

VIBRACIONES DE PLACAS CIRCULARES ORTÓTROPAS CON UN SISTEMA MASA-RESORTE ADOSADO EN UNA POSICIÓN ARBITRARIA

Samanta J. Escanes^a, Diana V. Bambill^{a,b}, Daniel H. Felix^a y Carlos A. Rossit^{a,b}

^a *Departamento de Ingeniería, Instituto de Mecánica Aplicada IMA, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, dtoinge@criba.edu.ar, ima@criba.edu.ar, <http://www.uns.edu.ar>*

^b *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina sescanes@uns.edu.ar, dbambil@criba.edu.ar, dhfelix@criba.edu.ar, carossit@criba.edu.ar*

Palabras Clave: placa, circular, vibraciones, masa-resorte, ortotropía, cartesiana.

Resumen: El presente estudio trata sobre el modo fundamental de vibración libre de placas circulares con ortotropía cartesiana, empotradas en su contorno exterior y con masas puntuales adosadas elásticamente. El problema se plantea usando el método de Ritz con aproximaciones polinómicas expresadas en coordenadas cartesianas. Se admite que la masa adosada sufra desplazamientos traslacionales con respecto a la placa, de acuerdo a la restricción que le impone un vínculo elástico. En algunos casos, cuando están disponibles los valores de los coeficientes de frecuencia en la literatura técnico-científica se comparan con los obtenidos en el presente análisis.

1 INTRODUCCIÓN

Existe un gran número de investigaciones que han analizado las vibraciones transversales libres de placas circulares isótropas con masas adosadas rígidamente. Se conoce la solución exacta expresada en términos de funciones de Bessel, para el caso de la masa ubicada en el centro de la placa considerando el contorno libre o empotrado (Leissa, 1969). Para los casos en que la masa se encuentra en posiciones arbitrarias también se dispone de soluciones aproximadas obtenidas mediante métodos como el de Ritz, (Ritz, 1908; Bambill et al., 2002; Maiz et al., 2008), el de elementos finitos (Ranjan y Ghosh, 2006) o experimentalmente (Bambill et al., 2004). También es posible encontrar en la bibliografía análisis de vibraciones de placas circulares isótropas con una masa adosada elásticamente (Avalos et al., 1994; Escanes et al., 2008). Diversos autores han realizado estudios dinámicos de placas circulares con ortotropía pero en la mayoría de estos casos, cuando se considera la existencia de una masa adosada, se la analiza como rígidamente vinculada a la placa (Nallim et al., 1998; Laura et al., 1998).

En el presente trabajo se estudia el comportamiento dinámico-estructural de placas circulares con una masa puntual adosada mediante un vínculo elástico. En particular, se analizan placas circulares constituidas de materiales con características de ortotropía según dos direcciones elásticas ortogonales. La presencia de la masa elásticamente vinculada se supone en una posición arbitraria.

El procedimiento presentado para el cálculo de las frecuencias se basa en el método de Ritz (Lord Rayleigh, 1945; Ritz, 1908) con funciones coordenadas que satisfacen las condiciones de borde de la placa en el contorno.

2 DESCRIPCIÓN DEL MODELO ESTRUCTURAL

El modelo para el análisis consiste en una placa circular con ortotropía cartesiana que posee una masa concentrada elásticamente adosada en una posición arbitraria, tal como puede observarse en el esquema de la Figura 1. Las direcciones elásticas principales se asumen coincidentes con los ejes cartesianos, $1 \equiv x$ y $2 \equiv y$. Se considera, como caso particular de este estudio, la condición de borde empotrado.

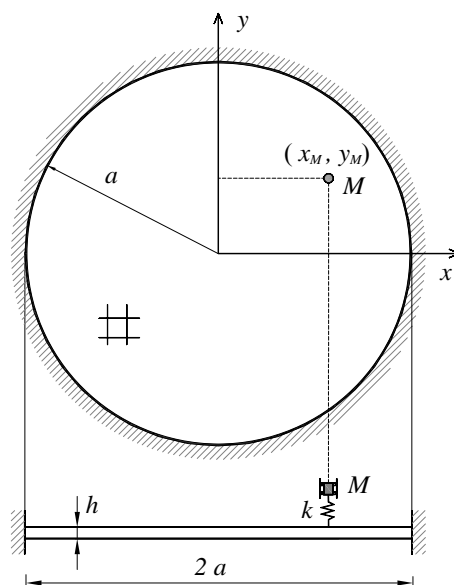


Figura 1: Placa circular con ortotropía cartesiana y con masa puntual elásticamente adosada.

La masa se supone concentrada y actuando en forma puntual, y se vincula a la placa mediante un resorte traslacional que restringe el desplazamiento relativo placa-masa puntual en la dirección perpendicular al plano $x - y$.

3 DESCRIPCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

El problema de una placa vibrante según el modelo propuesto está gobernado por el conocido funcional de energía que se expresa como ecuación (1):

$$\begin{aligned}
 J(W(x, y)) = & \frac{1}{2} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \left[D_1 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + D_2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\
 & \left. + 2 D_1 \nu_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 4 D_k \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy - \\
 & - \frac{1}{2} \omega^2 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \rho h W^2 dx dy - \frac{1}{2} M \omega^2 (W(x_M, y_M) + v)^2 + \frac{1}{2} k v^2
 \end{aligned} \quad (1)$$

donde la función amplitud de los desplazamientos transversales de la placa es indicada tradicionalmente como $W = W(x, y)$, h el espesor de la placa y ρ la densidad del material. En tanto con M se expresa la magnitud de la masa puntual y k es la constante de rigidez del resorte del sistema elástico adosado. Se asume que el resorte posee características lineales. La ubicación de la masa puntual sobre la placa se indica con (x_M, y_M) . Se nombra con v a la amplitud del desplazamiento relativo de la masa puntual con respecto a la placa, en consecuencia con $(W(x_M, y_M) + v)$ se describe la amplitud total del desplazamiento absoluto de la masa puntual, y ω es la frecuencia natural circular de vibración del sistema estructural placa-masa de la [Figura 1](#).

El material ortótropo queda definido con sus constantes elásticas $E_1, E_2, \nu_1, \nu_2, G_{12}$ ([Lekhnitskii, 1968](#)). E_1 y E_2 son los módulos de Young en las direcciones principales de elasticidad, ν_1 y ν_2 son los coeficientes de Poisson correspondientes que cumplen con la relación espejo característica de los materiales ortótropos $E_1 \nu_2 = E_2 \nu_1$, y finalmente con G_{12} se define al módulo de elasticidad transversal del material.

Las rigideces flexionales y la torsional de la placa en las direcciones elásticas de ortotropía tienen las conocidas expresiones:

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_1 \nu_2)}; \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_1 \nu_2)}; \quad D_k = \frac{G_{12} h^3}{12} \quad (2)$$

Para la aplicación del método de Ritz se propone una aproximación generada como la sumatoria de funciones coordenadas en las variables x e y ([Nallim et al., 1998](#)) que se indica a continuación:

$$W(x, y) \cong W_a(x, y) = \left[\left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{a} \right)^2 - 1 \right]^2 \left[C_1 + C_2 \left(\frac{x}{a} \right)^2 + C_3 \left(\frac{y}{a} \right)^2 + C_4 \left(\frac{x}{a} \right)^4 + C_5 \left(\frac{y}{a} \right)^4 + C_6 \left(\frac{x}{a} \right)^6 + C_7 \left(\frac{y}{a} \right)^6 + C_8 \left(\frac{x}{a} \right)^8 + C_9 \left(\frac{y}{a} \right)^8 \right] \quad (3)$$

donde los C_j , con $j = 1, 2, \dots$, son parámetros indeterminados y a es el radio de la placa.

De acuerdo con el método propuesto, se reemplaza la función aproximante adoptada (3) en el funcional (1). Su minimización respecto de las constantes indeterminadas C_j conduce a un sistema de ecuaciones homogéneo de primer orden en dichos parámetros C_j , de acuerdo a:

$$\frac{\partial J(W_a(x, y))}{\partial C_j} = 0; \quad (4)$$

La solución no trivial del sistema homogéneo de ecuaciones planteado permite obtener una ecuación trascendente en los coeficientes de frecuencia, los cuales se expresan de modo adimensional como $\Omega_i = \omega_i a^2 \sqrt{\rho h / D_1}$ con $i = 1, 2, \dots$. En particular Ω_1 corresponde a la primera frecuencia natural del sistema estructural analizado.

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta sección se presentan diferentes resultados que surgen de variar los parámetros de configuración del sistema en estudio, tales como: la ubicación en que se adosa el sistema discreto masa-resorte, el valor de la masa concentrada y el tipo de material ortótropo de la placa.

Para cada una de las situaciones elegidas, se considera un rango amplio de valores para la constante de rigidez del resorte del sistema discreto adosado.

A continuación se presentan tablas que contienen los valores de los coeficientes adimensionales de frecuencia fundamental Ω_1 obtenidos por el procedimiento descripto.

Se consideraron dos posiciones para la ubicación de la masa puntual sobre la placa y tres valores diferentes de la masa adosada que se expresan en relación a la masa propia de la placa ($M_p = \pi \rho h a^2$) como $m = M / M_p$. Se adoptaron tres materiales ortótropos distintos para la placa.

En el análisis se definió la relación $K_m = k a^2 / D_1$ como parámetro adimensional de la constante de rigidez del resorte trasnacional.

La Tabla 1 contiene los coeficientes de la frecuencia fundamental de una placa isótropa ($D_2/D_1 = 1$, $D_k/D_1 = 7/20$, $\nu_2 = 0,30$), empotrada en su contorno y con la masa adosada rígidamente en su centro ($x_M = y_M = 0$, $K_m \rightarrow \infty$). Según se puede observar, la concordancia con los valores de las referencias es excelente. La primera fila de la Tabla 1 corresponde a la placa sin masa.

$m = M/M_p$	Ω_1		
	Nallim et al. (1998)	Laura et al. (1998)	Presente Estudio
0,00	10,216	10,215	10,216
0,05	9,026	9,010	9,0255
0,1	8,148	8,109	8,1449
0,2	6,937	6,869	6,9319
0,5	5,112	5,021	5,1047

Tabla 1: Coeficientes de frecuencia fundamental para una placa circular isótropa empotrada y con una masa puntual rigidamente adosada en su centro ($x_M = y_M = 0$).

La Tabla 2 muestra los coeficientes de la frecuencia fundamental de una placa isótropa, empotrada en su contorno y con la masa puntual elásticamente adosada en su centro. Se consideraron diferentes relaciones de rigidez del resorte, definidas por los valores 1, 2, 5, 10, 100 y por último la condición de vinculación rígida ($K_m \rightarrow \infty$). Se introduce en la Tabla 2 una columna, indicada como $\sqrt{K_m/m}$, que representa el coeficiente de frecuencia del sistema de un grado de libertad masa-resorte aislado, a modo de observar la influencia de dicho sistema en la frecuencia fundamental del modelo.

$m = M/M_p$	K_m	$\sqrt{K_m/m}$	Ω_1	
			Escanes et al. (2008)	Presente Trabajo
0,1	1	3,16	1,76619	1,76717
	2	4,47	2,47190	2,47460
	5	7,07	3,78183	3,79140
	10	10,00	5,04050	5,06230
	100	31,62	7,76825	7,80783
	∞	∞	8,11351	8,14494
0,25	1	2,00	1,11721	1,11783
	2	2,83	1,56433	1,56604
	5	4,47	2,40093	2,40710
	10	6,32	3,23366	3,24861
	100	20,00	5,79971	5,86673
	∞	∞	6,42575	6,49354
0,5	1	1,41	0,79003	0,79046
	2	2,00	1,10637	1,10757
	5	3,16	1,69966	1,70403
	10	4,47	2,29577	2,30654
	100	14,14	4,35197	4,41812
	∞	∞	5,02264	5,10467

Tabla 2: Coeficientes de frecuencia para una placa circular isótropa empotrada, con una masa elásticamente adosada en el centro de la misma ($x_M = y_M = 0$).

Los resultados de la Tabla 3 corresponden a los coeficientes de frecuencia fundamental de la placa empotrada con la masa adosada a una distancia del centro igual a la mitad del radio, en la ubicación $x_M = 0,50 a$; $y_M = 0$. Al igual que en la Tabla 2, se muestran las frecuencias

propias de la masa para distintos valores de K_m y se incluye el caso límite $K_m \rightarrow \infty$. Debido a que los coeficientes de frecuencia obtenidos por el método de Ritz son cota superior de la solución exacta, se observa que los valores del presente trabajo resultan más precisos que los de la referencia.

$m = M/M_p$	K_m	$\sqrt{\frac{K_m}{m}}$	Ω_1	
			Escanes et al. (2008)	Presente Trabajo
0,1	1	3,16	1,77977	1,77853
	2	4,47	2,51048	2,50701
	5	7,07	3,93501	3,92174
	10	10,00	5,46365	5,42900
	100	31,62	9,29280	9,24972
	∞		9,51964	9,48985
0,25	1	2,00	1,12568	1,12489
	2	2,83	1,58806	1,58586
	5	4,47	2,49189	2,48343
	10	6,32	3,47620	3,45348
	100	20,00	7,76535	7,61269
	∞		8,69010	8,57450
0,5	1	1,41	0,79584	0,79543
	2	2,00	1,12300	1,12144
	5	3,16	1,76269	1,75670
	10	4,47	2,46187	2,44566
	100	14,14	6,06576	5,87210
	∞		7,67931	7,43726

Tabla 3: Coeficientes de frecuencia para una placa circular isótropa empotrada con una masa elásticamente adosada en ($x_M = 0,50 a$; $y_M = 0$)

Se comprueba al observar los valores obtenidos (Tablas 2 y 3), que los coeficientes de frecuencia fundamental son más afectados por la masa puntual cuando esta se encuentra en el centro de la placa. Esto es debido a la forma del primer modo de vibración transversal de la placa isótropa sin masa adosada.

La Tabla 4 muestra los coeficientes de la frecuencia fundamental de una placa ortótropa con la masa puntual rígidamente adosada en su centro. De la comparación con otros autores se observa que los resultados obtenidos son muy satisfactorios.

$m = M/M_p$	Ω_1		
	Nallim et al. (1998)	Laura et al. (1998)	Presente Trabajo
0,00	9,618	9,624	9,61873
0,05	8,490	8,488	8,48977
0,1	7,656	7,639	7,65410
0,2	6,509	6,471	6,50458
0,5	4,786	4,730	4,77997

Tabla 4: Coeficientes de frecuencia fundamental para una placa circular con ortotropía cartesiana ($D_2/D_1 = D_k/D_1 = 1/2$, $\nu_2 = 0,30$), empotrada y con una masa puntual rígidamente adosada en su centro.

$$(x_M = y_M = 0)$$

La Tabla 5 contiene los coeficientes de la frecuencia fundamental de una placa ortótropa con una masa elásticamente adosada en su centro, las características del material ortótropo considerado son $D_2/D_1 = 1$, $D_k/D_1 = 1/2$, $\nu_2 = 0,30$. Las comparaciones con resultados de la literatura se pueden hacer sólo en el caso de la masa rígidamente adosada a la placa ($K_m \rightarrow \infty$), donde las diferencias con valores precisos obtenidos por Laura (Laura et al, 1998) son inferiores al 0,7 % y apenas inferiores, prácticamente coincidentes, a los de Nallim (Nallim et al, 1998).

Referencia	K_m	Ω_1				
		$m = M/M_p$				
		0	0,05	0,1	0,2	0,50
Presente Trabajo	1		2,50021	1,76833	1,25053	0,79096
	2		3,50093	2,47794	1,75295	1,10895
	5		5,34516	3,8054	2,69837	1,70920
	10		7,00834	5,10352	3,64792	2,31991
	100		9,20075	8,06499	6,54756	4,53215
		10,5923	9,35672	8,44254	7,18323	5,28751
Nallim et al. (1998)	∞	10,592	9,358	8,446	7,189	5,296
Laura et al.(1998)		10,521	9,341	8,407	7,122	5,206

Tabla 5: Coeficientes de frecuencia fundamental para una placa circular con ortotropía cartesiana ($D_2/D_1 = 1$, $D_k/D_1 = 1/2$, $\nu_2 = 0,30$) empotrada, con una masa puntual elásticamente adosada en su centro,

$$(x_M = y_M = 0).$$

Las Tablas 6 y 7 son análogas a la Tabla 5, para otros materiales ortótropos. Nuevamente se puede observar que la concordancia para el caso de la vinculación rígida es excelente.

Referencia	K_m	Ω_1				
		$m = M/M_p$				
		0	0,05	0,1	0,2	0,50
<i>Presente Trabajo</i>	1		2,49473	1,76465	1,24800	0,78938
	2		3,48423	2,46733	1,74582	1,10457
	5		5,26502	3,76156	2,67079	1,67288
	10		6,746	4,97746	3,57428	2,27817
	100		8,37413	7,37383	6,02765	4,20402
		9,61873	8,48977	7,65410	6,50458	4,77997
Nallim et al. (1998)	∞	9,618	8,490	7,656	6,509	4,786
Laura et al.(1998)		9,624	8,488	7,639	6,471	4,730

Tabla 6: Coeficientes de frecuencia fundamental para una placa circular con ortotropía cartesiana ($D_2/D_1 = D_k/D_1 = 1/2$, $\nu_2 = 0,30$) empotrada, con una masa puntual elásticamente adosada en su centro, ($x_M = y_M = 0$).

Referencia	K_m	Ω_1				
		$m = M/M_p$				
		0	0,05	0,1	0,2	0,50
<i>Presente Trabajo</i>	1		2,49204	1,76287	1,24678	0,78863
	2		3,4759	2,46217	1,74239	1,10248
	5		5,22344	3,73993	2,65752	1,68514
	10		6,61276	4,91529	3,53905	2,25860
	100		8,02236	7,08016	5,80746	4,06620
		9,20261	8,12294	7,32434	6,22589	4,57702
Laura et al.(1998)	∞	9,208	8,121	7,309	6,192	4,526

Tabla 7: Comparación de los coeficientes de frecuencia para una placa circular con ortotropía cartesiana ($D_2/D_1 = 1/2$, $D_k/D_1 = 1/3$, $\nu_2 = 1/3$) empotrada, con una masa puntual elásticamente adosada su centro, ($x_M = y_M = 0$).

5 CONCLUSIONES

Todas las tablas muestran la reducción de los valores de la frecuencia fundamental generados por la presencia de una masa adosada, tanto mayor cuanto más grande es la relación m y más flexible es el vínculo K_m . Puede verse que los valores obtenidos del coeficiente fundamental de frecuencia natural guardan muy buena aproximación con casos particulares disponibles en la literatura. Puede verse que la aproximación propuesta funciona adecuadamente para representar la elástica de una placa con ortotropía cartesiana y con una masa puntual adosada.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo fue desarrollado en el Departamento de Ingeniería y auspiciado por la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur y por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) de Argentina.

REFERENCIAS

- Avalos D. R., Larrondo H. A. and Laura P. A. A., Transverse vibrations of a circular plate carrying an elastically mounted mass, *Journal of Sound and Vibrations*, 177(2):251-258, 1994.
- Bambill D. V., Laura P. A. A., Rossit C. A. y Escanes S. J., Frecuencias naturales de vibración de placas circulares con una masa adosada, *Mecánica Computacional*, Vol.XXI:2168-2175, 2002.
- Bambill D. V., La Malfa S., Rossit C. A. y Laura P. A. A., Analytical and experimental investigation on transverse vibrations of solid, circular and annular plates carrying a concentrated mass at an arbitrary position with marine applications, *Ocean Engineering*, 31:127-138, 2004.
- Escanes S. J., Maiz S., González V. Y., Bambill D. V. y Felix D. H, Vibración de una placa circular ortótropa con un sistema masa-resorte adosado en una posición arbitraria, *Mecánica Computacional*, Vol.XXVII: 1943-1956, 2008.
- Laura P. A. A., Vibrations of Orthotropic Plates, *Institute of Applied Mechanics*, 1998.
- Laura P. A. A., Romanelli E., Sonzogni V. e Idelsohn S., Numerical experiments on vibrating circular plates of rectangular orthotropy and carrying a central, concentrated mass, *Journal of Sound and Vibrations*, 221(4):737-749, 1998.
- Leissa A. W., *Vibrations of Plates*, NASA S. P. 160, 1969.
- Lekhnitskii S. G., *Anisotropic Plates*, *Gordon and Breack Science Publishers*, New York, N.Y., 1968.
- Lord Rayleigh, *The Theory of Sound*, Segunda Edición, Vol. 1, Macmillan, London, 1884, Sec. 88 (Re-Edición por Dover, New York), 1945.
- Maiz S., Rossit C. A., Bambill D. V. and Susca A., Transverse vibrations of a clamped elliptical plate carrying a concentrated mass at an arbitrary position, *Journal of Sound and Vibrations*, Aceptado para publicación, 2008.
- Nallim L., Grossi R. O. y Laura P. A. A., Transverse vibrations of circular plates of rectangular orthotropy carrying a central, concentrated mass, *Journal of Sound and Vibrations*, 216(2):337-341, 1998.
- Ranjan V. and Ghosh M. K., Transverse vibration of thin solid and annular circular plate with attached discrete masses, *Journal of Sound and Vibrations*, 292:999-1003, 2006.
- Ritz W., Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik (Un nuevo método para resolver ciertos problemas de variaciones en la física matemática), *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 135:1-61, 1908.