

ANÁLISIS DISCRETO DE COLUMNAS CELOSÍA

Mario J. Maurizi^{1,2}, Eduardo A. Bambill^{1,3}

⁽¹⁾Departamento de Ingeniería - Universidad Nacional del Sur

⁽²⁾Instituto de Mecánica Aplicada

⁽³⁾Departamento de Ingeniería Civil-Facultad Regional Bahía Blanca-Universidad Tecnológica Nacional

8000 Bahía Blanca, Argentina, e-mail: ebambill@criba.edu.ar

Héctor D. Martín

Unidad Académica Venado Tuerto - Universidad Tecnológica Nacional

2600 Venado Tuerto, Argentina, e-mail: hdm@waycom.ar

Palabras clave: estabilidad elástica, miembros arriostrados, compresión, pandeo, celosía, campo discreto.

Resumen. *Los primeros estudios sobre la estabilidad elástica de miembros arriostrados a compresión data de 1889, cuando Engesser presentó sus fórmulas aproximadas en relación al pandeo de una columna del tipo mencionado (Zeitschrift des Architekten und Ingenieur Vereins zu Hannover, Vol. 35, (1889) Zentalblatt der Bauverwaltung, Vol. 29, p 136, (1909)). Desde entonces, se dispone de numerosas expresiones analíticas y teorías racionalmente fundamentales que describen el comportamiento de varios modelos de columnas celosía, y a su vez, internamente determinadas (ver, por ejemplo, F. Bleich, Buckling Strength of Metal Structures, McGraw-Hill, (1952); S. Timoshenko and J. M. Gere, Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, (1961); W. Gutkowski, ZAMM, Vol. 43, p. 284, (1963)).*

Desde las primitivas aplicaciones de las columnas celosía, ingeniosas investigaciones llevadas a cabo han permitido comprobar que resultan economías adicionales y una función perfeccionada cuando se usa una columna como las citadas, internamente hiperestática y con miembros continuos a compresión (Z. P. Bazant and L. Cedolin, Stability of Structures, Oxford University Press, (1991), C.P. Filipich y E.A. Bambill, ENIEF 2003, Vol. XXII, 877-891).

Sin embargo, muchas de las soluciones disponibles contienen supuestos restrictivos que no son pertinentes a un tratamiento teórico del problema. De allí que, el procedimiento aquí propuesto se basa en admitir que los modelos matemáticos correspondientes a la estructura resuelta, como las funciones involucradas, obedecen a técnicas de la teoría del campo discreto.

Las capacidades teóricas de carga se determinan luego para variados modos de pandeo, resolviendo las ecuaciones básicas y cumplimentando diversas condiciones de vínculo para los extremos de las columnas. Asimismo, las ecuaciones de diferencias gobernantes se han empleado para generar las expresiones algebraicas de las tensiones y deformaciones en columnas arriostradas excéntricamente cargadas

1 INTRODUCCION

Usando teorías y métodos empíricos, los diseñadores y proyectistas han incorporado efectivamente este tipo de columnas en naves industriales, puentes, planetarios, torres y otros sistemas estructurales.

Las restricciones comunes, que perjudican la aplicabilidad general de los resultados obtenidos, incluyen:

1. El sistema hiperestático considerado se lo reemplaza comúnmente por un entramado estáticamente determinado que tiene barras articuladas [3,4]. En este proceso, los sistemas físicos más bien que sus modelos matemáticos están relajados, por lo tanto, el orden de los errores involucrados es indeterminado.
2. La técnica matemática empleada corresponde a la mecánica del continuo. A más de causar una intrincada complejidad, ha originado dos propensiones indebidas:
 - a. Los supuestos restrictivos se tornan esenciales, lo cual implica la continuidad y hacer caso omiso de la naturaleza discreta de los modelos físicos; por ejemplo, despreciando las deformaciones locales y asumiendo que el eje deflectado de la columna enlazada es el mismo que para una columna de sección transversal sólida [3], así como la dependencia en la relación continua para el corte en la columna $dM/dx = Q$.
 - b. El reemplazo por un modelo matemático continuo no permite el desarrollo por funciones discretas tales como las tensiones en los cordones (o enlaces) o la variación de la tensión axial en los miembros continuos.
 - c. La posición del eje neutro, la cual depende de los modelos de enlace, se asume que está centralmente localizado y, en consecuencia, no es aplicable a columnas celosía asimétricas.

Muchos intentos con el objeto de desarrollar expresiones teóricas exactas para columnas celosía han fallado [9], al tratar de adicionar un conocimiento superior que va más allá de las primeras fórmulas aproximadas.

Ha sido demostrado por numerosos autores que la efectividad de las técnicas matemáticas de la teoría del campo discreto es evidente cuando se lo aplica a la determinación de tensiones en estructuras celosía altamente hiperestáticas, tales como reticulados, arcos, mallas y cáscaras reticuladas.

Se conocen las citas de Dean [5] y Gutkowski [6], acerca de la potencia de este proceso para resolver la carga crítica y los modos de pandeo de dichas estructuras. El mismo Gutkowski dio soluciones para un entramado, restringidas a seguir un procedimiento con el cual reconoce que es imposible satisfacer todos los requerimientos extremos. Es sabido que la carga de pandeo, obtenida con esta solución, resulta ser más pequeña que los valores reales.

Más allá, lo que interesa primero es lo concerniente con la investigación del comportamiento de las columnas celosía. Los detalles aquí señalados deberán ser considerados como una ilustración de la utilidad de la técnica del campo discreto, cuando se

la aplica para resolver problemas de estabilidad elástica.

Notemos que este proceso da como resultado soluciones exactas, las cuales son originalmente compactas. La discrepancia con las anteriores soluciones exactas, es atribuible a la tendencia ya mencionada de los investigadores previos consistente en aplicar técnicas de la mecánica del continuo. Tales aprovechamientos dan como resultado ecuaciones cuyas soluciones son sumamente complicadas, debido al gran número de discontinuidades existentes en los puntos de contacto entre el miembro continuo y los enlaces.

2 FORMULACION DISCRETA DEL PROBLEMA

El primer paso para desarrollar el modelo matemático finito de la columna celosía (ver Figura 1), consiste en derivar las ecuaciones de diferencias gobernantes del sistema en términos de las funciones redundantes elegidas. Las propiedades de los elementos continuos entre nudos serán expresados en función de las deformaciones nodales, y los resultados, empleados para expresar el equilibrio en dichos nudos.

2.1 Ecuaciones de equilibrio

Dos conjuntos de ecuaciones de equilibrio estático en el nudo x , y del miembro continuo en el panel x (ubicado entre los nudos x y $x+1$), son solamente necesarios, debido a la simetría de la estructura.

La ecuación de equilibrio del panel x en función de los esfuerzos de corte y momento flectores, a izquierda y derecha, es la siguiente (ver Figura 2):

$$Q_x = Q'_x = -\frac{I}{L} [M_x + M'_x + (P - N_x) \ell \Delta y_x] \quad (1)$$

en la cual, N_x es el cambio incremental del esfuerzo axial en el panel x debido a la deformación de la columna, $\ell \Delta y_x$ es el desplazamiento lateral del nudo x , siendo ℓ la longitud de cada panel, y Δ es el operador traslación, simbolizando con $\Delta \equiv \varepsilon - 1$ al operador diferencia hacia adelante y de primer orden, siendo ε el operador diferencia de Bool.

La segunda de las condiciones de equilibrio (en el nudo x), en función del ángulo γ entre el cordón y los enlaces, y los esfuerzos axiales G_x y G'_x en los miembros arriostrados, están dadas por:

$$M_x + \varepsilon^{-1} M'_x = 0 \quad (2a)$$

$$(G_x - \varepsilon^{-1} G'_x) \cos \gamma + \nabla N_x = 0 \quad (2b)$$

$$(G_x - \varepsilon^{-1} G'_x) \sin \gamma + Q_x - \varepsilon^{-1} Q'_x = 0 \quad (2c)$$

en las cuales ∇ simboliza el operador diferencia hacia atrás y de primer orden. A su vez, la variable discreta x puede asumir valores de 0 a n (número de paneles del sistema).

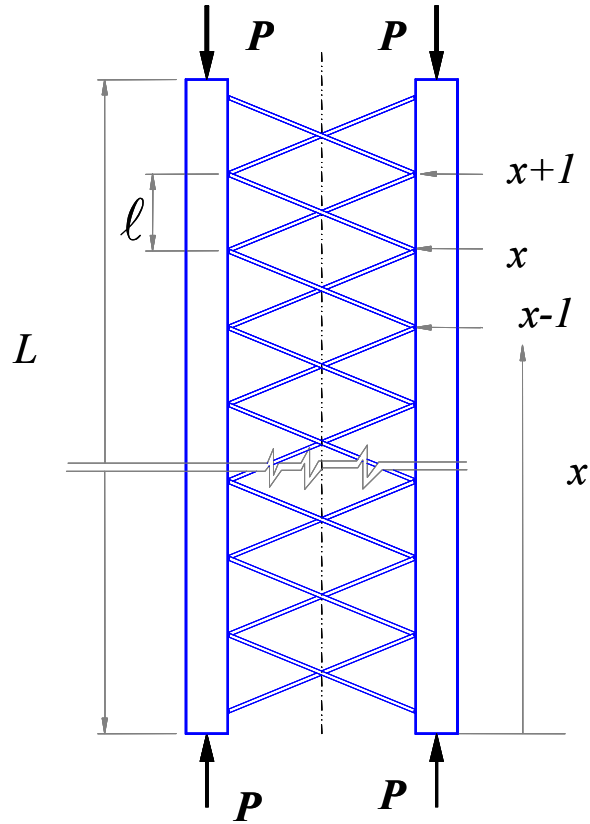


Figura 1 – Esquema columna celosía

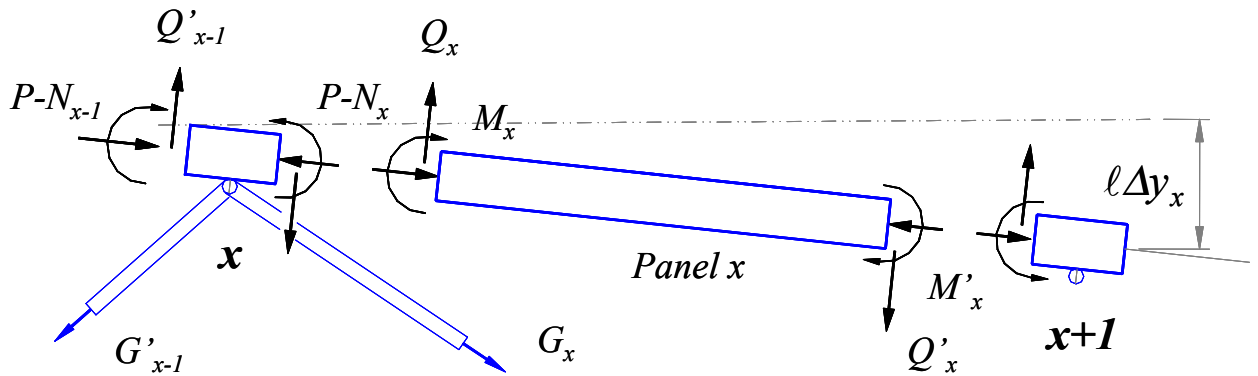


Figura 2

2.2 Relaciones esfuerzo-deformación

La expresión general que relaciona la rigidez flexural del elemento continuo B con la deformación angular θ_x en el nudo x , y con el desplazamiento lateral $l\Delta y_x$, está dada por:

$$M_x = B[C_x\theta_x + C'_x\theta_{x+1} - (C_x + C'_x)\Delta y_x] \quad (3a)$$

$$M'_x = B[C'_x \theta_x + C_x \theta_{x+1} - (C_x + C'_x) \Delta y_x] \quad (3b)$$

donde los coeficientes generalizados de giro y deflexión, C_x y C'_x , son funciones de la tensión axial del elemento continuo en el panel x . Estos son [8]:

$$C_x = \frac{1 - \alpha_x \cot g(\alpha_x)}{\frac{2}{\alpha_x} \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_x}{2}\right) - 1} = 4 \left(1 - \frac{\alpha_x^2}{30} - \frac{11\alpha_x^4}{25200} - \frac{7\alpha_x^6}{756000} - \dots \right) \quad (4a)$$

$$C'_x = \frac{\alpha_x \operatorname{cosec}(\alpha_x) - 1}{\frac{2}{\alpha_x} \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_x}{2}\right) - 1} = 2 \left(1 + \frac{\alpha_x^2}{60} + \frac{13\alpha_x^4}{25200} + \frac{11\alpha_x^6}{756000} + \dots \right) \quad (4b)$$

en los cuales

$$\alpha_x^2 = (P - N_x) \frac{\ell}{B} \quad (4c)$$

En un análisis de pequeñas deformaciones, N_x se puede considerar pequeño cuando se lo compara con P , por lo cual α_x se reduce a una constante. ($\alpha_x = \sqrt{P\ell/B}$). Además, el examen de las expansiones en serie de los coeficientes C_x y C'_x revela que cuando $\alpha_x^2/30$ es pequeño comparado con la unidad (lo cual implica que el pandeo local no debería ser inminente), dichos coeficientes se reducen a las constantes 4 y 2, respectivamente. En ese caso, las ecuaciones (3) pueden expresarse matricialmente como sigue:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M'_x \end{Bmatrix} = 2B \begin{bmatrix} (\varepsilon + 2) & -3\Delta \\ (2\varepsilon + 1) & -3\Delta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x \\ y_x \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Dada la simetría, mientras ocurre el pandeo en modo crítico, los desplazamientos laterales en los nudos x y x' serán idénticos, puesto que el desplazamiento vertical del nudo x debido al esfuerzo axial N_x (que simbolizamos ℓu_x) será igual en magnitud pero en dirección opuesta al desplazamiento similar en el nudo x' . Luego, los esfuerzos axiales en las riostras están dados por:

$$G_x = -G'_x = E' A' \cos \gamma [-\cos \gamma (\varepsilon + 1) u_x + \operatorname{sen} \gamma \Delta y_x] \quad (6)$$

en la cual E' y A' simbolizan el módulo de elasticidad y el área de la sección transversal de dichos miembros, respectivamente.

Por último, N_x y las deformaciones en el nudo están relacionadas por:

$$EA \Delta u_x = N_x \quad (7)$$

en la cual E y A indican, respectivamente, al módulo de elasticidad y el área de la sección del miembro continuo.

3 ECUACIONES GOBERNANTES Y LA SOLUCION MEDIANTE SERIES FINITAS

El conjunto de ecuaciones de diferencias que gobiernan el problema serán derivadas con el fin de expresar el equilibrio en el nudo x . En esta tarea, la elección de incógnitas adecuadas depende de las condiciones de borde involucradas. Las deformaciones nodales u_x e y_x , y el momento flector M_x , son elecciones apropiadas para extremos articulados. El resultado de eliminar θ_x de la ecuación (5) y posterior introducción en las ecuaciones (2), suministra:

$$(\Delta\nabla + \delta)M_x + \delta B \Delta\nabla y_x = 0 \quad (8)$$

en la cual $\Delta\nabla$ simboliza al operador diferencia central, simétrico y de segundo orden ($\Delta\nabla \equiv \varepsilon - 2 + \varepsilon^{-1}$).

La (8) es una ecuación de tres momentos generalizada, dado que relaciona las propiedades de tres puntos de un miembro continuo que tiene desplazamientos relativos especificados. La inclusión de extremos empotrados no perjudica la generalidad de la relación. Introduciendo las ecuaciones (1), (6) y (7) en las ecuaciones (2b) y (2c) se obtienen dos ecuaciones de diferencias adicionales. Entonces, el conjunto de ecuaciones de diferencias del sistema para un análisis de pequeñas deformaciones, resulta ser:

$$\begin{bmatrix} (\Delta\nabla + \delta) & \delta B \Delta\nabla & 0 \\ \Delta\nabla & \lambda \Delta\nabla & -k_1 \Lambda \\ 0 & k_3 \Lambda & (\Delta\nabla - 2k_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ y_x \\ u_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

donde Λ es el operador de diferencia medio, antisimétrico y de segundo orden. ($\Lambda = \varepsilon - \varepsilon^{-1}$), y

$$\lambda = \ell(E' A' \operatorname{sen}^2 \gamma \cos \gamma - P) \quad (10a)$$

$$k_1 = \ell E' A' \operatorname{sen} \gamma \cos^2 \gamma \quad (10b)$$

$$k_2 = \cos^3 \gamma \left(\frac{EA}{E' A'} - \cos^3 \gamma \right) \quad (10c)$$

$$k_3 = \frac{I}{2} k_2 \operatorname{tg} \gamma \quad (10d)$$

La ecuación (9) contiene tres ecuaciones de diferencias de segundo orden. De dicha ecuación puede eliminarse la función u_x , y así obtener:

$$\Delta\nabla \{ (\Delta\nabla - 2k_2) M_x + [(\lambda + k_1 k_3) \Delta\nabla + (4k_1 k_3 + 2k_2 \lambda)] y_x \} = 0 \quad (11)$$

Debido a la ausencia de diferencias particulares, pueden emplearse series finitas de Fourier para resolver las ecuaciones (9) y (11). Sin embargo, es necesario determinar si una solución así obtenida satisface las condiciones de borde físicamente identificables. Como ejemplo, para una columna doblemente articulada, las condiciones físicas a ser satisfechas en cada extremo,

$x=0$ y $x=n$, son:

$$M_0 = M_n = Y_0 = Y_n = 0 \quad (12)$$

La siguiente solución con series finitas (que satisface las condiciones de borde) puede emplearse para resolver las ecuaciones (9a) y (11),

$$Y_x = \sum_{m=0}^n a_m \text{sen}(\beta_m x) \quad (13a)$$

$$M_x = \sum_{m=0}^n b_m \text{sen}(\beta_m x) \quad (13b)$$

en las cuales es $\beta_m = \frac{m\pi}{n}$ (14)

Si se introducen las ecuaciones (13) en las ecuaciones (9), se prueba que los coeficientes a_m y b_m están así relacionados:

$$\frac{b_m}{a_m} = \frac{6 B (1 - \cos \beta_m)}{2 + \cos \beta_m} \quad (15)$$

La expresión general para la carga crítica, y que corresponde a varios modos de falla, se obtiene introduciendo las ecuaciones (13) y (15) en la ecuación (11) y llevando a cabo manipulaciones algebraicas sencillas resulta:

$$\frac{P_c^{(\ell)}}{B} = \frac{6(1 - \cos \beta_m)}{2 + \cos \beta_m} + \frac{(1 - \cos \beta_m) \left(\frac{\ell}{r}\right)^2 \text{tg}^2 \gamma}{(1 + \cos \beta_m) + (1 - \cos \beta_m) K \text{sec}^3 \gamma} \quad (16)$$

en la cual $r = \sqrt{I/A}$ es el radio de giro del miembro continuo y $K = EA/E' A'$.

Cuando n (el número de paneles del sistema) es grande, de forma tal que se cumple $(\pi/2n)^2 \ll 1$ y considerando la expansión en serie de Taylor de $\cos \beta_m$, la expresión de la carga crítica P_c de cada cordón, para el pandeo en el primer modo, se simplifica por la siguiente:

$$P_c = P_e + \frac{EA \text{tg}^2 \gamma}{\left(\frac{2n}{\pi}\right)^2 + K \text{sec}^3 \gamma} \quad (17)$$

siendo $P_e = \pi^2 EA / (L/r)^2$ la carga crítica de Euler para cada cordón, y $L = n\ell$ es la longitud total de la columna.

Si la rigidez extensional de los enlaces se reduce a cero, o si el ángulo γ se aproxima a 90° , la capacidad de la columna se reducirá a $P_c = 2P_e$.

Las tensiones admisibles basadas en la ecuación (17), para tres ángulos elegidos y distintas

relaciones de rigidez, se indican en la Tabla 1, y pueden servir como una guía para descubrir los cambios apropiados en la relación de rigidez y así ejecutar un diseño óptimo.

Tabla 1
Valores de $P_c/10A$ en MPa obtenidos aplicando la ecuación (17)

γ	n	35°				30°				45°			
		30°	45°	60°	90°	30°	45°	60°	90°	30°	45°	60°	90°
K	L/r												
20	80	110.7	84.64	74.86	67.63	156.8	107.4	88.16	73.72	235.3	149.9	114.0	85.85
40	200	54.76	31.85	22.70	15.73	93.70	52.77	35.36	21.67	151.5	89.01	58.79	33.39
	250	51.20	28.30	19.14	12.17	90.14	49.22	31.81	18.12	147.9	85.46	55.24	29.71
	300	49.27	26.37	17.21	10.24	88.21	47.29	29.87	16.18	146.0	85.53	55.31	27.78
	350	48.11	25.20	16.04	9.074	87.04	45.85	28.71	15.02	144.9	82.36	52.14	26.61
	400	47.35	24.45	15.29	8.322	86.29	45.37	27.95	14.27	144.1	81.61	51.38	25.86
	450	46.83	23.93	14.77	7.798	85.77	44.85	27.43	13.75	143.6	81.09	50.86	25.34
50	200	52.97	31.41	22.55	15.69	89.01	51.51	34.91	21.57	139.6	85.13	57.28	32.92
	250	49.41	27.86	18.99	12.14	85.45	47.95	31.35	18.02	136.0	81.59	53.73	29.36
	300	47.48	25.93	17.06	10.17	83.52	46.02	29.42	16.09	134.1	79.66	51.80	27.43
	350	46.31	24.77	15.89	9.046	82.35	44.86	28.26	14.92	132.9	78.49	50.63	26.26
	400	45.56	23.32	15.14	8.288	81.60	44.11	27.50	14.17	132.2	77.73	49.88	25.51
	450	45.04	23.21	14.62	7.771	81.08	43.59	26.98	13.65	131.7	77.22	49.35	24.99
60	200	51.31	30.99	22.39	15.67	84.82	50.32	34.48	21.48	129.5	81.64	55.86	32.57
	250	47.75	27.44	18.84	12.11	81.26	46.77	30.92	17.92	126.0	78.08	52.31	29.02
	300	45.82	25.50	16.91	10.08	79.33	44.84	28.99	15.99	124.0	76.15	50.38	27.09
	350	44.66	24.35	15.75	9.012	78.16	43.67	27.82	14.82	122.9	74.98	49.22	25.93
	400	43.90	23.29	14.99	8.235	77.40	42.91	27.06	14.07	122.1	74.22	48.46	24.48
	450	43.38	22.99	14.47	7.736	76.89	42.40	26.55	13.56	121.6	73.71	47.94	23.27

Una rápida comparación con soluciones disponibles, restringidas por hipótesis de continuidad, pueden completar los resultados obtenidos.

La solución clásica para una columna doblemente enlazada (Figura 1), está dada por [7]:

$$P' = \frac{\pi^2 E_t I_0}{(kL)^2} \tag{18}$$

en la cual

$$I_0 = \frac{Ah^2}{2} \tag{19}$$

y

$$k = \sqrt{1 + \frac{\pi^2 E_t I_0}{L^2} \frac{d^3}{2E\ell h^2 A'}} \tag{20}$$

siendo d la longitud entre ejes de los miembros continuos (nacho de la columna) y h la distancia entre centros de los enlaces o riostras.

A su vez, las ecuaciones (20) y (18) pueden ser transformadas en

$$k = \sqrt{1 + \frac{E_t A}{EA'} \frac{\pi^2}{4n^2} \sec^3 \gamma} \quad (21a)$$

$$P' = \frac{2E_t A \operatorname{tg}^2 \gamma}{\left(\frac{2n}{\pi}\right)^2 + \frac{E_t A}{EA'} \sec^3 \gamma} \quad (21b)$$

Si se comparan las ecuaciones (17) y (21b), es evidente que el error que implica utilizar la solución clásica es proporcional a la relación P_e/P_c . Como ejemplo, para $K = 20$, $L/r = 80$, $\gamma = 45^\circ$ y $n = 45$, el valor de P_c/A resulta ser un 57% mayor que P'/A .

Al considerar la influencia de despreciar la rigidez del enlace, Bleich [4] modificó la ecuación (18) por

$$P'' = \frac{\pi^2 E_t I}{(k\ell)^2} \quad (22)$$

en la cual $I = I_1 + 2I_0$ (23)

y siendo $I_1 = A r^2$ (24)

Esta modificación prueba ser una mejora definitiva. La magnitud del error involucrado por usar la ecuación (22) se reduce como se reduce el parámetro k , aproximándose en magnitud a la unidad. La ecuación (22) debería ser exacta para $k=1$.

Como ejemplo, con $K = 20$, $L/r = 80$, $\gamma = 45^\circ$ y $n = 45$, el valor de P_c/A resulta ser solamente un 4% mayor que P''/A .

4 PANDEO POR CORTE

Tener en cuenta la resistencia al pandeo por corte de las estructuras que se analizan (aplicable siempre que sea inherente al efecto de la flexión primaria), sigue un proceso similar pero resulta una expresión mucho más sencilla. Las ecuaciones de diferencias gobernantes (correspondientes al modo de falla asumido) que describen el equilibrio del nudo x , resultan ser:

$$\begin{bmatrix} (\Delta\nabla + 6) & 6B\Delta\nabla \\ \Delta\nabla & \lambda\Delta\nabla \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ Y_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (25)$$

Las condiciones de borde correspondientes a extremos articulados son naturalmente satisfechas si las expresiones (13) de las series finitas se emplean para resolver este conjunto de ecuaciones. Este proceder permite obtener:

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ \cos \beta_m + 2 & 6B(\cos \beta_m - 1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_m \\ a_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (26)$$

La expansión del determinante de los coeficientes posibilita establecer la carga crítica, que está dada por

$$P_{cr} = E' A' \operatorname{sen}^2 \gamma \cos \gamma + \frac{6EA(1 - \cos \beta_m)}{\left(\frac{\ell}{r}\right)^2 (2 + \cos \beta_m)} \quad (27)$$

Una expresión similar y simplificada de la carga crítica, para el pandeo en el primer modo y para $(\pi/2n)^2 \ll 1$, es la siguiente:

$$\lambda_{cr} = \ell P_e \quad (28)$$

$$\text{o} \quad P_{cr} = P_e + E' A' \operatorname{sen}^2 \gamma \cos \gamma \quad (29)$$

Las cargas críticas al pandeo por corte acontecen ser mayores en magnitud que aquellas que suministra la ecuación (17).

5 COLUMNAS CELOSIA CON OTRAS RESTRICCIONES EXTREMAS

Condiciones de restricción más complejas en las estructuras de las columnas no siempre justifican la solución por series. En esos casos, la ecuación (9) puede ser transformada de ser una ecuación vectorial en una simple ecuación escalar, mediante la introducción de una función de tensión ϕ , la cual está relacionada a las componentes vectoriales y_x , M_x y u_x , de manera que reduce dos componentes de la ecuación vectorial a identidades.

Las transformaciones que resultan de tales identidades son:

$$M_x = -6k_1 B \Delta \nabla \Lambda \phi \quad (30a)$$

$$y_x = k_1 \Lambda \Delta (\Delta \nabla + \sigma) \phi \quad (30b)$$

$$u_x = (\lambda - 6B) \Delta \nabla \left(\Delta \nabla + \frac{6\lambda}{\lambda - 6B} \right) \phi \quad (30c)$$

Como resultado de las operaciones definidas, la ecuación escalar correspondiente es:

$$\Delta \nabla (\Delta \nabla - 2s) (\Delta \nabla - 2t) \phi = 0 \quad (31)$$

$$\text{en la cual} \quad 2s, 2t = j \pm \sqrt{j^2 - i} \quad (32a)$$

donde
$$j = \frac{5k_1k_3 + k_2(6B - \lambda) + 3\lambda}{6B - \lambda - k_1k_3} \quad (32b)$$

y
$$i = \frac{12(2k_1k_3 - \lambda k_2)}{k_1k_3 - 6B + \lambda} \quad (32c)$$

Además, puede demostrarse que la rotación en un nudo genérico está relacionada con la función de tensión ϕ por:

$$\theta_x = 3k_1\Lambda^2\phi \quad (33)$$

esto puede ser verificado introduciendo las ecuaciones (30a), (30b) y (33) en las ecuaciones de giro y deflexión.

Dentro de un rango práctico de los parámetros, s y t son magnitudes reales que satisfacen las condiciones $s > 0$ y $-2 < t < 0$. Entonces, la solución de la ecuación (31), que es una ecuación de diferencias de sexto orden, puede expresarse así:

$$\phi = C_1 + C_2^x + C_3 \text{sen}(\rho x) + C_4 \text{cos}(\rho x) + C_5 \text{Sh}(\omega x) + C_6 \text{Chs}(\omega x) \quad (34)$$

en la cual $\text{cos } \rho = 1 + t;$ (35a)

$$\text{Cosh}(\omega) = 1 + s \quad (35b)$$

La determinación de las capacidades de carga crítica es el resultado de la evaluación de las seis (6) constantes, satisfaciendo las condiciones especificadas para cada una de las restricciones en los extremos de la columna.

Las condiciones de borde para una columna doblemente empotrada son las siguientes:

$$\theta_0 = \theta_n = Y_0 = Y_n = U_0 = U_n = 0 \quad (36)$$

Esto debe requerir que,

$$\left[\Lambda^2 \theta \right]_{x=0, x=n} = 0 \quad (37a)$$

$$\left[\Lambda(\Delta \nabla + \sigma) \right]_{x=0, x=n} = 0 \quad (37b)$$

$$\left[\Delta \nabla \left(\Delta \nabla + \frac{6\lambda}{\lambda - 6B} \right) \phi \right]_{x=0} = 0 \quad (37c)$$

Al introducir la ecuación (34) en las ecuaciones (37) resulta un conjunto de cinco ecuaciones en las incógnitas C_2 a C_6 . A su vez, se encuentra que el determinante de los coeficientes es nulo cuando

$$\text{sen} \frac{1}{2}(\rho n) = 0 \quad (38)$$

Finalmente, teniendo en cuenta las (35 a,b) y (38), y después de operaciones algebraicas sencillas, se obtiene:

$$\frac{P_c}{B} = \frac{6(1 - \cos^2 \beta_m)}{2 + \cos 2\beta_m} + \frac{\cos \gamma \operatorname{sen}^2 \gamma \left(\frac{\ell}{r}\right)^2 \left(1 - \cos 2\beta_m + \frac{k_2}{2}\right)}{K(k_2 + 1 - \cos 2\beta_m)} \quad (39)$$

Si el número n de paneles es grande, tal que $(2\pi/n)^2 \ll 1$ y considerando el desarrollo en serie de $\cos 2\beta_m$, la carga crítica en el primer modo ($m=1$) es:

$$P_c = 4P_e + \frac{E' A' \cos \gamma \operatorname{sen}^2 \gamma \left(k_2 + \frac{4\pi^2}{n^2}\right)}{\left(2k_2 + \frac{4\pi^2}{n^2}\right)} \quad (40)$$

Como ejemplo, cuando $n=15$, $K=20$, $\gamma=55^\circ$ y $L/r=200$, el porcentaje de incremento en la tensión admisible, para este tipo de restricción en los extremos, supera el 11%.

Por otra parte, en el caso de una columna de celosía empotrada-libre puede demostrarse que la longitud efectiva de factor 2 (que se usa en columnas sólidas) permanece aplicable aquí, dando como resultado:

$$P_c = \frac{P_e}{4} + \frac{EA \operatorname{tg}^2 \gamma}{\left(\frac{4n}{\pi}\right)^2 + K \operatorname{sec}^3 \gamma} \quad (41)$$

6 EXCENTRICIDAD DE LA CARGA.

Para obtener soluciones compactas para determinar las tensiones y deformaciones en una columna de celosía excéntricamente cargada, se comienza por introducir la ecuación (34) en las ecuaciones (30):

$$M_x = -24k_1 B \{t \operatorname{sen} \rho [C_3 \cos(\rho x) - C_4 \operatorname{sen}(\rho x)] + s \operatorname{sh} \omega [C_5 \cosh(\omega x) + C_6 \operatorname{sh}(\omega x)]\} \quad (42a)$$

$$Y_x = 4k_1 \{3C_2 + (3+t) \operatorname{sen} \rho [C_3 \cos(\rho x) - C_4 \operatorname{sen}(\rho x)] + (s+3) \operatorname{sh} \omega [C_5 \cosh(\omega x) + C_6 \operatorname{sh}(\omega x)]\} \quad (42b)$$

Cuando los miembros continuos de la columna celosía están sujetos cada uno de ellos a momentos M_0 y M_n , respectivamente en $x=0$ y $x=n$, las condiciones de borde son:

$$\begin{aligned} [M_x]_{x=0} &= M_0 \quad ; \quad [M_x]_{x=n} = M_n \\ Y_0 &= Y_n = U_0 = 0 \end{aligned} \quad (43a)$$

Si se tienen en cuenta las ecuaciones (30), (42) y (43), las constantes a ser determinadas

están relacionadas por el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 & -Dsh(\omega n) & cosh(\omega n) - 1 \\ tsen\rho & 0 & s sh\omega \\ cosh(\rho n) - 1 & -sen(\rho n) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_4 \\ C_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V(M_0 - M_n) \\ -M_0 / 24k_1B \\ G(M_0 - M_n) \end{Bmatrix} \quad (44)$$

$$C_6 = -\frac{C_4}{D}$$

$$C_2 = -\frac{1}{3}[(3+t)sen\rho C_3 + (3+s)sh\omega C_5] \quad (45)$$

siendo

$$D = \frac{t(3\lambda + 2t - 6tB)}{s(3\lambda + \lambda s - 6sB)} \quad (47)$$

$$V = \frac{3+t}{72k_1B(s-t)sh\omega} \quad (48)$$

$$G = \frac{3+t}{72k_2B(t-s)sen\rho} \quad (49)$$

Finalmente, en el caso de columnas simplemente enlazadas (una riostra en cada panel), las ecuaciones son similares a las obtenidas para columnas doblemente enlazadas. Además, se determina la carga crítica reduciendo el área de la sección transversal A' a la mitad.

7 CONCLUSIONES.

Los principios de la mecánica discreta han sido empleados para desarrollar las ecuaciones de diferencias que gobiernan el problema de las columnas celosía. Las capacidades de carga teóricas son determinadas para variados modos de pandeo y con distintos tipos de restricciones extremas.

A más de generar las expresiones algebraicas de tensiones y deformaciones, para columnas como las mencionadas, y cargadas excéntricamente, la técnica expuesta prueba ser una herramienta estimable en el estudio de la estabilidad de entramados complejos y estructuras de cáscaras reticuladas.

8 REFERENCIAS

- [1] F. Engesser, *Die Knickfestigkeit gerader Stabe*, Zentralbatt der Beuverwaltung, Vol. 11, 1891.
- [2] F. Engesser. *Über die Knickfestigkeit von Rahmestaben*, Zentralbatt der Beuverwaltung, Vol. 29, 1909.
- [3] S. Timoshenko and J. M. Gere, *Theory of Elastic Stability*, 2nd edition, McGraw-Hill Book Co., Inc. New York, 1961.

- [4] F. Bleich, *Buckling Strength of Metal Structures*, McGraw-Hill Book Co., Inc. New York, 1952.
- [5] D.L. Dean, *Lectures on Stability presented at the University of Delaware*, Newark, USA, 1961
- [6] W. Gutkowski, *The Stability of Lattice Struts*, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 43, 1963, p. 284.
- [7] Column research Council, *Guide to Design Criteria for Metal Compression Members*. 1980.
- [8] M.J. Maurizi y P.M. Bellés, *Análisis directo de vigas-columnas, prismáticas y continuas*; XXXVII Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural, Tucumán, 18 al 22/9/95., Vol. 3, 2005-215.
- [9] Z.P. Bazant and L. Cedolin, *Stability of Structures*, Oxford University Press, 1991.
- [10] C.P. Filipich y E.A. Bambill, *Frecuencias naturales de piezas empresilladas vía serie de potencias*. ENIEF 2003, Vol. XXII, 877-891.