

**SOBRE LA RESOLUCION AUTOMATICA DE MODELOS
NO-LINEALES DE ELEMENTOS FINITOS**

Eduardo N. Dvorkin

**Siderca S.A.I.C.
e Instituto de Materiales y Estructuras
Facultad de Ingeniería
Universidad de Buenos Aires**

RESUMEN

Un algoritmo para la solución incremental de ecuaciones no-lineales de elementos finitos en análisis estáticos es comentado.

El procedimiento fue diseñado para relevar respuestas pre y post-críticas de modelos estructurales generales.

ABSTRACT

An algorithm for the automatic incremental solution of nonlinear finite element equations is reviewed.

The procedure was designed to trace the pre and post critical response of general structural models

I. INTRODUCCION.

En este artículo comentaremos brevemente un algoritmo destinado a relevar la respuesta estática no-lineal, de modelos de elementos finitos generales, con parámetros materiales independientes del tiempo (se excluyen los casos de creep, viscoelasticidad, viscoplasticidad, etc.).

El algoritmo fue desarrollado en detalle en las Refs. /1/ y /2/ e implementado en el programa ADINA /3/.

II. ALGORITMOS INCREMENTALES ITERATIVOS.

Asumiendo que un adecuado modelo de elementos finitos ha sido planteado para idealizar el problema físico a estudiar, nos concentraremos en la resolución de las ecuaciones que gobiernan su comportamiento. Usando la notación de la Ref. /4/, dichas ecuaciones son:

$${}^{t+\Delta t} \underline{R} - {}^{t+\Delta t} \underline{F} = \underline{0} \quad (1)$$

donde:

${}^{t+\Delta t} \underline{R}$ es el vector de las fuerzas nodales externas y

${}^{t+\Delta t} \underline{F}$ es el vector de las fuerzas nodales equivalentes

(en el sentido de los trabajos virtuales) a las tensiones actuantes en el sólido. Ambos vectores son evaluados en el instante $t+\Delta t$. Dado que sólo consideramos problemas estáticos con relaciones constitutivas constantes, la variable tiempo, indica sólo nivel de cargas.

La resolución incremental usual de la Ec. (1) resulta en el siguiente esquema iterativo /4, Capítulo 8/, para la iteración número i :

$${}^T \underline{K}^{(i-1)} \Delta \underline{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \underline{R} - {}^{t+\Delta t} \underline{F}^{(i-1)} \quad (2)$$

donde:

${}^T \underline{K}^{(i-1)}$ es una matriz de coeficientes y

$\Delta \underline{U}^{(i)}$ es un incremento del vector de desplazamientos nodales

$${}^{t+\Delta t} \underline{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \underline{U}^{(i-1)} + \Delta \underline{U}^{(i)} \quad (3)$$

La matriz ${}^T \underline{K}^{(i-1)}$ es diferente en los varios procedimientos que pueden usarse /4,5/:

- . Técnica modificada de Newton-Raphson
- . Técnica completa de Newton - Raphson
- . Técnica de BFGS

Búsquedas lineales /4,5/, pueden ser combinadas con las diferentes técnicas.

Un detallado estudio de las ventajas y desventajas de los diferentes esquemas iterativos fue presentado en /5/.

Sin embargo en dichos estudios se partía de dos importantes hipótesis:

- . Se asumía que el analista prescribía los valores de carga para los que se buscaba la configuración de equilibrio.
- . Se asumía que se buscaba la solución hasta un punto crítico o de colapso y no la solución post-crítica.

Sin embargo, en ciertos casos se busca la solución post-crítica y ya no es posible establecer secuencialmente los niveles de carga, sin un conocimiento previo de la respuesta de la estructura. Tampoco en los problemas de carga límite resulta adecuado el control de cargas.

En /1 y 2 / se indica un caso de zafado hacia atrás (snap-back) que indica que el control del desplazamiento de un nodo, en reemplazo del control de cargas, tampoco soluciona todos los problemas.

III. ITERACION EN EL ESPACIO CARGAS-DESPLAZAMIENTOS.

Si se desea relevar, como en muchos casos, la característica carga-desplazamientos del sólido en los periodos pre y post críticos, asumiendo que la carga varía en forma proporcional, es decir:

$${}^{t+\Delta t} R = {}^{t+\Delta t} \lambda R \quad (4)$$

donde:

${}^{t+\Delta t} \lambda$ es un escalar y R un sector carga de referencia, la Ec. (2), puede reescribirse como:

$$\tau K^{(i-1)} \Delta U^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \lambda R - {}^{t+\Delta t} F^{(i-1)} \quad (5)$$

Riks y Wempner /7 y 8/ desarrollaron la idea original de iterar en el espacio cargas-desplazamientos, es decir, considerar a ${}^{t+\Delta t} \lambda$ como otra incógnita de la solución.

De esta forma:

$$\tau K^{(i-1)} \Delta U^{(i)} = ({}^{t+\Delta t} \lambda^{(i-1)} + \Delta \lambda^{(i)}) R - {}^{t+\Delta t} F^{(i-1)} \quad (6.a)$$

$$y \quad {}^{t+\Delta t} \lambda^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \lambda^{(i-1)} + \Delta \lambda^{(i)} \quad (6.b)$$

Una ecuación adicional debe ser empleada para fijar la "longitud del paso" en el espacio cargas-desplazamientos:

$$f(\Delta \lambda^{(i)}, \Delta U^{(i)}) = 0 \quad (7)$$

Diversas formas han sido propuestas para esta ecuación adicional:

- longitud constante de la tangente /7/.
- longitud esférica de arco constante /9 y 10/

En nuestra investigación para lograr un método de solución automático /1,2/ hemos encontrado dos formas convenientes:

- 1) La longitud esférica de arco constante cuando la solución está alejada de puntos críticos.
- 2) El trabajo constante de las fuerzas exteriores cerca de los puntos críticos.

Las ecuaciones correspondientes a ambas formas de la Ec.(7) son expuestas en detalle en las Refs./1 y 2/.

En ambos casos $\Delta\lambda^{(i)}$ resulta de la solución de una ecuación de 2° grado. En el método del trabajo constante de las fuerzas exteriores es más fácil garantizar que las raíces sean reales, pues si $\Delta\lambda^{(i)}$ es real, $\Delta\lambda^{(i)}$ $i=2,3...$ son necesariamente reales/2/.

Cuando las raíces son reales, resta decidirse por una de ellas. Para ello usaremos un criterio basado en el discutido en la Ref. /11/.

Para cada raíz ($j= 1,2$) se define:

$$\gamma_j = U^{(j)T} U_j^{(j)} \quad (8)$$

- a) si $\text{sgn } \gamma_1 \neq \text{sgn } \gamma_2$ seleccionamos la raíz para la que $\gamma_j > 0$
- b) si $\text{sgn } \gamma_1 = \text{sgn } \gamma_2$ seleccionamos la raíz, que da una solución más cercana a la que se obtendría usando el método de la longitud constante de la tangente.

El algoritmo implementado en ADINA /3/ fue diseñado para calcular la longitud del paso, iterar, disminuir la longitud del paso si no hubo convergencia y reiniciar la iteración. En caso de haber fracasado la búsqueda de convergencia un cierto número de veces, el algoritmo cambia automáticamente de método. De encontrarse con raíces imaginarias, usando el método de la longitud esférica de arco constante, el algoritmo pasa a usar el método del trabajo constante de las fuerzas exteriores.

El algoritmo vá variando la "longitud de paso" de forma de mantenerse en un número de iteraciones por paso óptimo, definido por el usuario. Obviamente ésto no es posible en el caso de no linealidades imprevistas, como por ejemplo la apertura de fisuras en modelos de hormigón.

El algoritmo comienza empleando la técnica modificada de Newton-Raphson y de tornarse "difícil" la convergencia pasa a usar la técnica completa de Newton-Raphson.

Para medir la convergencia de las iteraciones pueden usarse por separado o conjuntamente alguno de los siguientes criterios:

a) Criterio energético.

$$\frac{\Delta U^{(n)T} (\lambda^{(n-1)} R^{(n-1)} F^{(n-1)})}{\Delta U^{(n)T} (\Delta \lambda^{(n)} R)} \leftarrow ETOL \quad (9)$$

donde:

ETOL es la tolerancia a ser fijada por el analista, (en general ETOL = 10^{-6})

b) Fuerza desequilibrada máxima.

Para los grados de libertad traslacionales,

$$\| \lambda^{(n-1)} R_F^{(n-1)} F_F^{(n-1)} \|_2 \leftarrow RNORM \cdot RTOL \quad (10.a)$$

Para los grados de libertad rotacionales,

$$\| \lambda^{(n-1)} R_M^{(n-1)} F_M^{(n-1)} \|_2 \leftarrow AMNORM \cdot RTOL \quad (10.b)$$

donde:

RNORM Y AMNORM son valores de fuerza y torques típicos a ser fijados por el analista y RTOL es la tolerancia, que también debe fijar el analista, (en general RTOL = 10^{-2})

c) Convergencia en desplazamientos.

Para los grados de libertad traslacionales,

$$\| \Delta U_T^{(n)} \|_2 \leftarrow DNORM \cdot DTOL \quad (11.a)$$

Para los grados de libertad rotacionales,

$$\| \Delta U_R^{(n)} \|_2 \leftarrow DMNORM \cdot DTOL \quad (11.b)$$

donde:

DNORM Y DMNORM son valores de desplazamientos y rotaciones típicas a ser fijados por el analista y DTOL es la tolerancia que también debe fijar el analista.

Si bien en general resulta exitoso el empleo del criterio energético con ETOL = 10^{-6} , no existe aún un método para seleccionar, frente a cada problema, el o los criterios de convergencia más adecuados y las correspondientes tolerancias.

Para ésto, la experiencia del analista sigue siendo el factor determinante.

IV. EJEMPLOS NUMERICOS.

En la presente Sección, se presentan algunos ejemplos resueltos utilizando el algoritmo automático comentado arriba.

En la Fig.1 se presenta un caso de zafado (snap-through)

En la Fig.2 se presenta un caso de zafado hacia atrás (snap-back).

En la Fig.3 se presenta un caso de colapso de un cilindro elástico perfectamente plástico, sometido a presión interna.

En las Fig. 4 y 5 se presentan casos de colapso de estructuras simples /12/.

En la Fig.6 se presenta la respuesta no lineal de un arco biempotrado modelado con elementos isoparamétricos de viga de 2 nodos/4/. Es interesante destacar que la factorización de la matriz de rigidez tangente muestra que la misma entre O y A no tiene ningún autovalor negativo, entre A y B un autovalor negativo (correspondiente a un modo de pandeo antisimétrico), entre B y C dos autovalores negativos (modos de pandeo simétrico y antisimétrico) entre C y D sólo uno (modo simétrico) y de D en adelante ninguno. Obviamente la localización de A,...,D no es exacta ya que el algoritmo provee un número discreto de puntos.

En las Figs. 7 a 11 se presentan casos resueltos utilizando los elementos de lámina MITC4 y MITC8 /2,13,14,15/.

V. CONCLUSIONES.

Se ha comentado brevemente, en el presente artículo el algoritmo automático de resolución de modelos no lineales presentado en detalle en las Refs. /1 y 2/.

Dado que el algoritmo fue diseñado para ser usado en un programa general de elementos finitos, debe ser capaz de resolver problemas de diversa índole, por lo que el aspecto de las decisiones del algoritmo (método a usar, longitud de paso a usar, etc.) dá lugar a una lógica compleja.

El estudio de la selección automática de criterios de convergencia y tolerancias es sumamente importante, si se pretende acoplar estos métodos de resolución con sistemas de C.A.D., que serán operados por ingenieros no necesariamente especializados en cálculo numérico.

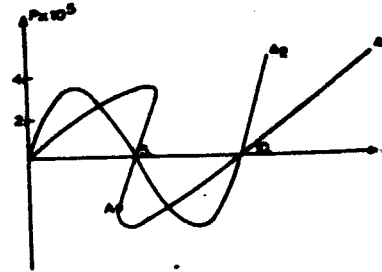
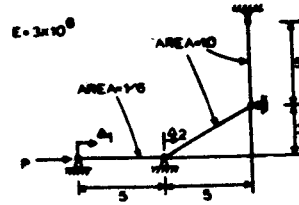
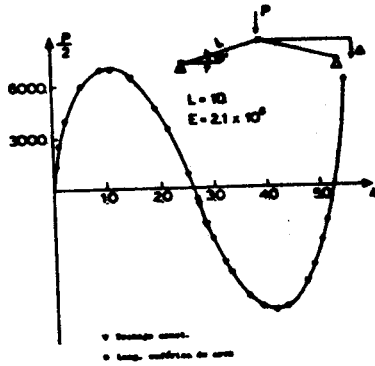


Figura 1. Problema de snap-through Figura 2. Problema de snap-back

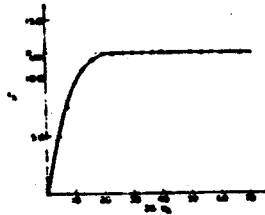
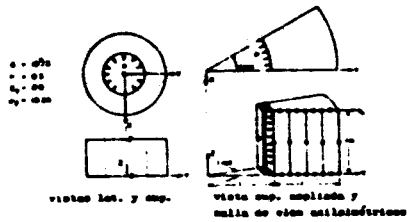


Figura 3. Colapso de cilindro elástico/perfectamente plástico

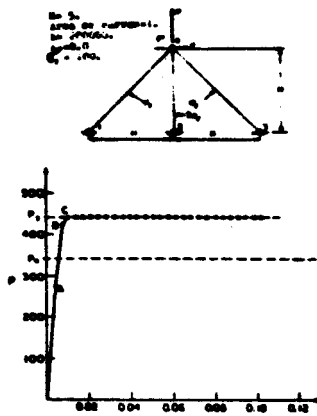


Figura 4. Reticulado de 3 barras/12/

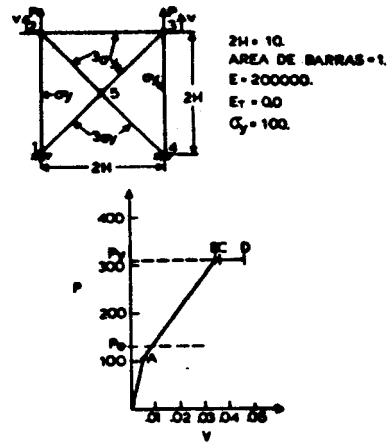


Figura 5. Reticulado de 7 barras/:

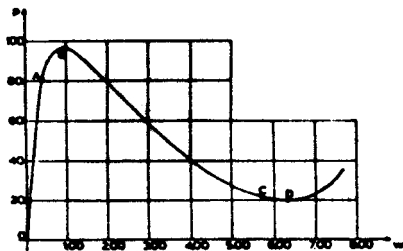
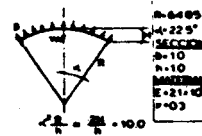


Figura 6. Arco biempotrado

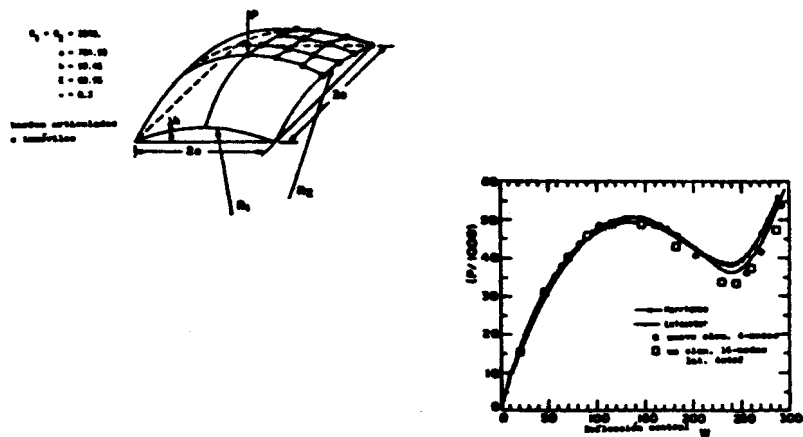


Figura 7. Lámina esférica elástica /19 y 21/



$R = 2340.$
 $L = 234.$
 espesor $h = 4.35$
 $\theta = 0.1$ rad.
 $E = 3.10275$
 $\gamma = 0.3$

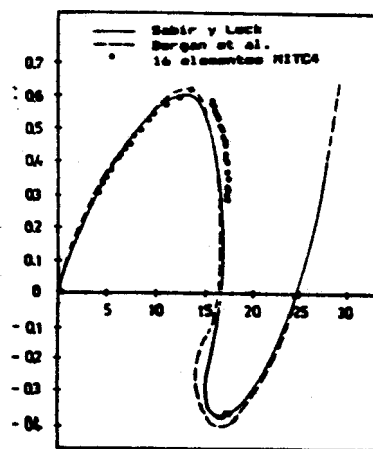


Figura 8. Lámina cilíndrica elástica /17 y 18/

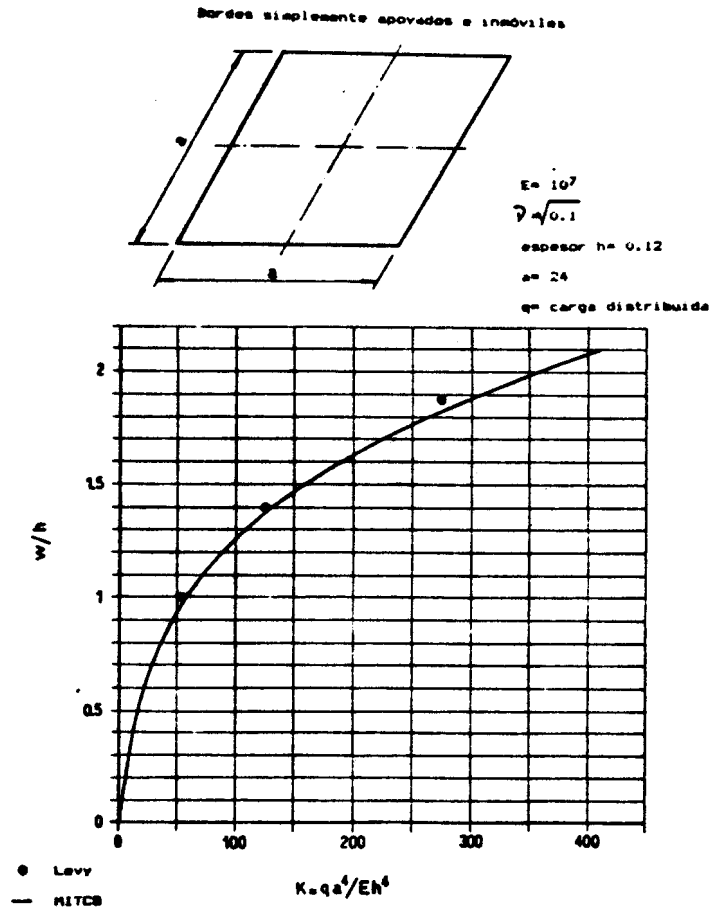


Figura 9. Placa con grandes desplazamientos/rotaciones /16/

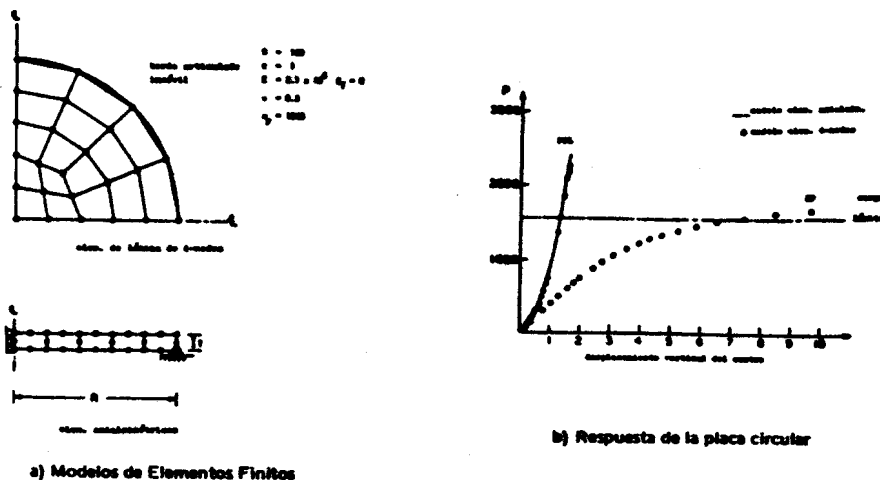
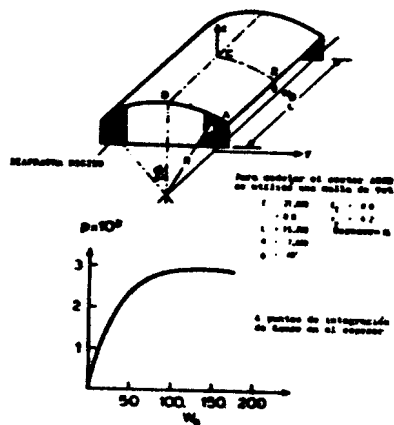


Figura 10. Placa circular elástica/perfectamente plástica con carga concentrada en el centro.
 FTL indica la solución correspondiente a la Formulación Total de Lagrange
 NF indica la solución correspondiente a la hipótesis de linealidad geométrica y no linealidad física



REFERENCIAS

1. K.J.Bathe y E.N.Dvorkin, "On the Automatic Solution of Nonlinear Finite Element Equations", J.Computers and Structures, Vol. 17, pp. 871-879, 1983.
2. E.N.Dvorkin, "On Nonlinear Finite Element Analysis of Shell Structures", Ph. D.Thesis, Dep. of Mech. Eng., M.I.T., 1984.
3. ADINA, Users Manual, Adina Engineering Report AE 84-1, 1984.
4. K.J.Bathe, Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.
5. K.J.Bathe y A.P.Cimento, "Some Practical Procedures for the Solution of Nonlinear Finite Element Equations", J. Computer Meths. Appl. Mech. Eng., Vol.22, pp. 231-277, 1980.
6. E.N.Dvorkin y K.J.Bathe, "El Método de Elementos Finitos en la Solución de Problemas No Lineales de Mecánica del Sólido", Ciencia y Técnica, Vol. 1, N° 4, pp.13 a 30, 1984.
7. E.Riks, "An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems", Int. J.Solids Structures, Vol. 15, pp. 529-551, 1979.
8. G.A.Wempner, "Discrete Approximation Related to Nonlinear Theories of Solids", Int. J.Solids Structures, Vol.7, pp. 1581-1599, 1971.
9. E.Ramm, "Strategies for Tracing Nonlinear Responses Near Limit Points", Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, (compilado por W.Wunderlich et al), pp. 63-89, Springer-Verlag, Berlín, 1981.
10. M.A.Crisfield, "A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure that Handles Snap-Through", J.Computers and Structures, Vol. 13, pp. 55-62, 1981.
11. M.A.Crisfield, "Variable Step-Lengths for Nonlinear Structural Analysis", TRR Lab., Report 1049, 1982.
12. P.G.Hodge, Jr., K.J.Bathe y E.N.Dvorkin, "Causes and Consequences of Nonuniqueness in an Elastic/Perfectly-Plastic Truss", J.Applied Mechanics, Vol.53, pp.235-241, 1986.
13. E.N.Dvorkin y K.J.Bathe, "A Continuum Mechanics Based Four-Node Shell Element for General Nonlinear Analysis", Eng. Comput., Vol.1, pp. 77-88, 1984.
14. K.J.Bathe y E.N.Dvorkin, "A Four-Node Plate Bending Element Based on Mindlin/Reissner Plate Theory and a Mixed Interpolation", Int. J.Num.Meth.in Engg., Vol.21, pp.367-383, 1985.

15. K.J.Bathe y E.N.Dvorkin, "A Formulation of General Shell Elements - the Use of Mixed Interpolation of Tensorial Components", Int. J.Num.Meth. in Engg., Vol.22, pp.697-722, 1986.
16. S.Levy, "Bending of Rectangular Plates with Large Deflections", Technical Notes, N.A.C.A., 1942.
17. A.B.Sabir y A.C.Lock, "The Application of Finite Elements to the Large Deflection Geometrically Non-Linear Behaviour of Cylindrical Shells", Variational Methods in Engineering, (compilado por C.A.Brebbia y H.Tottenham), Southampton University Press, 1973.
18. P.G. Bergan, G.Horrigmoe, B.Kr keland y T.S reide, "Solution Techniques for Non-Linear Finite Element Problems", Int. J. Num. Meth. in Engg., Vol. 12, pp. 1677-1696, 1978.
19. G.Horrigmoe, "Finite Element Instability Analysis of Free-Form Shells", Report 77-2, Div. of Structural Mechanics, The Norwegian Institute of Technology, University of Trondheim, Noruega, 1977.
20. B.Kr keland, "Nonlinear Analysis of Shells Using Degenerate Isoparametric Elements", Finite Elements in Nonlinear Mechanics, (compilado por P.G.Bergan et al), Tapir Publishers, Norwegian Institute of Technology, University of Trondheim, Noruega, 1977.
21. R.H.Leicester, "Finite Deformation of Shallow Shells", Proc. A.S.C.E., Vol. 94 (EM6), pp. 1409-1423, 1968.