

REFINAMIENTO ADAPTIVO EN ECUACIONES HIPERBOLICAS
DISCRETIZADAS MEDIANTE SUPG

N.Nigro
M.Storti
S.Idelsohn

*Instituto de Desarrollo Tecnológico para la
Industria Química - INTEC
CONICET - Universidad Nacional del Litoral
Güemes 3450
3000 - Santa Fe, Argentina*

RESUMEN

Este trabajo consiste en la implementación del método de Streamline Upwind Petrov-Galerkin formulado por Hughes et-al [1] en un código de elementos finitos para tratar problemas de advección difusión escalar, estacionario y lineal. Los aspectos teóricos son mencionados sin entrar en profundidad y se pasa de inmediato a los detalles de la implementación y a mostrar los ejemplos que permiten validar a modo de test la formulación. El resto del trabajo consiste en discutir ciertos aspectos relacionados con la utilización de una estrategia de refinamiento adaptativo. Al respecto se hizo especial hincapié en el tratamiento de los nodos irregulares en lo que atañe a la forma de condensarlos cuando se usa una formulación Petrov-Galerkin, encontrándose algunas mejoras en algunos casos respecto a la técnica standard ampliamente difundida. Sin embargo la generalización a todos los casos no es obvia. Se muestran resultados con los avances obtenidos y se sacan conclusiones acerca de los mismos.

ABSTRACT

This work consist in the implementation of SUPG method by Hughes et-al [1] in a finite element code to treat steady,linear,scalar advection-diffusion problems. The theoretical aspects are mentioned without go into details and several examples are shown to check the formulation. The rest of the paper deals with certain aspects in relation with adaptive refinement strategy. The treatment of irregular nodes was the central issue developed in this work. The problems that appear in the implementation of this strategy in a Petrov-Galerkin context are commented and some improvements respect to the standard way are mentioned. However the generalization is not so obvious. Some results and conclusions are shown.

INDICE TEMATICO

Parte 1. Implementación de SUPG.

- a) Definición del Problema.
- b) Discretización espacial. Utilización de una formulación Petrov-Galerkin con una técnica de upwind tipo Streamline.
- c) Definición de la función de peso usada en SUPG.
- d) Ejemplos numéricos.

Parte 2. Utilización de una estrategia de refinamiento adaptativo.

- a) Condensación de nodos irregulares.
 - 0.- Introducción.
 - 1.- Caso uni-dimensional. Inconvenientes hallados con la forma standard de la matriz de condensación aplicada sobre una formulación SUPG. Solución propuesta.
 - 2.- Caso bi-dimensional. Inconvenientes hallados con una extensión directa de la solución encontrada en el caso uni-dimensional. Solución propuesta.
 - 3.- Ejemplos numéricos y conclusiones.

Parte 3. Conclusiones finales y Referencias.

1.- IMPLEMENTACION DE SUPG

1.-a. Definición del problema

El problema a resolver es la ecuación de advección difusión escalar lineal y estacionaria. Como generalización se trabajó sobre una ecuación donde el término de flujo difusivo proviene de un tensor de difusividad que permite tratar casos no isotrópicos, y con el agregado de dos términos fuentes, uno de ellos proporcional a la variable dependiente. El objetivo es hallar la solución al siguiente problema

$$\nabla \cdot (\underline{\sigma}_a + \underline{\sigma}_d) - c \phi = f \quad (1.1)$$

en $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

donde

$$\underline{\sigma}_a = \underline{u} \phi \quad (1.2.a)$$

$$\underline{\sigma}_d = -\underline{k} \cdot \nabla \phi \quad (1.2.b)$$

representan los flujos advectivos y difusivos respectivamente.

Además

$$\phi = \phi(\underline{x}) \quad (1.3.a)$$

$$\underline{u} = \underline{u}(\underline{x}) \quad (1.3.b)$$

$$\underline{k} = \underline{k}(\underline{x}) \quad (1.3.c)$$

representan la variable dependiente, el campo de velocidades y el tensor difusivo del problema respectivamente, todos función del vector posición \underline{x} .

Por último $c\phi$ y f son términos fuentes.

Consideremos Γ el borde del dominio Ω como formado por dos subconjuntos de puntos, el primero conteniendo aquellos donde se aplican condiciones de contorno tipo esencial y el segundo con condiciones tipo natural.

$$\Gamma = \overline{\Gamma_g \cup \Gamma_h} \quad (1.4.a)$$

$$\emptyset = \Gamma_g \cap \Gamma_h \quad (1.4.b)$$

Las condiciones de contorno son:

$$\phi(\underline{x}) = g(\underline{x}), \quad \forall \underline{x} \in \Gamma_g \quad (1.5.a)$$

$$\underline{n} \cdot (\underline{k} \cdot \nabla \phi) = h(\underline{x}), \quad \forall \underline{x} \in \Gamma_h \quad (1.5.b)$$

siendo \underline{n} la normal exterior del borde.

1.-b Discretización espacial

Como es habitual en la formulación por elementos finitos de un problema se requiere la discretización del dominio y la elección de espacios de funciones admisibles. A tal efecto tomamos subdominios elementales Ω^e tales que satisfagan las siguientes condiciones:

$$U_e \overline{\Omega^e} = \overline{\Omega} \quad (1.6.a)$$

$$\cap \Omega^e = \emptyset \quad (1.6.b)$$

y si denominamos

$$\Gamma^e \text{ al borde de } \Omega^e \quad (1.6.c)$$

entonces definimos

$$\Gamma_{int} = U_e \Gamma^e - \Gamma \quad (1.6.d)$$

que representan los contornos interelementos. Más adelante detallaremos sobre el tipo de elemento tratado. Con respecto a los espacios de funciones definimos los sgs.:

Sea $V_h \subset H^1(\Omega)$ espacio de funciones peso tal que $N^h \in V^h$ y $N^h(\underline{x}) = 0 \forall \underline{x} \in \Gamma_g$.

Sea $S_h \subset H^1(\Omega)$ conjunto de las funciones de interpolación tal que $\phi^h \in S^h$ satisface que $\phi^h(\underline{x}) = g(\underline{x}) \forall \underline{x} \in \Gamma_g$.

En una formulación Galerkin del método de residuos ponderados las funciones de peso son consideradas continuas a través de los bordes interelementos y similares a las funciones de interpolación. La formulación *Streamline Upwind Petrov-Galerkin* requiere el uso de funciones de peso de la forma

$$\tilde{N}^h = N^h + p^h \quad (1.7)$$

donde p^h representa una contribución discontinua que dará origen a un upwind introducido según las líneas de corriente. Entonces el problema se resume en encontrar

$\phi^h \in S^h$ tal que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} N^h \nabla \cdot (\underline{u} \phi^h) - \nabla N^h \cdot (-\underline{k} \cdot \nabla \phi^h) - N^h c \phi^h \, d\Omega + \\ & + \sum_e \int_{\Omega^e} p^h (\nabla \cdot (\underline{u} \phi^h) + \nabla \cdot (-\underline{k} \cdot \nabla \phi^h) - c \phi^h - f) \, d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} N^h f \, d\Omega + \int_{\Gamma_h} N^h h \, d\Gamma \end{aligned}$$

$$\forall N^h \in V^h \quad (1.8)$$

Realizando la integración por partes obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} & \sum_e \int_{\Omega^e} \tilde{N}^h (\nabla \cdot (\underline{u} \phi^h) + \nabla \cdot (-\underline{k} \cdot \nabla \phi^h) - c \phi^h - f) \, d\Omega - \\ & - \int_{\Gamma_h} N^h (\underline{n} \cdot (-\underline{k} \cdot \nabla \phi^h) + h) \, d\Gamma - \int_{\Gamma_{int}} N^h [[\underline{n} \cdot (-\underline{k} \cdot \nabla \phi^h)]] \, d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

donde $[[\underline{n} \cdot (-\underline{k} \cdot \nabla \phi^h)]]$ representa el salto de la variable encerrada entre corchetes en la dirección normal a una superficie establecida, en este caso el flujo difusivo. Como vemos a

partir de ésta expresión las ecuaciones de *Euler-Lagrange* de nuestro problema son la (1.1) para los elementos interiores, la (1.5.b) y la condición de continuidad del flujo difusivo a través de los bordes interelementos.

A continuación detallamos tal función y posteriormente la introducimos dentro de la formulación por residuos ponderados.

1.-c Función de peso SUPG

Con el agregado de una perturbación discontinua sobre la función de interpolación, la función de peso adquiere ciertas propiedades interesantes de resaltar. Por definición la función de peso perturbada es según (1.7)

$$\tilde{N}^k = N^k + p^k$$

donde

$$p^k = \tau \underline{u} \cdot \underline{\nabla} N^k \quad (1.10)$$

siendo τ un escalar que más adelante detallaremos. Una de las propiedades interesantes a comentar es que p^k es discontinua en las fronteras interelementos y además que introduce un descentrado según las líneas de corriente, tal como se detalla en [1].

Su aplicación a los términos convectivos produce lo siguiente:

$$\int_{\Omega} \tilde{N}^k \underline{\nabla} \cdot (\underline{u} \phi^k) \, d\Omega = \int_{\Omega} N^k \underline{\nabla} \cdot (\underline{u} \phi^k) + \int_{\Omega} \tau \underline{u} \cdot \underline{\nabla} N^k \underline{\nabla} \cdot (\underline{u} \phi^k) \quad (1.11)$$

teniendo el segundo término del miembro derecho el aspecto de un aporte difusivo extra, proveniente de la función de perturbación. A su vez la aplicación de la función de peso perturbada sobre los términos difusivos del problema original debe ser comentada pues aparecen ciertas restricciones, a saber:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\tilde{N}^k \underline{\nabla} \cdot (-\underline{k} \cdot \underline{\nabla} \phi^k)) \, d\Omega &= \int_{\Omega} (N^k \underline{\nabla} \cdot (-\underline{k} \cdot \underline{\nabla} \phi^k)) \, d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} (\tau \underline{u} \cdot \underline{\nabla} N^k \underline{\nabla} \cdot (-\underline{k} \cdot \underline{\nabla} \phi^k)) \, d\Omega \end{aligned} \quad (1.12)$$

El segundo término del segundo miembro se anula si se cumplen las siguientes condiciones:

- 1.- los elementos son rectangulares
- 2.- las funciones de interpolación ϕ^k son multilineales

Si los elementos tuvieran formas no muy alejadas de las rectangulares se podría despreciar el aporte de éste término. En este trabajo usamos elementos de forma casi rectangular y funciones de interpolación bilineales, por lo tanto asumimos que

$$p^k \underline{\nabla} \cdot (\underline{\sigma}_k) = 0 \quad (1.13)$$

En cuanto al parámetro r , usamos como definición la que surge de

$$r = \frac{\xi}{\|b\|_p} \quad (1.14)$$

ξ es un número adimensional dependiente del número de Peclet (Pe) del problema. Para la definición de ξ , nosotros hemos probado 3 diferentes alternativas, a saber:

Alternativa 1:

$$\xi = \coth(\alpha) - \frac{1}{\alpha} \quad (1.15.a)$$

Alternativa 2:

$$\xi = \begin{cases} \frac{\alpha}{3} & \text{si } \alpha \in [-3, 3] \\ \text{signo } \alpha & \text{si } |\alpha| > 3 \end{cases} \quad (1.15.b)$$

Alternativa 3:

$$\xi = \begin{cases} -(1 + \frac{1}{\alpha}) & \text{si } \alpha < -1 \\ 0 & \text{si } \alpha \in [-1, 1] \\ (1 - \frac{1}{\alpha}), & \text{si } \alpha > 1 \end{cases} \quad (1.15.c)$$

Como conclusión acerca de la bondad de las tres definiciones de ξ podemos adelantar que no hemos detectado diferencias sustanciales.

Para hallar el número de Peclet se necesita una longitud característica y una difusividad. Nosotros usamos como longitud la que surge de la siguiente expresión:

$$h = \frac{2}{\sum_j |\nabla N_j \cdot \hat{u}_j|}; \quad \hat{u}_j = \text{versor velocidad } j=1, \dots, Nel \quad (1.16)$$

que representa la dimensión siguiendo una línea de corriente y como difusividad la que resulta de hacer:

$$\frac{\underline{u}^T \underline{k} \underline{u}}{\underline{u}^T \underline{u}} \quad (1.17)$$

que equivale a una proyección del tensor difusivo en la dirección del vector velocidad.

Por último \underline{b} se define como $\underline{b} = \{b_i\}; i = 1, \dots, N$

$$b_i = \sum_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} u_j; \quad \text{con } j = 1, \dots, N. \quad (1.18)$$

siendo ξ_i las coordenadas del elemento master y x_j las del dominio original.

1.-d Ejemplos numéricos

Una serie de ejemplos numéricos se han corrido recopilados del trabajo de Hughes-Brooks [1] que nos permitieron validar nuestro elemento. Entre ellos podemos citar los siguientes:

- 1) Advección de una discontinuidad con distintos ángulos de incidencia y con condición de contorno libre a la salida.
- 2) Advección de una discontinuidad con distintos ángulos de incidencia y con condición de contorno esencial a la salida.
- 3) Advección pura con un término fuente.
- 4) Advección de una onda coseno por un campo de velocidades de rotación.
- 5) Test de Hutton-Smith.

Para los ejemplos 1) y 2) se han comparado las soluciones usando tanto una formulación Galerkin como una SUPG con 1 y 2 puntos de Gauss, y se muestran ejemplos con varios ángulos de incidencia, en los gráficos [1.1] a [1.4] para el ejemplo 1) y [1.5] a [1.8] para el ejemplo 2). Se usaron mallas de 10 x 10 elementos. La gráfica A representa la solución usando 1 punto de Gauss, la B usando 2 puntos de Gauss y la C con una formulación Galerkin.

Cabe mencionar que en el ejemplo 2 usando la formulación Galerkin sólo mostramos los resultados para 0 grados . gráfico [1.5.c], pues las oscilaciones son tan grandes que la solución hallada no reviste ningún interés.

Allí se pueden verificar resultados similares a los detallados en [1] y las conclusiones en general favorecen netamente a la formulación SUPG sobre la clásica Galerkin.

1.- Condición natural a la salida.

Como se expresa en el mencionado trabajo, para un ángulo de incidencia de 0 grados no existe diferencia entre la solución exacta, la obtenida usando Galerkin y la SUPG. Para 22.5 grados tanto la solución con Galerkin como la SUPG con un punto de Gauss presentan un comportamiento más oscilatorio que el obtenido con SUPG con dos puntos de Gauss. A 45 grados las discrepancias entre la formulación Galerkin y la SUPG parecen aumentar considerablemente, aquí cabe mencionar que usando SUPG con un punto de Gauss se alcanza la solución exacta en los nodos. A 67.5 grados vuelve a disminuir las diferencias entre usar Galerkin y SUPG.

2.- Condición esencial a la salida.

Aquí solo nos referiremos a la formulación SUPG. En el caso de 0 grados los resultados concuerdan con los exactos. Para 22.5 grados introducir dos puntos de Gauss en lugar de uno produce una solución con muchas menos oscilaciones y difusividad. A 45 grados los resultados muestran una solución exacta para el caso de un punto de Gauss mientras que con dos puntos existe cierta difusividad. Por último para 67.5 grados un esquema con un punto de Gauss es muy oscilatorio mientras que con dos éstos disminuyen notablemente. Es de destacar que los dos últimos casos , a 45 y 67.5 grados , presentan dos capas límites mientras que los restantes dos ejemplos solo 1, con lo cual el comportamiento de la solución es notoriamente distinto.

3.- Advección pura con un término fuente.

Este ejemplo permite probar un punto débil de muchos esquemas que utilizan *upwind*. Los resultados muestran soluciones viciadas por las oscilaciones en los casos en que se usaron tanto la formulación Galerkin (Fig 1.9.c) como la SUPG con un solo punto de Gauss (Fig 1.9.b), mientras que con dos puntos de Gauss se obtuvo la solución exacta. (Fig 1.9.a)

4.- Advección de una onda coseno por un campo de velocidades de rotación.

Este presenta la posibilidad de testear el elemento en los casos donde las líneas de corriente son cerradas dentro del dominio y por lo tanto cualquier difusividad artificial existente en la solución provocaría una deformación en la misma. En nuestro caso estos defectos no se evidenciaron a pesar de haber utilizado una malla de 16 x 16 (Fig. 1.10)

5.- Test de Hutton-Smith

Por último se corrió un ejemplo citado en [2] y denominado test de *Smith and Hutton* y que consiste en la advección de una función

$$f(x) = 1 + \tanh(10(2x + 1))$$

por un campo de velocidades cuyas componentes son

$$u(x, y) = 2y(1 - x^2)$$

$$v(x, y) = -2x(1 - y^2)$$

En la (Fig 1.11) se muestra una definición del problema, dos vistas de la solución y por último una comparación entre la solución exacta (graficada continua) representada por la misma función existente a la entrada, ahora puesta a la salida, y la solución numérica obtenida por SUPG (graficada por puntos). Cabe mencionar que se usó para este test una malla de 30 x 15 elementos y es obvia la necesidad de un refinamiento en la zona de grandes variaciones de la solución para poder aproximar mejor la solución.

2.- UTILIZACION DE UNA ESTRATEGIA DE REFINAMIENTO ADAPTATIVO

Como es conocido, cuando uno desea aplicar una estrategia de refinamiento adaptativo sobre un código de elementos finitos aparecen ciertos temas a tratar que conforman el núcleo central de la misma. Uno de éstos temas se refiere al criterio a utilizar para determinar en qué parte del dominio se requiere una mayor precisión de la solución. Una vez fijado dicho criterio aparece en escena otro de los temas de preponderancia como es el de decidir el manejo de los datos vigentes y la generación de los nuevos. Del primer tema mencionado se desprende la elección del estimador de error y del segundo - entre otros - la estructura de datos a utilizar.

En este trabajo no se persiguió la idea de testear diversos estimadores y/o estructuras de datos adecuadas, sino por el contrario, fijadas las mismas atacar un problema que está vinculado con el uso de refinamiento adaptativo sobre una formulación SUPG usando elementos cuadrangulares. Nos referimos al tratamiento de los nodos irregulares.

2.-a Condensación de nodos irregulares

0.- Introducción

Cuando uno intenta ensamblar tanto la matriz de rigidez como el vector residuo en aquellos elementos que poseen nodos irregulares se encuentra con la dificultad de decidir qué hacer con las contribuciones sobre dichos nodos. En principio y para el resto del paper se define interfase de refinamiento a la unión de bordes entre elementos que poseen distinto nivel de refinamiento. Además, como se sabe aquí nos restringimos a aplicar el criterio de 1-irregular con lo que esa diferencia se fija en una unidad. Una técnica muy utilizada consiste en forzar que exista continuidad en la función interpolante asumiendo que

$$u_I = \frac{1}{2}(u_I^- + u_I^+) \quad (2.1)$$

donde

u_I es la solución en el nodo irregular y u_I^{\pm} son las soluciones en los nodos vecinos al irregular ubicados sobre la interfase de refinamiento que lo contiene.

Este tipo de restricción puede ser introducida dentro del problema

- a) explícitamente: modificando las funciones base global de modo tal de satisfacer la restricción expresada de antemano o repartir las contribuciones obtenidas a nivel del elemento en la etapa de armado del sistema de ecuaciones a resolver. Esto presenta ciertas diferencias en los casos no lineales.[6]
- b) implícitamente: mediante multiplicadores de Lagrange o métodos de penalidad.[4]

Asumiendo en adelante el método explícito si uno pretende seguir el mismo razonamiento cuando lo aplica sobre una formulación Petrov-Galerkin en un problema dominado por advección sucede que la conclusión de partir por mitades las mencionadas contribuciones sobre los nodos vecinos ([3]) provoca ciertos inconvenientes sobre los cuales pretendemos en éste trabajo explayarnos.

Para visualizar el inconveniente intentaremos resolver un problema unidimensional de advección pura donde existe un refinamiento localizado en un lugar donde la solución presenta un salto. Este ejemplo proviene de un caso un poco más general que sería el problema en dos dimensiones donde uno realiza un corte sobre la interfase de refinamiento y supone que en la dirección perpendicular el dominio es infinito.

En la primera sección intentaremos reproducir las funciones de peso asignadas a los nodos vecinos al irregular cuando se usa la tan popular técnica de distribuir por mitades la contribución correspondiente al mismo nodo.

Luego trataremos de explicar una forma ya conocida de solucionar este problema y que consiste en redefinir el parámetro τ que participa en la función de peso perturbada de SUPG de forma tal de conseguir que ésta conserve las mismas características observadas en zonas donde no aparecen nodos irregulares. Veremos que esto es posible de una forma muy sencilla.

En la segunda sección trataremos de extender el resultado a dos dimensiones. Allí veremos la aparición de inconvenientes relacionados con la pérdida de simetría en la interfase de refinamiento y que provoca oscilaciones espurias no solo en la dirección longitudinal - como en el caso unidimensional - sino también en la dirección transversal.

Se presentan luego algunas probables formas de solucionar el inconveniente de las oscilaciones longitudinales.

En la última sección se muestra la solución del problema modelo y las conclusiones acerca de la generalidad del método y de las proyecciones futuras.

1.- Caso uni-dimensional

En la figura 2.1 vemos la función de peso SUPG aplicada al nodo i que hará las veces de nodo irregular en la explicación que a continuación se detalla. Cuando una parte por mitades la contribución sobre el nodo irregular en sus vecinos $i-1$, $i+1$ las funciones de peso correspondientes a estos últimos nodos provocan una distorsión tal que deja de ser óptimo en el caso unidimensional. Esto provoca la aparición de oscilaciones espurias. Por tal motivo es de sumo interés conservar al menos las propiedades ganadas en estos problemas modelos y es a raíz de esto que apareció una sencilla solución a este inconveniente para el caso unidimensional [5]. Esta consiste en alterar el valor del parámetro de upwind τ de forma tal que al agregar a los nodos vecinos una mitad de la contribución del nodo irregular se recupere el aspecto de la función de peso sobre la malla original (sin considerar al nodo irregular como perteneciente a la misma). Las funciones de peso resultantes se muestran en la figura 2.2.a hasta 2.2.c.

En la parte 1 de este trabajo se presentó a la función de peso de la formulación SUPG - ecuación (1.7) -

$$\tilde{N}^k = N^k + \tau \underline{u} \cdot \underline{\nabla} N^k$$

En el caso unidimensional y con advección pura τ adquiere la forma

$$\tau = \frac{h}{(2 \cdot |u|)} \quad (2.2)$$

y con un poco de álgebra llegamos al siguiente resultado

$$\tilde{N}^k = N^k + N_{,x}^k \left(\frac{2}{\alpha} \right) \text{sgn}(u) \quad (2.3)$$

donde N_{ξ}^k se refiere a la derivada de la función de interpolación respecto a la coordenada del elemento máster ξ

α es un parámetro escalar y $\text{sgn}(u)$ se refiere a la función signo de la velocidad y que influye sobre el decentraje de la función de peso.

Cuando se usa una formulación SUPG sobre una malla homogénea con un valor $\alpha = 2$ da como resultado una solución exacta en los nodos independiente del valor de la longitud de los elementos. Cuando pasamos al caso donde existe refinamiento adaptativo con nodos irregulares si tomamos un valor $\alpha = 1$ para los elementos que comparten un nodo irregular y si luego descargamos la contribución del nodo irregular en mitades sobre cada uno de sus dos vecinos logramos reproducir los resultados nodales exactos. La función de peso finalmente obtenida se puede apreciar en las figuras 2.2.d y e para los nodos vecinos al irregular.

2.- Caso bi-dimensional

Como es natural se pretendió extender los resultados encontrados en el caso uni-dimensional al bi-dimensional. Si uno estudia la grafica del residuo en las inmediaciones de una discontinuidad cuando existe un nodo irregular y se usa una técnica standard de repartir su contribución por mitades a los nodos vecinos en la interfase se alcanza a ver que éste tiene una variación según la dirección transversal al flujo en una zona de influencia limitada por 1 elemento a cada lado de la interfase. Esto provoca la aparición de oscilaciones en ambas direcciones, la longitudinal - del mismo tipo del ya mencionado en el caso unidimensional - y la transversal por las razones que acabamos de esgrimir.

Siguiendo con los mismos pasos utilizados en el caso uni-dimensional se pretendió estudiar la forma que adquieren para este caso las funciones de peso. Para ello recordamos la expresión que se presentó en la parte I del presente trabajo

$$\tilde{N}^k = N_{,j}^k \left(\frac{b_j}{|b|} \right) + N^k \quad (2.4)$$

donde ξ_j se refiere a la j -ésima coordenada del elemento máster.

Como es de conocimiento con ésta función de peso obtenemos soluciones exactas en los nodos para flujos paralelos a las direcciones de la malla independientemente de la longitud de cada lado del elemento.

La extensión directa de la solución propuesta en el caso uni-dimensional al bi-dimensional no es posible debido a que el residuo varía cuando uno atraviesa la interfase de refinamiento en dirección perpendicular a la misma. En primera instancia se utilizó una técnica que consistía en agregar la contribución al nodo irregular proveniente del elemento aguas arriba al nodo vecino aguas abajo y viceversa, la proveniente del elemento aguas abajo al vecino aguas arriba. Corrido el problema modelo se verificó una notable mejora en la solución, desapareciendo por completo las oscilaciones longitudinales pero sin embargo se mantuvieron las transversales. Para contemplar el caso más general cuando existía una desalineación entre la malla y la velocidad de flujo se utilizó en el procedimiento anterior

la proyección de la velocidad sobre la interfase. Esto se justifica porque si existiera un flujo normal a la interfase de refinamiento habría que usar la técnica standard de repartir por mitades la contribución sobre los vecinos. De ésta forma uno puede contemplar los casos límites, que en principio son los que la formulación resuelve óptimamente en el caso de mallas homogéneas.

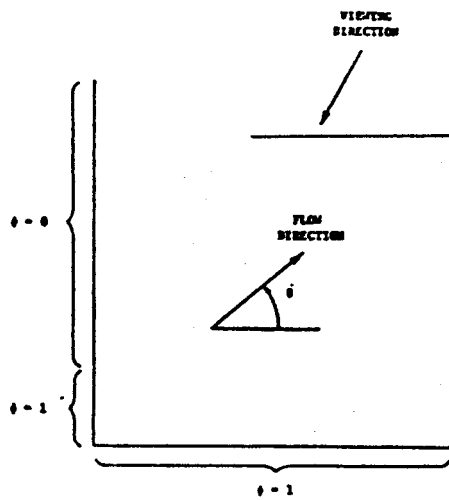
Pensar en resolver el tema de las oscilaciones transversales fue el motivo que nos impulsó a emprender algunas investigaciones. En el estado actual de las mismas aún no se ha arribado a ninguna conclusión, aunque existen algunos avances interesantes que próximamente serán publicados.

3.- Ejemplos numéricos y conclusiones.

Para testear ésta modificación se pensó en encontrar algún ejemplo que pudieran mostrar mejoras reales. Es de destacar que los problemas aparecían solo cuando en la malla había nodos irregulares y estos se hallaban en una zona donde la solución presentaba algún tipo de discontinuidad alineada con la dirección de la interfase. Problemas de éste tipo no son muy abundantes cuando el problema es de advección lineal. Se corrió como problema modelo un flujo cuasiunidimensional que presenta en una zona de la malla un cambio brusco de la solución. En la figura vemos las isocurvas de la solución, allí se pone de manifiesto que con la técnica standard - alternativa 1 - las oscilaciones viciaban parte de la malla llegando a cubrir hasta 3 elementos aguas arriba de la salida. Cuando se implementó la modificación explicada anteriormente las oscilaciones longitudinales desaparecieron ya que todo el salto de la solución lo vemos concentrado en el último elemento pero todavía resta por solucionar el problema de las oscilaciones transversales.

REFERENCIAS

- [1] Brooks A.N. and Hughes T.J.R., Streamline upwind Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations., *Computer methods in applied mechanics and engineering*. 32 (1982) 199-259.
- [2] Rice J.G., Schnipcke R.J., A monotone streamline upwind finite element method for convection-dominated flows , *Computer methods in applied mechanics and engineering*. 48 (1985) 313-327.
- [3] Ph. Devloo, J.T. Oden and T. Strouboulis, Implementation of an adaptive refinement technique for the SUPG algorithm, *Computer methods in applied mechanics and engineering* 61 (1987) 339-358
- [4] G. F. Carey and J. Tinsley-Oden, *Finite Elements - Computational Aspects*, Vol III, Prentice Hall, N. J. (1984)
- [5] C.E. Baumann, M. Storti and S. Idelsohn, A Petrov Galerkin technique for the solution of transonic and supersonic flows. *Second World Congress on Computational Mechanics , Stuttgart, 1990*
- [6] M. Fortin and P. Tanguy, A non-standard mesh refinement procedure through node labelling. *International Journal Numerical Methods in Engineering*. (1984).



ANG = 22.5

Fig. 3.5. Advection skew to the mesh: Problem statement.

ANG = 0.0

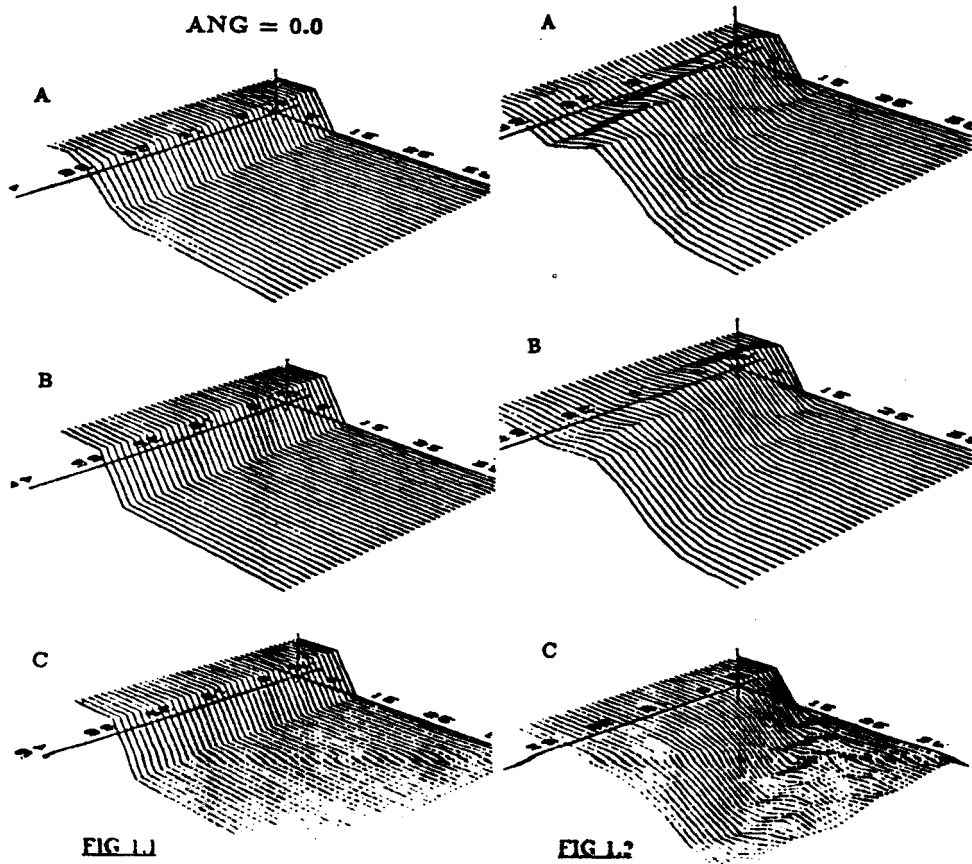


FIG 1.1

FIG 1.2

ANG = 45.0

ANG = 67.5

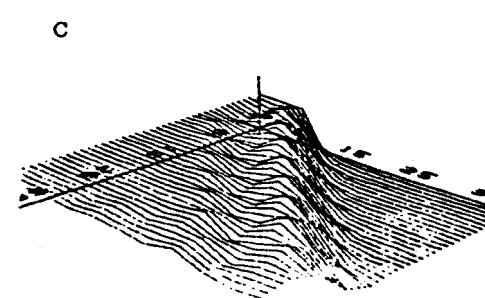
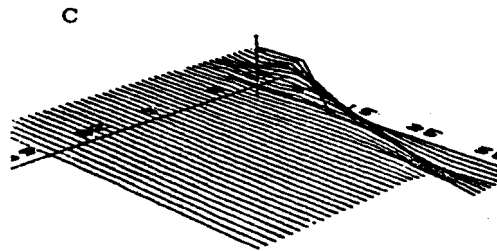
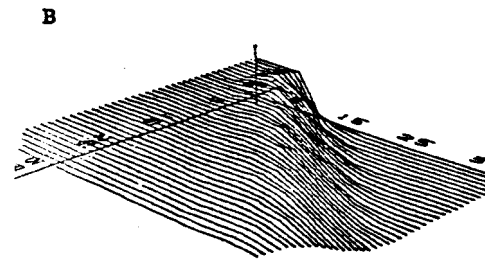
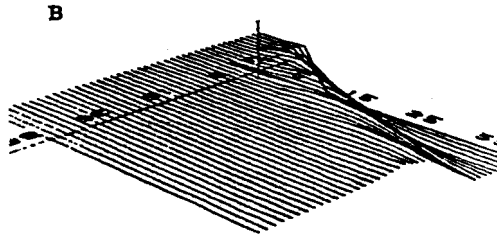
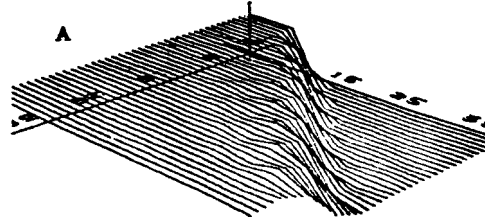
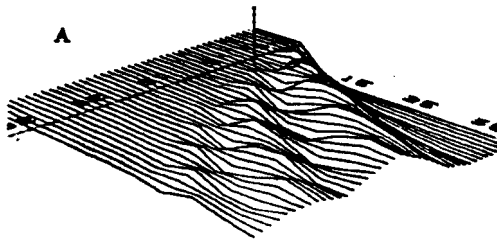
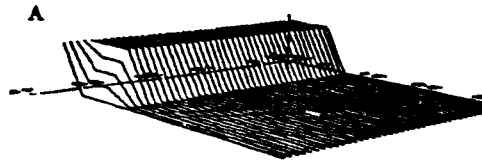


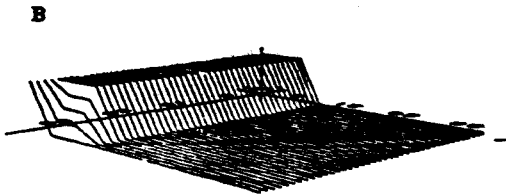
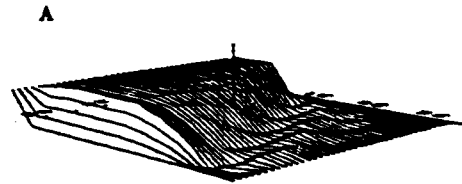
FIG. 1.3

FIG. 1.4

ANG = 0.0



ANG = 22.5



B

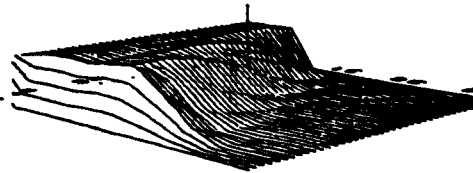
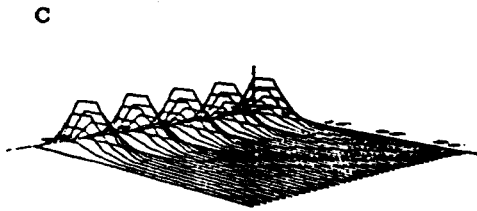


FIG 1.5

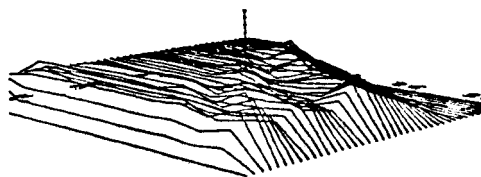
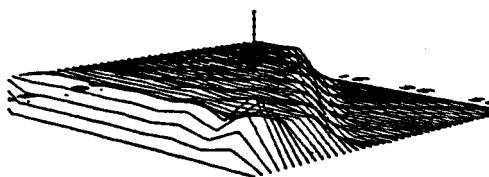
FIG 1.6

ANG = 45.0

ANG = 67.5

A

A



B

B

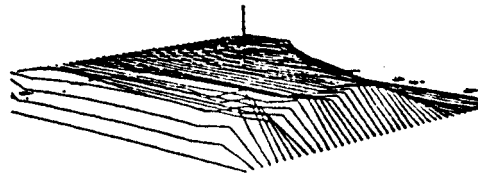
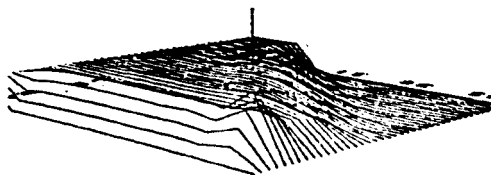


FIG. 1.7

FIG. 1.8

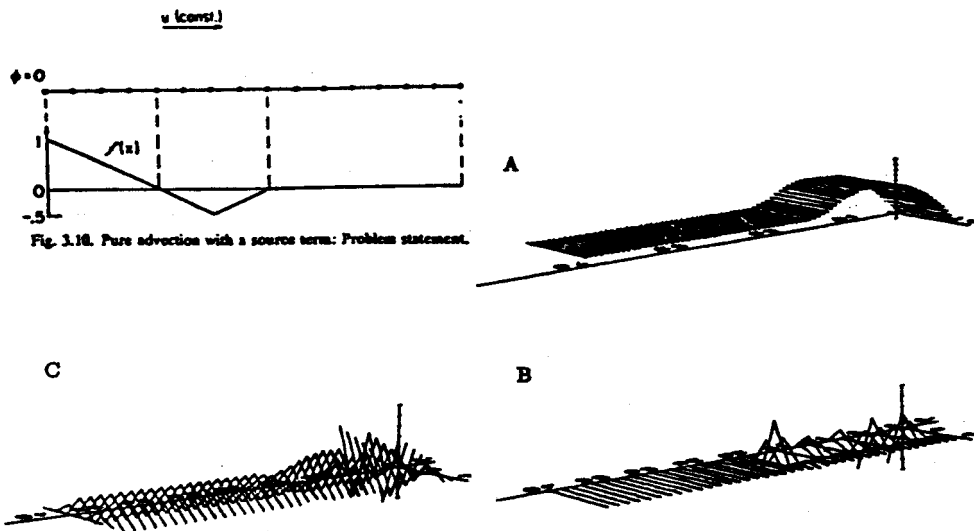


Fig. 1.9. Pure advection with a source term: Problem statement.

FIG 1.9

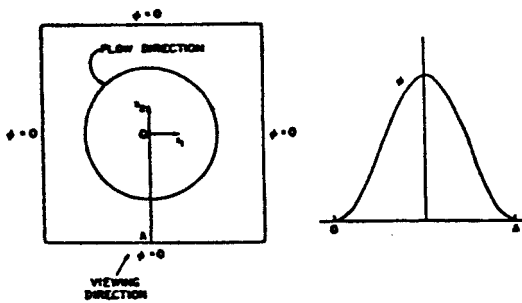


Fig. 1.10. Advection in a rotating flow field: Problem statement.

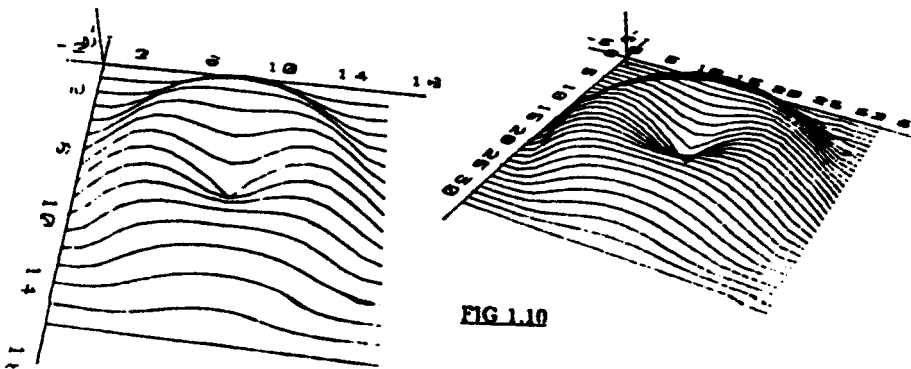


FIG 1.10

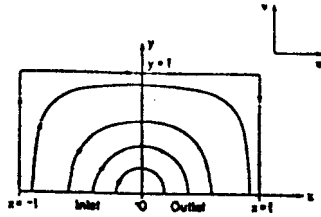


Fig. 9. Geometry and streamlines for Smith and Hutton case [7].

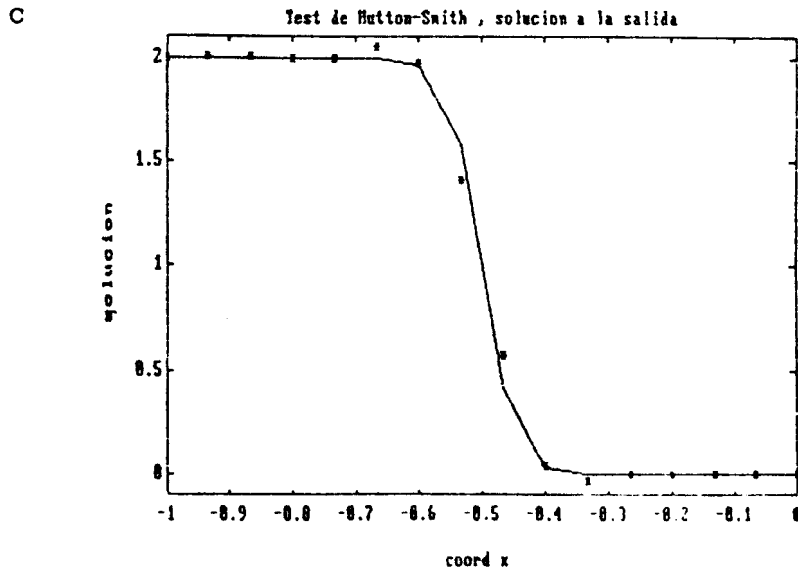
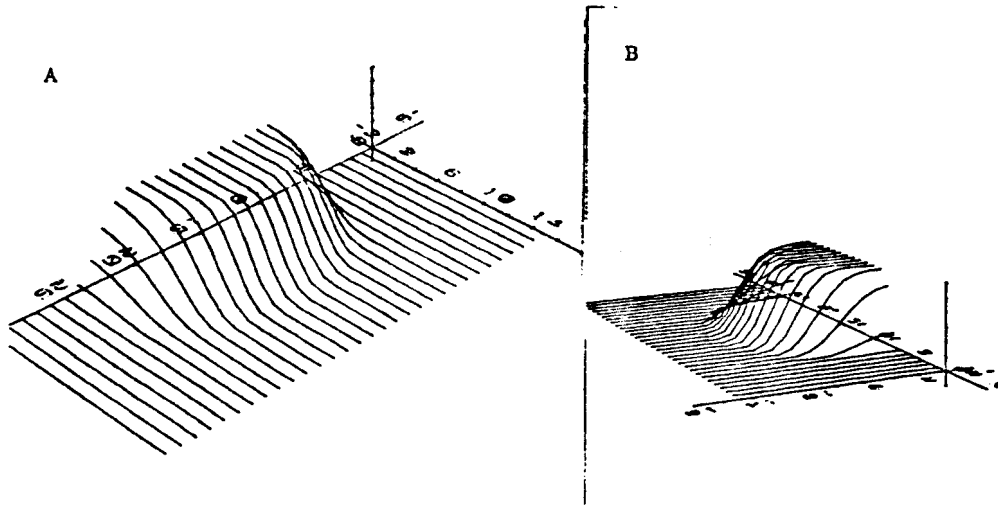


FIG. 1.11

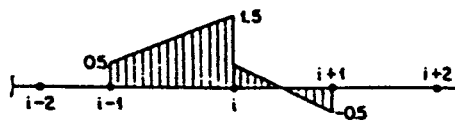


FIG 2.1

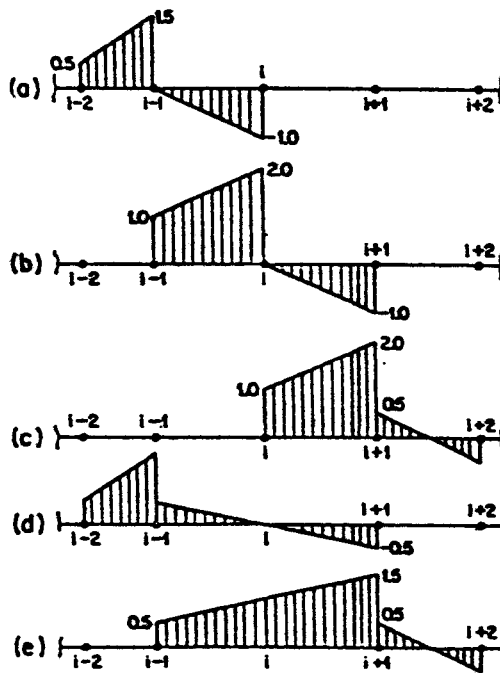
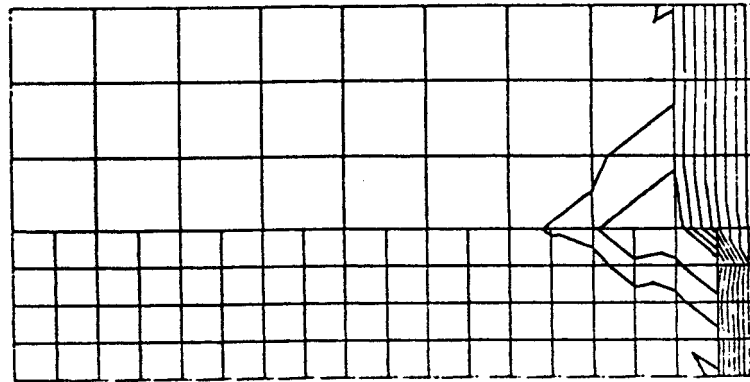


FIG 2.2

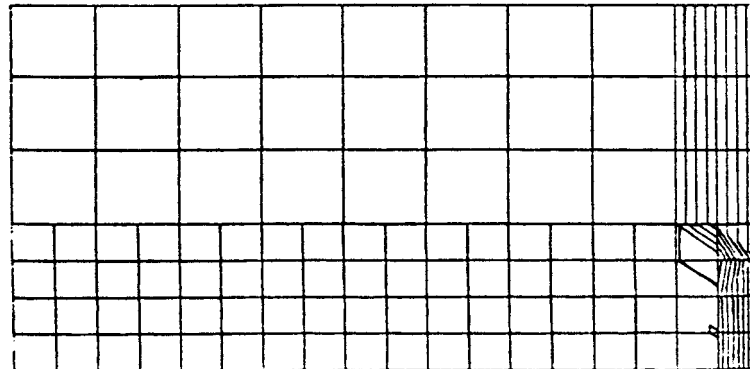
CASO UNIDIMENSIONAL

A



ALTERNATIVA 1

B



ALTERNATIVA 2

FIG 2.3

