

SISTEMA PARA CÁLCULO DE PLACAS E
CHAPAS UTILIZANDO MICROCOMPUTADORES

Helena M.C. Carmo Antunes

João A. Magri

Departamento de Estruturas. Escola de Engenharia de
São Carlos
Universidade de São Paulo
São Carlos - SP - Brasil

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar um sistema para o cálculo de placas e chapas utilizando analogia com grelhas e pórticos. O sistema, desenvolvido para microcomputadores compatíveis com a linha Apple, foi escrito em BASIC. As diretrizes que nortearam o seu desenvolvimento foram a utilização de equipamento de baixo custo e a possibilidade de expansão em qualquer nível. São apresentados resultados, os quais foram comparados com aqueles obtidos através de sistemas que utilizam a técnica dos elementos finitos.

ABSTRACT

The aim of this paper is to show a system for working out slabs and plates with in plane loads using analogy of plane grids and plane frames. The system was developed for Apple microcomputers, and it was written in BASIC. The main purposes of the work are to use cheap microcomputers and to give the possibility of expansion at any level. Some results are presented and they were compared with those obtained from systems that employ the finite element method.

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é apresentar um sistema para o cálculo de placas delgadas e chapas pelo processo de equivalência (analogia com grelha e pórtico, respectivamente).

A concepção do sistema começou há alguns anos com o desenvolvimento do cálculo estrutural de um depósito de chapas de aço que era composto por um piso de concreto armado apoiado em terreno compressível, entre outras coisas. A solução "estaqueamento" mostrou que o projeto seria inviável economicamente. Decidiu-se então calcular o piso como sendo uma laje apoiada em meio elástico. O problema poderia ser resolvido pelo método dos elementos finitos utilizando pacotes importados tais como: STARDYNE, STRUDL, etc... Após analisar o custo do processamento verificou-se que o problema era de porte médio o que não justificava a utilização de tais pacotes, desenvolvidos para máquinas grandes e que têm um custo de processamento bastante elevado. A estrutura foi resolvida por um processo aproximado e foi decidida a montagem de um sistema para resolver este problema a um custo reduzido.

Nesta época foi iniciado um projeto de pesquisa e desenvolvimento de sistemas utilizando microcomputadores; inicialmente a máquina escolhida foi a HP-9830 com a linguagem BASIC mas, depois, os planos foram alterados e o trabalho passou a ser desenvolvido com o microcomputador CompuCorp 425/33 com 2K bytes de memória RAM. Essa máquina opera com a linguagem ASSEMBLER composta por vários macros que possibilitam executar funções matemáticas, endereçar memórias e alterar indicadores para indexação.

O uso dos programas, na rotina de serviços de um escritório de cálculo, mostrou que os microcomputadores eram viáveis nas empresas pequenas e médias e que nem todos os processamentos deveriam ser feitos utilizando pacotes importados e máquinas de grande porte.

A tecnologia dos microcomputadores evoluiu e hoje já existem no mercado máquinas com 48K bytes de memória RAM, unidades de disquetes e linguagem de alto nível.

Tendo em vista esses fatos e a facilidade de se adquirir no mercado microcomputadores da linha Apple, desenvolveu-se este trabalho visando baixo consumo de memória principal e de disco; obteve-se uma boa relação entre custos e tipos de estruturas que podem ser analisadas.

Um sistema que opera em máquinas de baixo custo e permite o cálculo estático de placas, grelhas, chapas, pórticos e lajes sobre apoio elástico é de grande interesse para a empresa que pretende ter uma capacidade de processamento local e não depender de pacotes importados ou máquinas alugadas de terceiros.

O processo de equivalência foi desenvolvido por Herennikoff [1]. Basicamente consiste na substituição da placa ou chapa por uma grelha ou pórtico cujas barras têm características elásticas equivalentes. Resolvida a grelha ou o pórtico tem-se os deslocamentos e com eles pode-se calcular os esforços na placa ou chapa.

MODELO DE GRELHA EQUIVALENTE À PLACA

Seja uma placa retangular elementar com os lados medindo l e αl e espessura h ; esse retângulo será representado por seis barras no modelo de grelha equivalente com a disposição mostrada na Fig. 1(b).

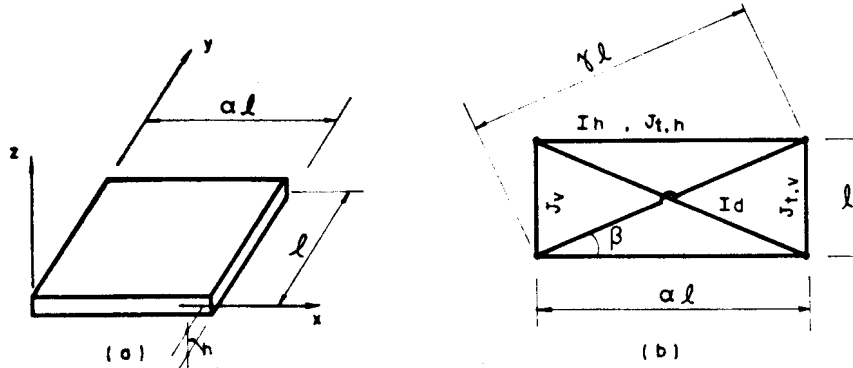


Fig 1 — (a) Elemento de placa. (b) Elemento de grelha equivalente

As barras que compõem as diagonais têm somente rigidez à flexão, I . As outras barras têm rigidez à flexão e à torção, I e J_t . Serão consideradas intersecções (pontos nodais) nos vértices do elemento conforme está mostrado na Fig. 1(b).

Esse modelo de grelha com seis graus de liberdade pode ser utilizado para simular a placa elementar conforme está visto a seguir.

Considere a placa da Fig. 1(a); aplicando-se momentos de intensidade $M_1 l$ nos lados de comprimento l , conforme está indicado na Fig. 2, pode-se obter a rotação na direção do momento aplicado com a expressão:

$$\theta_1 = \frac{\alpha l M_1}{E \left(\frac{h^3}{12} \right)} \quad (1)$$

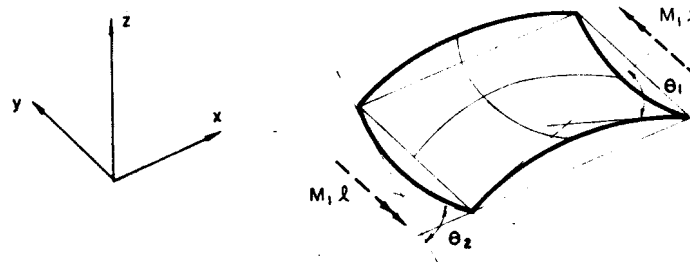


Fig. 2 — Momento aplicado na borda do elemento de placa

A rotação na direção ortogonal valerá:

$$\theta_2 = \frac{\nu \ell M_1}{E \left(\frac{h^3}{12} \right)} \quad (2)$$

Analogamente, quando se aplica um momento de intensidade $M_2 \propto \ell$, conforme está mostrado na Fig. 3, pode-se obter a rotação em relação ao eixo x com a expressão:

$$\theta_3 = \frac{\ell M_2}{E \left(\frac{h^3}{12} \right)} \quad (3)$$

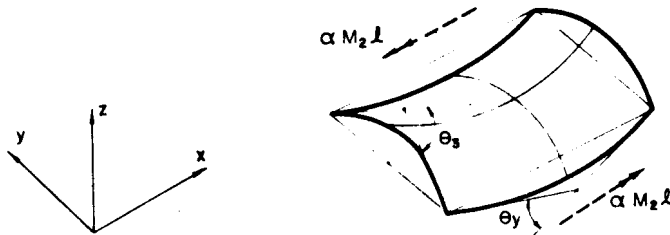


Fig. 3 — Momento aplicado na borda do elemento de placa

A rotação em relação ao eixo y vale:

$$\theta_4 = \frac{\nu \alpha \ell M_2}{E \left(\frac{h^3}{12} \right)} \quad (4)$$

Aplicando-se momentos torçores uniformemente distribuídos, de intensidade M_t , de tal forma que as bordas permaneçam planas, Fig. 4, pode-se calcular a rotação θ_5 com a expressão:

$$\theta_5 = \frac{\alpha \ell M_t (1 + \nu)}{E \left(\frac{h^3}{12} \right)} \quad (5)$$

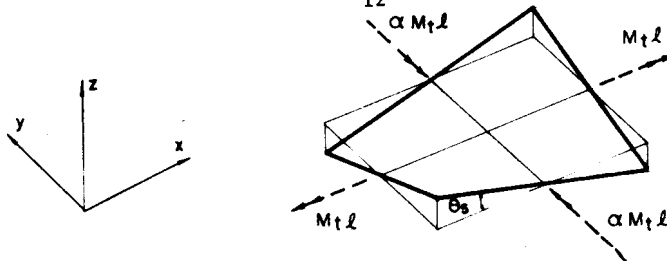


Fig. 4 — Momento torçor aplicado nas bordas do elemento de placa

Para calcular a matriz de rigidez da grelha deve-se somar as contribuições de todas as barras que a compõem. Essa matriz é facilmente obtida; ver GERE [2].

A referência às barras da grelha será feita utilizando-se a seguinte notação:

- Barras do tipo h são as barras paralelas ao eixo x do sistema global.
- Barras do tipo v são as barras paralelas ao eixo y do sistema global.
- Barra do tipo d_1 é a diagonal com a inclinação $180 - \beta$.
- Barra do tipo d_2 é a diagonal com inclinação β .

Aplicando-se um momento fletor de intensidade $\ell M_1/2$ em relação ao eixo y, conforme está mostrado na Fig. 5, obtêm-se:

$$\theta_6 = \frac{M_1 \ell^2 \alpha}{2E} \frac{\gamma^3 I_v + I_d}{\gamma^3 I_v I_h + I_d I_h + \alpha^3 I_d I_v} \quad (6)$$

$$\theta_7 = \frac{M_1 \ell^2 \alpha^2}{2E} \frac{I_d}{\gamma^3 I_v I_h + I_d I_h + \alpha^3 I_d I_v} \quad (7)$$

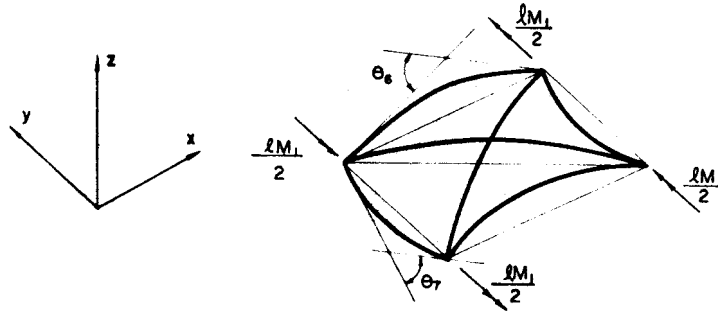


Fig 5 — Momento fletor aplicado no elemento de grelha e giros correspondentes

Aplicando-se um momento fletor de intensidade $\alpha \ell M_2/2$ em relação ao eixo x, conforme está mostrado na Fig. 6, pode-se calcular os valores de θ_8 e θ_9 .

$$\theta_8 = \frac{M_2 \ell^2 \alpha}{2E} \frac{\gamma^3 I_h + \alpha^3 I_d}{\gamma^3 I_v I_h + I_d I_h + \alpha^3 I_d I_v} \quad (8)$$

$$\theta_9 = \frac{M_2 \ell^2 \alpha^2}{2E} \frac{I_d}{\gamma^3 I_v I_h + I_d I_h + \alpha^3 I_d I_v} \quad (9)$$

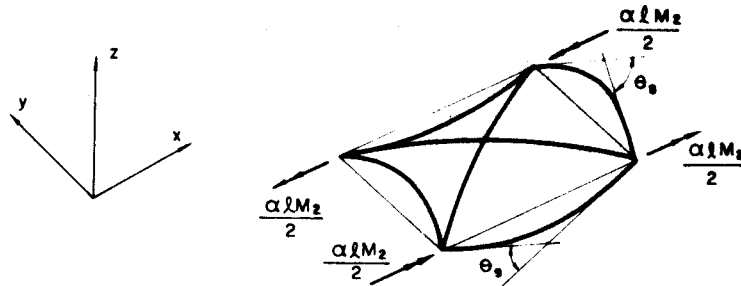


Fig 6 — Momento fletor aplicado no elemento de grelha e giros correspondentes.

Aplicando-se momentos torçores, conforme está mostrado na Fig.7, na grelha pode-se calcular o deslocamento θ_{10} .

$$\theta_{10} = \frac{M_t \gamma^3 \alpha l^2}{2E \left[\gamma^3 \left(\frac{GJ}{E} \frac{t, h}{E} \right) + 2 \alpha I_d \right]} \quad (10)$$

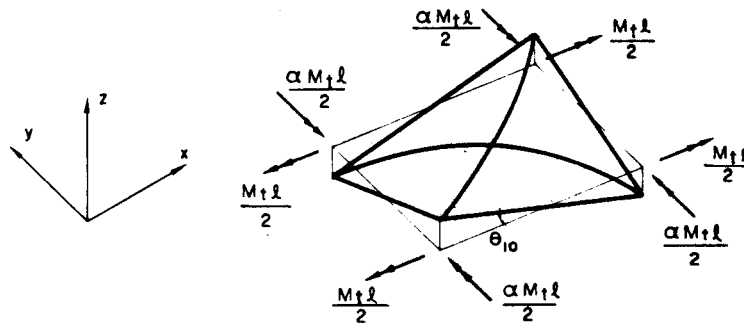


Fig. 7 — Momento torsor aplicado no elemento de grelha

Para simular a placa elementar com a grelha deve-se impor igualdade de deformações nos dois elementos:

$$\theta_1 = \theta_6 \quad (11)$$

$$\theta_2 = \theta_7 \quad (12)$$

$$\theta_3 = \theta_8 \quad (13)$$

$$\theta_4 = \theta_9 \quad (14)$$

$$\theta_5 = \theta_{10} \quad (15)$$

Neste conjunto de equações, a segunda e a quarta são iguais. O sistema formado pelas equações (11), (12), (13) e (15) fornece os valores das características elásticas da grelha equivalente. Resolvendo o sistema obtém-se:

$$I_v = \frac{(\alpha^2 - \mu) \ell}{2 \alpha (1 - \mu^2)} \frac{h^3}{12} \quad (16)$$

$$I_h = \frac{(1 - \mu^2) \ell}{2 (1 - \mu^2)} \frac{h^3}{12} \quad (17)$$

$$I_d = \frac{\mu \gamma^3 \ell}{2 \alpha (1 - \mu^2)} \frac{h^3}{12} \quad (18)$$

$$J_{t,h} = \frac{E}{G} \cdot \frac{(1 - 3\mu) \ell}{2 (1 - \mu^2)} \frac{h^3}{12} \quad (19)$$

$$J_{t,v} = \frac{E}{G} \cdot \frac{\alpha (1 - 3\mu) \ell}{2 (1 - \mu^2)} \frac{h^3}{12} \quad (20)$$

Uma placa pode ser simulada por uma grelha utilizando-se as equações (16) a (20); as deformações na placa serão aproximadamente iguais às deformações na grelha.

A distribuição dos momentos fletores e torçores na placa pode ser determinada através do processo das diferenças finitas ou por um processo aproximado que considera os momentos obtidos do cálculo da grelha.

A placa poderá ter espessura variável; o processo aplica-se para estes casos desde que seja adotada uma malha adequada.

Normalmente o modelo de grelha quadrado conduz a melhores resultados. Quando for necessário usar o modelo retangular recomenda-se adotar um valor de α tal que esteja no intervalo $0,5 \leq \alpha \leq 2$.

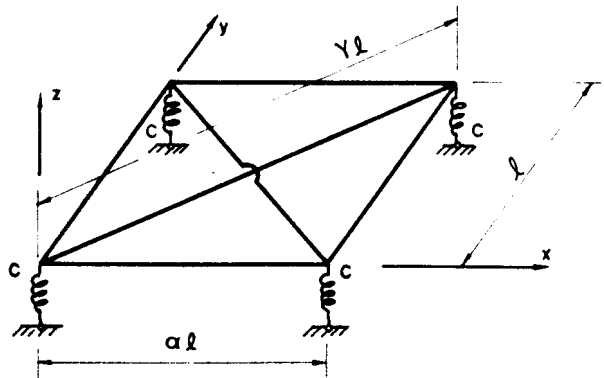


Fig. 8 — Modelo retangular apoiado em um conjunto de molas

Essas conclusões podem ser estendidas a placas apoiadas em fundações elásticas, bastando para tanto trabalhar com o modelo de grelha mostrado na Fig. 8. Nesse caso o coeficiente c é igual ao coeficiente de mola do solo.

MODELO DE PÓRTICO EQUIVALENTE À CHAPA

Seja uma chapa retangular elementar cujos lados medem α e αl e tem espessura h ; ver Fig. 9(a). Ela pode ser simulada por oito barras que formam o modelo de pórtico equivalente, com a disposição mostrada na Fig. 9(b).

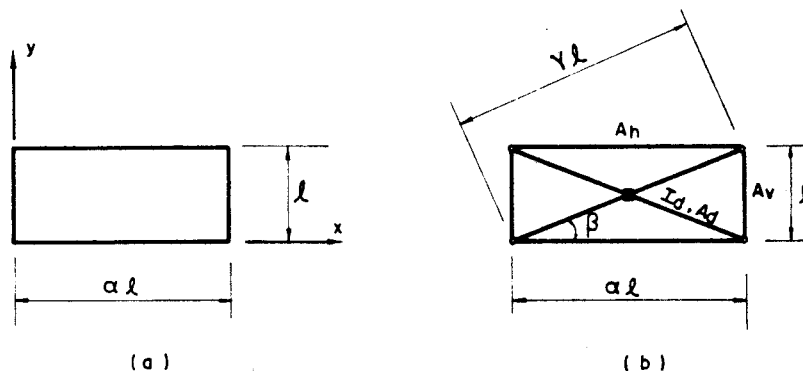


Fig. 9 — (a) Elemento de chapa (b) Elemento de pórtico equivalente

As barras que compõem as diagonais têm rigidez à flexão e força normal. As outras têm rigidez à força normal somente. Serão consideradas as intersecções (pontos nodais) nos vértices (articulações) e no cruzamento das diagonais (nó contínuo), conforme está mostrado na Fig. 9(b).

Esse modelo de pórtico, com quatro graus de liberdade, pode ser utilizado para simular a chapa elementar.

Calculando-se a energia de deformação do modelo equivalente, de pórtico, e com considerações análogas àquelas feitas no caso do modelo de grelha, obtêm-se:

$$A_h = \frac{1}{E \alpha l} \cdot \left[\gamma + 0,5 \mu (1 - \cotg^2 \beta) \right] \quad (21)$$

$$A_v = \frac{1}{E l} V \cdot \left[\gamma + 0,5 \mu (1 - \tg^2 \beta) \right] \quad (22)$$

$$A_d = \frac{2}{E \gamma l} V \cdot \frac{\mu}{2 \sen^2 \beta \cdot \cos^2 \beta} \quad (23)$$

$$I_d = \frac{\gamma l}{6 E} V \cdot \frac{(\mu - \gamma)}{2 \sin^2 \beta \cdot \cos^2 \beta} \quad (24)$$

onde V é o volume da chapa elementar.

Uma chapa pode ser simulada por um pórtico cujas barras têm características elásticas e geométricas calculadas com as equações (21) a (24).

As deformações no pórtico equivalente serão iguais às deformações da chapa. A distribuição de tensões e deformações na chapa poderá ser calculada utilizando-se processo aproximado.

Normalmente obtêm-se resultados mais precisos com o uso de elementos cujo valor do parâmetro α seja próximo de 1. Quando isso não for possível, deve-se adotar o valor de α no intervalo $0,5 \leq \alpha \leq 1$.

CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA

O sistema foi codificado utilizando algoritmos baseados na teoria exposta. As técnicas de estruturação de sistemas e de programas, desenvolvidas por Warnier [3] e por Gane e Sarson [4], foram utilizadas neste trabalho.

As diretrizes que nortearam o seu desenvolvimento podem ser resumidas nos seguintes itens:

- a) Utilização de máquinas de baixo custo.
- b) O sistema pode ser configurado para as necessidades do usuário.
- c) Possibilidade de expansão em qualquer nível, através do desenvolvimento de novos módulos.
- d) Utilização de recursos gráficos.
- e) Possibilidade de acoplamento ("interface") com outros sistemas disponíveis no mercado.
- f) A interação com o usuário é tão importante quanto o cálculo da estrutura em si.

A diretriz do item c) permite que o sistema seja considerado incompleto para alguns usuários ou excessivamente completo para outros. Estes problemas podem ser resolvidos com a diretriz do item b).

Atualmente ele está composto pelos seguintes módulos:

- a) Supervisor.
- b) Cadastro da estrutura.
- c) Leitura das características geométricas do modelo.
- d) Desenho da malha na tela ou impressora (se a impressora tiver capacidade gráfica e for compatível com o sistema).
- e) Modificação de dados da estrutura.
- f) Leitura das características elásticas da malha.
- g) Leitura do carregamento.

- h) Montagem da matriz de rigidez.
- i) Resolução do sistema de equações.
- j) Cálculo dos esforços.
- l) Desenho da estrutura deformada e indeformada na tela ou impressora, permitindo a superposição das formas e rotações em torno dos eixos globais.
- m) Simulação de uma unidade de disquete no último banco de memória das máquinas que operam com 64K bytes de memória.
- n) Programas utilitários para o deslocamento de formas da memória gráfica da máquina para a impressora.
- o) Rotinas de consistência de informações e edição de dados em todos os níveis do sistema.
- p) Programa utilitário que transporta arquivos de dados gerados sob o sistema operacional CP/M para o DOS 3.3.
- q) Sistema para executar a superposição dos efeitos escrito na linguagem do SGBD dBASE II.

A interação com o usuário é feita através de "menus" de opções em vez de linguagens orientadas, como aquelas existentes nos sistemas STRUDL, STRESS, etc... O supervisor corresponde ao nível mais alto de opções e um módulo que está no final da raiz da árvore corresponde ao nível mais baixo.

O sistema para o cálculo de placas e chapas pode operar no modo manual ou automático. Na opção manual o usuário pode escolher qual o módulo a ser executado. Na operação automática o usuário não interage com o supervisor; o próprio sistema aciona a execução dos módulos e o usuário tem apenas o trabalho de escolher as várias opções existentes em cada módulo.

Essa técnica do desenvolvimento do sistema, que é chamada de "top-down", tem as seguintes vantagens:

- a) A manutenção e ampliação do sistema ficam simplificadas desde que se conheça o comprimento e o conteúdo dos campos que compõem os arquivos gerados.
- b) O tempo de desenvolvimento dos programas é reduzido porque diminui muito a possibilidade de erros de programação.
- c) Após escrever e depurar o último programa, resulta um sistema totalmente integrado.
- d) Pode-se substituir um módulo sem que se tenha que reescrever os demais.

O sistema foi desenvolvido para microcomputadores "compatíveis" com o Apple II. A configuração mínima de máquina corresponde aos seguintes equipamentos:

- a) 48K bytes de memória RAM.
- b) Uma unidade de disco.
- c) Televisor comum.

Os programas foram escritos na linguagem BASIC, que opera sob o

sistema operacional DOS 3.3 ou equivalente, e na linguagem ASSEMBLER (rotinas de comunicação computador/impressora gráfica e de simulação de unidade de disco). O Assembler utilizado foi o LISA.

Na configuração "ideal" deve-se ter os seguintes equipamentos:

- a) 64K bytes de memória RAM.
- b) Duas ou mais unidades de disco.
- c) Impressora com capacidade gráfica e velocidade mínima de 80cps (impressoras "compatíveis" com a MX-80 ou MX-100 da Epson).

Os microcomputadores "compatíveis" com o Apple II, quando utilizados para aplicações técnico-científicas, têm as seguintes vantagens (em relação às máquinas de custo equivalente):

- a) Melhor relação precisão/consumo de memória.
- b) Recursos gráficos disponíveis dentro da linguagem de programação e não existentes nos outros microcomputadores.
- c) Estrutura modular: o usuário pode definir a configuração que lhe convier.
- d) Possibilidade de substituir eletronicamente a CPU da máquina.
- e) É um equipamento de baixo custo.

O item d) torna-se muito importante quando se considera a evolução da tecnologia dos microcomputadores. Atualmente estão sendo produzidas as CPUs que processam 16 bits ao mesmo tempo (contra 8 bits das CPUs atuais) e isto normalmente significa maior velocidade de processamento, maior capacidade de endereçar um conjunto de memórias tipo RAM (um microcomputador com 16 bits tem na sua configuração mínima 256K bytes de memória) e um microprocessador mais poderoso a nível de instrução de máquina.

Atualmente existem disponíveis no mercado placas para máquinas "baseadas" no Apple II com CPU 68000 da Motorola Inc., CPU 8086 e 8088 da Intel Inc. e CPU 65816 da Cendex, com 256K bytes de memória RAM. O microprocessador 65816 é totalmente compatível com a CPU 6502 que atualmente está sendo usada no Apple II; nestas condições pode-se ter uma máquina controlada por uma CPU de 16 bits que tem a capacidade de executar programas desenvolvidos para a CPU 6502 de 8 bits. Assim os sistemas desenvolvidos para a CPU de 8 bits serão executados por uma de 16 bits sem haver necessidade de reescrever todos os programas.

Do ponto de vista computacional uma das críticas que podem ser feitas a um sistema com estas características refere-se à velocidade de processamento, porque existem várias operações de leitura e gravação em disco; com a configuração mínima de máquina o sistema pode ser considerado lento porque será preciso que o operador troque várias vezes o disquete da unidade de disco. Com seis discos ou mais e 64K bytes de memória tipo RAM, a velocidade será muito maior porque as trocas de disquete serão eliminadas. Além disso a memória principal utilizada para o armazenamento das matrizes será maior porque o módulo de INSTALAÇÃO contém um sistema que permite deslocar os módulos do sistema operacional para o último banco de 16K de memória tipo RAM.

Os sistemas operacionais ficam parte armazenados em disco e par-

te em memória RAM; nos microcomputadores ocupam cerca de 12K bytes des-
sa memória. Portanto nas configurações com 48K bytes ficam disponí-
veis para o usuário 36K bytes e, na configuração com 64K bytes o usua-
rio irá dispor de 52K bytes se tiver um programa que desloque a parte
do sistema operacional que fica em memória para os 16K adicionais. O-
riginalmente o DOS 3.3 é carregado em 48K bytes mesmo que fisicamente
exista 64K bytes na máquina.

A variável "tempo de processamento" não inviabiliza a compra de
um microcomputador para ser usado em um escritório de projetos de es-
truturas. O custo do equipamento e a possibilidade de eliminação de u-
so de "bureaux" que cobram preços relativamente altos pela hora de
processamento e com pouca disponibilidade de controle, viabilizam o
uso de uma máquina baseada no Apple II e até maior.

Na versão atual o número de elementos existentes na banda supe-
rior da matriz de rigidez limitam o número de nós que podem ser pro-
cessados.

As máquinas "baseadas" no Apple II armazenam números reais em 5
bytes com a precisão de 9 dígitos. Em um microcomputador com 64K by-
tes de memória tipo RAM, ficam disponíveis para o usuário 46592 bytes.
Considerando que o módulo MRIG ocupa 5K bytes de memória pode-se dedu-
zir uma expressão que permite calcular o número máximo de nós que o
sistema pode processar:

$$nf \leq 8318$$

onde:

n é o número de nós da estrutura .

f é a largura da banda da matriz de rigidez da estrutura.

Para largura da banda, por exemplo, igual a 40 é possível proces-
sar estruturas com até 200 nós.

EXEMPLOS

Exemplo 1

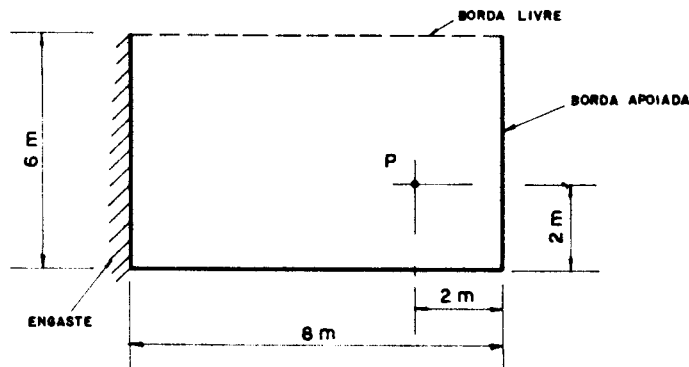


Fig. 10 — Placa a ser resolvida

Calcular a placa da Fig. 10, onde atua, sobre toda a superfície, uma carga uniformemente distribuída de intensidade 1 tf/m^2 e uma carga concentrada aplicada no ponto P, de 4 tf . Dados:

$$E = 1,8 \times 10^6 \text{ tf/m}^2 \quad \nu = 0,2 \quad h = 18 \text{ cm}$$

Na Fig. 11 está montada a grelha equivalente à estrutura da Fig. 10 e a respectiva numeração de barras e nós.

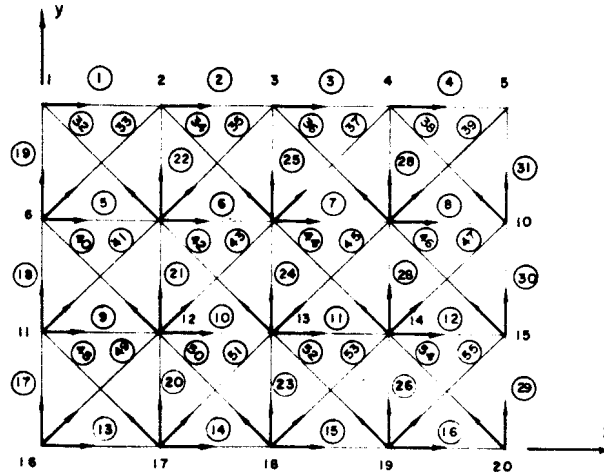


Fig 11 — Grelha equivalente

Esse problema foi resolvido utilizando-se o STRUDL; foi escolhido o elemento BPR (Bending Plate Rectangle). Na Tabela I estão os resultados obtidos, com os dois sistemas, nos pontos 14 (carga concentrada) e 3 (nó no meio da borda livre).

TABELA I

	STRUDL		TEORIA DE EQUIVALÊNCIA		DIFERENÇA (Z)	
	Nó 14	Nó 3	Nó 14	Nó 3	Nó 14	Nó 3
Desloc. Z	-0,01108	-0,02348	-0,01129	- 0,02391	1,89	1,83
M_x	+3,124	+4,368	+3,219	4,484	3,04	2,65
M_y	+2,304	+0,321	+2,354	0,328	2,17	2,18
M_{xy}	-1,127	+0,389	-1,157	0,400	2,66	2,82

Exemplo 2

Calcular a viga parede da Fig. 12, desprezando a influência do peso próprio. Dados:

$$E = 2 \times 10^6 \quad \text{espessura} = 15 \text{ cm} \quad \nu = 0,2$$

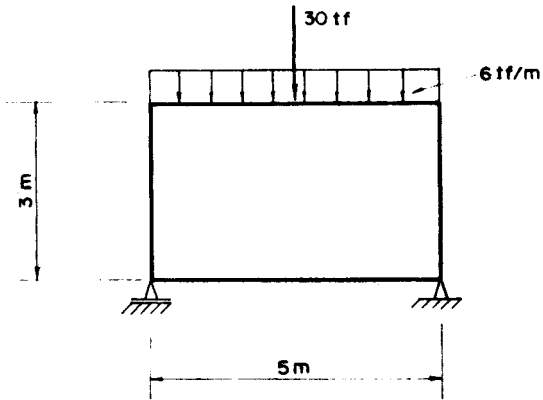


Fig. 12 — Viga parede a ser analisada

A viga parede apresenta simetria de forma e de carregamento, razão pela qual foi resolvida pela metade, diminuindo conseqüentemente o tempo de processamento. A Fig. 13 mostra o modelo de pórtico equivalente adotado.

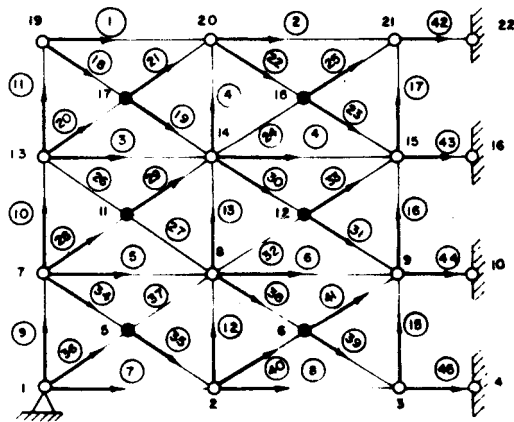


Fig. 13 — Pórtico equivalente

Esse problema foi resolvido utilizando-se o STRUDL; foi escolhido o elemento PSR (Plane Stress Rectangle). Na Tabela II estão os resultados obtidos, com os dois sistemas, para os elementos 2 e 6.

TABELA II

	STRU DL		TEORIA DE EQUIVALÊNCIA		DIFERENÇA (%)	
	ELEM. 2	ELEM. 6	ELEM. 2	ELEM. 6	ELEM. 2	ELEM. 6
σ_{xx}	22,16	- 87,24	23,23	- 87,08	4,82	0,18
σ_{yy}	2,11	-117,51	2,187	-121,4	3,64	3,3
τ_{xy}	-13,34	- 58,75	-13,42	- 57,33	0,6	2,4

REFERÊNCIAS

- [1] - Herennikoff, A. - "Solution of Problems of Elasticity by the Framework Method". Journal Appl. Mech. 8, Dez., 1941, pp. 169-175.
- [2] - Gere, J.W.; Weaver, W.M. - "Analysis of Framed Structures". Princeton, D. van Nostrand Co. Inc., 1965.
- [3] - Warnier, J.D. - "Lógica de Construção de Sistemas". São Paulo, Editora Campus Ltda., 1984
- [4] - Gane, C.; Sarson, T. - "Structured Systems Analysis: Tool and Techniques". New Jersey, Prentice-Hall Inc., 1979.