

APLICACION DEL METODO DE ELEMENTOS FINITOS
A LA EVALUACION DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE ESFUERZOS

Fernando Labbé

Departamento de Mecánica, Facultad de Ingeniería

Juan Donoso

Fernando Gray

Departamento de Ciencia de Materiales, Facultad de Ingeniería

Universidad Técnica Federico Santa María

Valparaíso - Chile

RESUMEN

Se determinó el factor de intensidad de esfuerzos, K_I , para tres situaciones de fisuramiento de cuerpos bidimensionales utilizando el Método de Elementos Finitos con elementos híbridos que incorporan el carácter singular del campo de esfuerzos en la punta de la fisura.

En los tres casos tratados (placa con fisura interior y placa con fisuras de borde, sometidas a tracción, y viga con fisura de borde sometida a flexión), los resultados obtenidos se comparan favorablemente con aquellos disponibles en la literatura, no sólo del punto de vista de la convergencia numérica, sino además en el ahorro de tiempos de modelación y proceso.

ABSTRACT

The stress intensity factor, K_I , has been determined for three cases of two-dimensional cracked bodies using the Finite Element Method with hybrid elements incorporating the singular character of the stress field at the crack tip.

The results obtained for the three cases treated (i.e. centered-crack panel, double-edge cracked panel, and three-point bending cracked specimen), compare favourably with results obtained elsewhere, not only considering numerical convergence, but also from the point of view of the modelling and process time savings.

INTRODUCCION

La integridad de una estructura está estrechamente relacionada con la posibilidad de crecimiento de defectos tales como fisuras. Estas fisuras pueden producirse durante el proceso de fabricación, como también durante el montaje y operación del elemento estructural. Un ejemplo interesante lo constituyen las grietas producidas durante el proceso de soldadura, lo que representa uno de los tipos de defectos más peligrosos en uniones soldadas [1]. Es por tanto de gran importancia poder cuantificar el margen de seguridad contra fractura catastrófica con la mayor precisión posible.

Los criterios convencionales de diseño, basados en el esfuerzo máximo o esfuerzo de fluencia, se hacen insuficientes para analizar la confiabilidad de estructuras fisuradas. La teoría de Mecánica de Fractura Elástico-Lineal (MFEL) provee criterios más modernos de diseño para analizar estas situaciones. Es así que, considerando un material elástico-lineal, el campo de esfuerzos en la vecindad del vértice de la fisura resulta ser singular [2], pudiendo identificarse un coeficiente que mide la intensidad de la singularidad del esfuerzo.

El comportamiento asintótico del cuerpo elástico en la vecindad del vértice de la fisura puede ser obtenido utilizando el método de Williams [2]. Este campo elástico puede ser clasificado en 3 tipos básicos, cada uno asociado con el modo local de deformación [3]. El modo I, denominado modo de abertura, está asociado con desplazamientos locales donde las dos superficies de la fisura se abren simétricamente con respecto a los planos $x - y$, $y - z$, simultáneamente, como muestra la Figura 1.

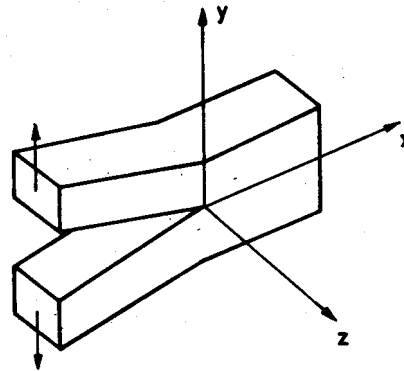


Figura 1: Fisura cargada en modo I (abertura)

En esta situación, el campo de esfuerzos y desplazamientos en la vecindad de la fisura es [6]:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \sigma_y \end{pmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \\ \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ 1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \end{pmatrix} + O(r)$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} (k - 1 + 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}) \\ \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} (k + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$$

donde: $O(r)$: función que permanece acotada cuando $r \rightarrow 0$.

G : módulo de corte
 ν : Módulo de Poisson

$$k : \begin{cases} 3 - 4 \nu & , \text{ en deformación plana} \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & , \text{ en esfuerzo plano} \end{cases}$$

K_I : factor de intensidad de esfuerzos en modo I.

El factor de intensidad de esfuerzos (FIE) K_I depende de la carga aplicada, geometría del cuerpo y longitud de la fisura. Así, la interacción del campo elástico en la proximidad de la fisura con el campo de esfuerzos aplicado es completamente caracterizado por este coeficiente. El conocimiento del FIE resulta de vital importancia en la aplicación ingenieril del concepto de MFEL, pues permite establecer una relación cuantitativa entre tamaño de los defectos, esfuerzo aplicado y tenacidad a la fractura, KIC, del material [4].

Siendo el factor de intensidad de esfuerzo K_I de crucial importancia para la aplicación ingenieril de la MFEL, su evaluación analítica presenta extrema dificultad. En la actualidad existen tabulaciones de soluciones para geometrías simples [5] [6]. Sin embargo, en el caso de geometrías finitas complicadas y condiciones de borde generales, no existen hasta el momento expresiones analíticas para K_I , por lo que debe recurrirse a métodos numéricos de solución. El obje-

tivo del presente trabajo es mostrar la aplicación del Método de Elementos Finitos (MEF) en la determinación del factor de intensidad de esfuerzos K_I en cuerpos fisurados bidimensionales, utilizando elementos especiales (híbridos) que incorporan el carácter singular del campo de esfuerzos en la punta de la fisura. Con este fin, se analizaron modelaciones de diversas geometrías y estados de carga, comparando los resultados obtenidos con aquellos disponibles en la literatura.

ESQUEMA UTILIZADO

De las varias técnicas numéricas usadas en Mecánica de Fractura, el Método de Elementos Finitos ha sido el de mayor aceptación general, debido a su gran versatilidad y alto grado de desarrollo actual [7] [8] [9]. Existen diversas maneras de formular el MEF, cada una de ellas asociada a un problema variacional o de valores extremos. Algunos de los principios básicos de valores extremos más usados son: principio de energía potencial estacionaria, principio de energía potencial complementaria estacionaria, principio de Reissner y principio de Hu-Washizu. Específicamente en MFEL el MEF se ha aplicado usando algunos de estos principios, con elementos tradicionales y con el esquema de extrapolación [7] que consiste en extrapolar el factor de intensidad de esfuerzos a partir de valores de esfuerzos o desplazamientos en la proximidad del vértice de la fisura. Tiene la desventaja que necesita una alta densidad de elementos en la proximidad del vértice de la fisura.

En el esquema tradicional de elementos finitos en problemas cuya solución es suave, el orden de aproximación dentro del elemento es proporcional al orden del polinomio usado en la función de interpolación [10]. Sin embargo, cuando la solución incluye una singularidad, como es el caso de una fisura, el orden de aproximación es dominado por las características de la singularidad, por lo cual elementos convencionales de mayor orden ("superelementos") no pueden mejorar la razón de convergencia [11]. Esta dificultad puede resolverse usando los llamados "superelementos híbridos" [12] [13] [14], que incorporan directamente el carácter singular de la fisura en las funciones de forma del esfuerzo asumido. De tal modo se acomoda este elemento especial en la punta de la fisura con elementos convencionales alrededor de ésta.

Tres fueron los casos estudiados en este trabajo para ilustrar el uso de los superelementos híbridos: placa finita con fisura centrada sometida a tracción uniforme (Figura 2a); placa finita con dos fisuras simétricas de borde sometida a tracción uniforme (Figura 2b), y viga sometida a flexión (probeta de flexión cargada en 3 puntos, Figura 3).

En el caso de las placas, la modelación se realizó con 1/4 del cuerpo, conteniendo 106 elementos. En cambio, la viga sometida a flexión fue modelada con 142 elementos distribuidos en la mitad de la viga. Los casos numéricos fueron procesados en un computador DEC-2020 y los resultados obtenidos fueron comparados con evaluaciones hechas para casos similares disponibles en la literatura.

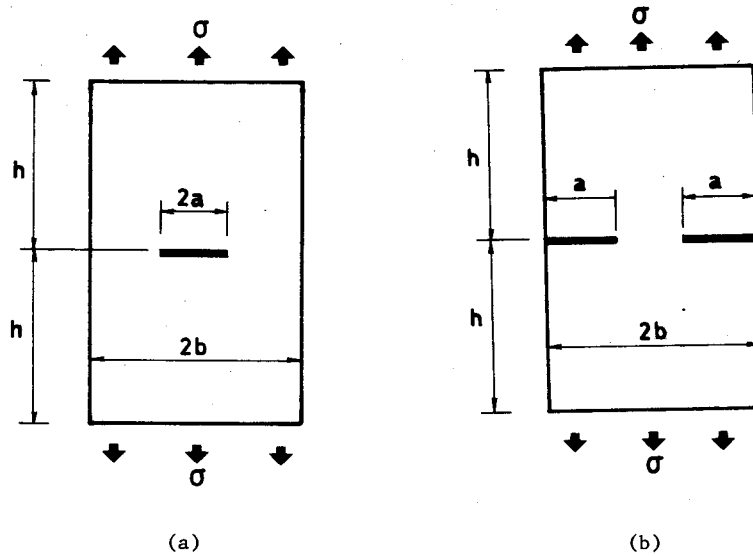


Figura 2: Geometría de las placas finitas sometidas a tracción uniforme. El caso (a) corresponde a fisura centrada, y el (b), a dos fisuras simétricas de borde.

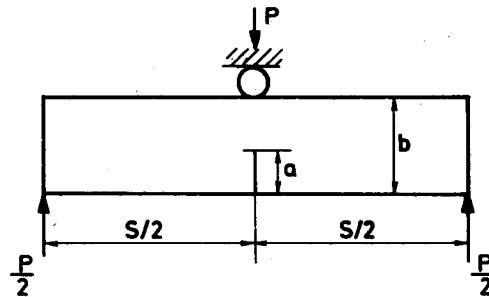


Figura 3: Geometría de la viga sometida a flexión por carga en 3 puntos.

RESULTADOS Y DISCUSION

Los resultados numéricos obtenidos con el esquema descrito, aparecen sintetizados en Tabla I, junto a la comparación con valores obtenidos por otros métodos. En esta tabla, el caso 1 se refiere a la placa finita con fisura centrada sometida a tracción uniforme; en caso 2 corresponde a la placa finita con dos fisuras simétricas de borde sometida a tracción uniforme, y el caso 3 guarda relación con la viga en flexión apoyada en tres puntos.

Tabla I

Valores numéricos obtenidos para el factor adimensional de intensidad de esfuerzos, para los casos tratados en este trabajo, y su comparación con datos de literatura.

Caso Analizado	a/b	h/b	s/b	Numero de elementos	$K_I/\sigma \sqrt{\pi a}$		Error Relativo %
					MEF	Literatura	
1	0,5	1,0	-	106	1,334	1,334 [15]	0,0
2	0,5	1,0	-	106	1,348	1,290 [16]	4,5
					$K_I b^2/6M \sqrt{\pi a} (*)$		
3	0,5	-	4,0	142	1,375	1,414 [5]	2,7

$$(*)M = \frac{Ps}{4}$$

En todos los casos se modeló la punta de la fisura con el elemento especial híbrido, combinándolo con elementos convencionales rectangulares y triangulares en la región complementaria del cuerpo.

Para el caso de la placa con fisura centrada la solución numérica del presente trabajo coincide exactamente con la solución analítica de Isida [15]. Esta última expresión se obtuvo utilizando método de colocación con potenciales complejos y se presenta en los manuales como solución exacta.

En el caso de la placa con fisuras simétricas de borde, los resultados numéricos comparan bien con la solución disponible por método de colocación [16]. Finalmente, para el caso de la viga en flexión por carga en 3 puntos, las estimaciones numéricas de K_I se comparan muy bien con soluciones de literatura.

CONCLUSIONES

La utilización del elemento especial híbrido en el Método de Elementos Finitos ha mostrado ser bastante eficaz en la determinación del factor de intensidad de esfuerzos K_I . El hecho de incorporar directamente en su formulación el carácter singular del campo de esfuerzos permite determinar directamente K_I sin necesidad de un

esquema de extrapolación. Además, permite ahorrar un tiempo considerable en la modelación de la fisura, evitándose así la necesidad de una alta densidad de elementos convencionales en la punta de la fisura.

Finalmente, la exactitud de los resultados presentados, y los tiempos reducidos empleados en la modelación y proceso de los casos analizados, permite establecer que el esquema utilizado es bastante eficiente en la determinación numérica del factor de intensidad de esfuerzos.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por el proyecto UTFSM-DGIP-852104, y por el Programa Multinacional de Tecnología de Materiales de OEA.

REFERENCIAS

- [1] Masubuchi, K., "Analysis of Welded Structures", Pergamon Press, 1980.
- [2] Williams, M.L., "On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack", Journal of Applied Mechanics, Vol. 24, (1957) pp. 109-114.
- [3] Paris, P.C.; Sih, G.C., "Stress Analysis of Cracks", en "Fracture Toughness Testing and its Applications", A.S.T.M., STP 381, 1965.
- [4] Sih, G.C., "Fracture Mechanics Applied to Engineering Problems Strain Energy Density Fracture Criterion", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 6 (1974), pp. 361-386.
- [5] Tada, H., "The Stress Analysis of Cracks Handbook", Del Research Corporation, Hellertown Pa., 1973.
- [6] Rooke, D.P.; Cartwright, D.J., Compendium of Stress Intensity Factors, London H.M.S.O., 1976.
- [7] Chan, S.K.; Tuba, I.S.; Wilson, W.K., "On the Finite Element Method in Linear Fracture Mechanics", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 2, (1970), pp. 1-17.
- [8] Wilson, W.K., "Finite Element Methods for Elastic Bodies Containing Cracks", en Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems, Vol. 1, Editado por G.C. Sih, Noordhoff, 1973
- [9] Hall, C.A., "A Macro Element Approach to Computing Stress Intensity Factors for Three Dimensional Structures", International Journal of Fracture, Vol. 15, No. 3 (1979), pp. 231-245.
- [10] Strang, G.; Fix, G.J., "An Analysis of the Finite Element Method", Prentice-Hall, Inc., 1973.

- [11] Tong, P.; Pian, T.H., "On the Convergence of the Finite Element Method for Problems with Singularity", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 9 (1973), pp. 313-321.
- [12] Tong, P.; Pian, T.H.; Lasry, S.J., "A Hybrid Element Approach to Crack Problems in Plane Elasticity", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 7 (1973), pp. 297-308.
- [13] Pian, T.H.; Chen, D.P., "Alternative Ways for Formulation of Hybrid Stress Elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 18 (1982), pp. 1679-1684.
- [14] Lin, K.Y.; Tong, P.; Orringer, O., "Effect of Shape on Hybrid Crack-Containing Finite Elements", *Computational Fracture Mechanics*, editado por Rybicki, E.F., ASME 1975, pp. 1-20.
- [15] Isida, M., "Effect of Width and Length on Stress Intensity Factors of Internally Cracked Plates Under Various Boundary Conditions", *International Journal of Fracture Mechanics*, Vol. 7, No. 3 (1971), pp. 301-316.
- [16] Bowie, O.L., "Rectangular Tensile Sheet with Symmetric Edge Cracks", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 31 (1964), pp. 208-212.