no-lineal $r(\lambda)$ de la solución lineal

Por definición

$$rd(\lambda) = X \left[\left(\frac{1}{\lambda} I - \Lambda^{-1} \right)^{-1} X^T Q_0 - \lambda X^T Q_0 - \lambda X^T K_{gs} Q_0 \right]$$

$$= \underbrace{\mathbf{X} \lambda^2 [\mathbf{\Lambda} - \lambda \mathbf{I}]^{-1} \alpha}_{\mu} - \underbrace{\mathbf{X} \mathbf{X}^T \mathbf{K}_{\text{es}} \mathbf{q}_0}_{\mu^*} \lambda \quad (29)$$

$$0 \quad \mu_1(\lambda) = \sum_{i=1}^n (\mu_i - \mu_i^*) x_i \quad \alpha_i = x_i^T \mathbf{Q}_0 \quad (30)$$

$$\mu_i = \frac{\lambda^2}{\lambda_i^2 - \lambda} \alpha_i \quad \mu_i^* = \lambda x_i \mathbf{K}_{\text{es}} \mathbf{q}_0$$

donde para el caso de existir \mathbf{S}_0 (carga fija) los vectores \mathbf{Q}_0 y \mathbf{q}_0 dependen de λ y es necesario recalcularlos para cada valor de λ que se desee. Notar además que en caso de ser $\mathbf{Q}_0=0$, entonces $\mu = 0$, α_i es constante y se recupera la fórmula final dada por König.

APLICACION DEL METODO DE SUPERPOSICION MODAL A LAMINAS DE REVOLUCION

En un programa de elementos finitos basado en los desplazamientos integralmente desarrollado por los autores se ha realizado la implementación de la ec. 30; lo cual ha requerido modificaciones mínimas en el programa. El elemento utilizado es del tipo semianalítico, discretizándose el meridiano con elementos finitos, y el meridiano con series de Fourier. Este código (ALREF) es capaz actualmente de realizar: análisis de bifurcación con trayectorias precríticas lineales bajo cargas no axilsimétricas; análisis de bifurcación con trayectoria precrítica no lineal bajo cargas axilsimétricas; y seguimiento de trayectorias no lineales axilsimétricas con punto límite (basado en una formulación Lagrangeana total, utilizando el método de Newton - Raphson modificado en la iteración no lineal).

El programa utilizado calcula los n primeros autovalores positivos y sus correspondientes autovectores. El método empleado para resolver el problema de autovalores es el de iteración de subespacios tal cual aparece en la ref. [10], para lo cual ha sido necesario modificar el problema original de tal forma de que todos los autovalores sean positivos y los menores corresponden a los menores positivos del sistema original.

La implementación realizada, tal como se describe en el punto anterior permite descomponer las cargas actuantes en la estructura, en un conjunto de cargas fijas, esto es invariantes a través del proceso de carga (fuerzas másicas por ejemplo) y un conjunto de cargas incrementales que dependen linealmente de un parámetro adimensional de carga (λ). En consecuencia el código obtenido es teóricamente capaz de realizar una aproximación al comportamiento no lineal de una cáscara de revolución con geometría arbitraria, sometida a cualquier tipo de carga con un plano meridional de simetría, con la única limitación de que la influencia de los autovalores negativos sea despreciable (como ocurre en muchos casos).

EJEMPLO ANALIZADO

Para evaluar la calidad y confiabilidad del método se ha analizado un ejemplo clásico de la literatura de elementos finitos en cáscaras de revolución (ver Ref. [1]). La estructura indicada en la fig. 1.a es un

sector esférico rebajado sometido a una carga de anillo. El comportamiento de la cáscara depende de la relación entre el radio del anillo de carga "r" y el radio del sector esférico "a". Se han considerado tres relaciones r/a:

- 0,00: (carga puntual en el vértice) que tiene un fuerte comportamiento no lineal y es estable en toda la trayectoria
- 0,25: Con comportamiento no lineal moderado al comienzo, luego una zona de rigidez casi nula y finalmente una zona de fuerte rigidización
- 0,42: con comportamiento inicial moderadamente no lineal, coronado con un punto límite.

En la fig.1.b se muestra la trayectoria no lineal que sigue el desplazamiento vertical del vértice para los tres casos indicados. Estas trayectorias fueron reproducidas por el código ALREF (y coinciden con las existentes en la literatura) mediante un análisis no lineal completo.

Se ha modelado la estructura con 6 elementos que significan 28 grados de libertad; siendo este número pequeño, podrían utilizarse todos los modos, sin embargo basta tomar los 11 primeros debido a que los otros 17 corresponden a modos membranales de deformación cuyos autovalores son varias órdenes de magnitud superiores a los primeros.

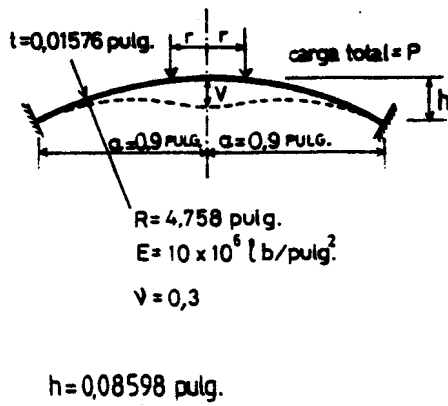
En la fig.2 se han graficado los desplazamientos del vértice de la cáscara en función de la carga aplicada (relativa a la primera carga de pandeo lineal), para cada una de las relaciones r/a. Los gráficos expuestos son suficientemente elocuentes respecto de la baja calidad de los resultados obtenidos usando el método de superposición modal referido a un análisis no lineal completo. En la fig.2.a se ve que la aproximación propuesta queda a mitad de camino entre un análisis lineal y uno no lineal completo; en tanto que en el caso (c) la aproximación propuesta difiere muy poco de la solución lineal alejándose marcadamente de la solución exacta. En el caso (b) mientras tanto ocurre algo parecido al (a) hasta $P/\lambda_1 = 0.3$ a partir del cual la fuerte pérdida de rigidez del modelo aleja las curvas irreconciliablemente.

CONCLUSIONES

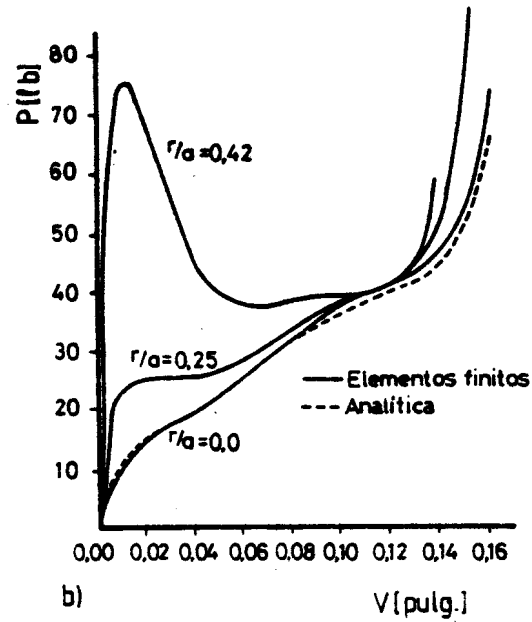
El método de superposición modal en análisis estático lineal que se ha demostrado de utilidad en estructuras de barras y entramados no parece ser de utilidad para el caso de láminas delgadas de revolución por las siguientes razones

- Está limitado a valores de carga menores que el primer autovalor lineal
- Requiere el cálculo de gran cantidad de autovalores de distinto signo (los menores en valor absoluto) que para estructuras compuestas o con carga no-axilsimétrica resulta muy caro computacionalmente
- No puede tener en cuenta en general el efecto real de la existencia de imperfecciones
- Esta limitado a pequeños desplazamientos para que sean válidas las hipótesis de trabajo
- No permite el seguimiento de trayectorias poscríticas

Se hace notar que la implementación realizada solo permite tener en cuenta los autovalores menores positivos. Sin embargo en el caso considerado esto no tiene influencia alguna pues todos los autovalores de interés son positivos.

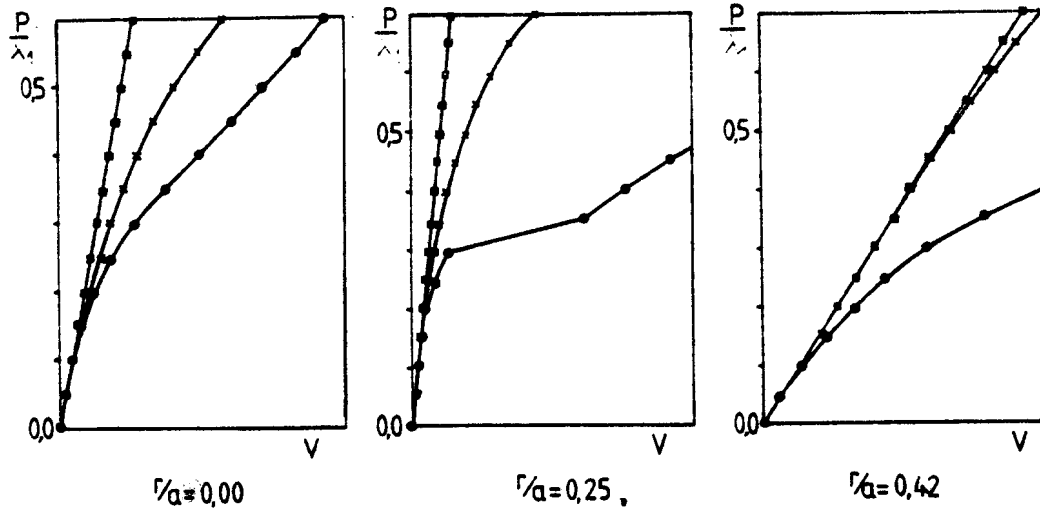


a)



b)

fig.1 (a) estructura analizada
 (b) comportamiento no lineal: desplazamiento vertical del vértice v vs. P .



Ref: ■ Lineal ● No lineal × Superposición Modal

(a)

(b)

(c)

Fig.2 desplazamiento del vértice v vs. P

REFERENCIAS

- [1] ZIENKIEWICZ, O.C., The Finite Element Method, Mc Graw Hill, Londres, 1977.
- [2] NAGY, D.A., KONIG, M., "Geometrically Nonlinear Finite Element Behaviour Using Buckling Mode Superposition", Computer Methods in Applied Mechanics and Engng., vol 19, págs. 447-84, 1979.
- [3] KONIG, M., "Technical Note on Mode Superposition in Buckling Analysis", Computer Methods in Applied Mechanics and Engng., vol 28, págs. 117-25, 1981.
- [4] MOTA, J.E., LIMA, E.C.P., "Aplicação da Método da Superposição Modal na Análise Estática Não Linear de Estruturas", VIII MECOM, Rio de Janeiro, 3-5 de noviembre de 1987, vol A, págs. 55-69.
- [5] WUNDERLICH, W., CRAMER, H., OBRECHT, H., "Applications of Ring Elements in the Nonlinear Analysis of Shells of Revolution Under Nonaxisymmetric Loading", Computer Methods in Applied Mechanics and Engng., vol 51, 1985, págs. 259-75.
- [6] MEDEIROS, S.R.P., "Análise Estática Não Linear Geométrica de Estruturas Pelo Método de Superposição Modal com Base Lanczos-Ritz", Tese de M.Sc., COPPE/ UFRJ, 1985.
- [7] IDELSOHN, S., CARDONA, A., "A Load Dependant Basis for Reduced Nonlinear Structural Dynamics", Computers and Structures, vol 20, págs. 203-10, 1985.
- [8] IDELSOHN, S., CARDONA, A., "A Reduction Method for Nonlinear Structural Dynamic Analysis", Computer Methods in Applied Mechanics and Engng., vol 42, 1985, págs. 253-79.
- [9] FLORES, F.G., GODOY, L.A., "Un Elemento de Cáscara de Revolución para Análisis de Bifurcación bajo cargas no Axilimétricas", VII MECOM, Sao Carlos, SP-BRASIL, 4-7 de noviembre de 1986. Tomo I
- [10] BATHE, K.J., Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice Hall, 1982.