

MODELO DE LEON EN CONTINUOS MICROPOLARES. Predicciones Numéricas

Marcela Nieto¹, Guillermo Etse², Lucas Domínguez¹

¹ *Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías. Universidad Nacional de Santiago del Estero, 4200, Santiago del Estero, Argentina. e-mail: mnieto@unse.edu.ar. Web page: , <http://www.unse.edu.ar>*

² *Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología. Universidad Nacional de Tucumán, 4000, San Miguel de Tucumán, Argentina. e-mail: , getse@herrera.unt.edu.ar. Web page: , <http://www.unt.edu.ar>*

Keywords: Mecánica del Continuo, Plasticidad, Continuos Micropolares.

Abstract. Para predecir la respuesta estructural del hormigón más allá del límite elástico los modelos deben ser capaces de reproducir el comportamiento de respuesta tanto en escenarios de carga triaxial como en condiciones de falla frágil en tracción o la ductilidad que se observa en compresión con alto grado de confinamiento. Buscando cubrir el espectro de respuestas observadas en diferentes historias de carga, se desarrolla el Modelo de Leon propuesto originalmente por Hoek y Brown, que combina los parámetros de fricción de Mohr Coulomb y el de cohesión de Rankine. Este modelo fue extendido posteriormente por Etse y Willam, buscando evitar los quiebres de la traza del tensor desviatorio del modelo original. Esta extensión incorpora además una constante que permite reproducir comportamientos de endurecimiento y ablandamiento en el régimen de pre y pospico.

El modelo desarrollado para los continuos clásicos se enriquece con el aporte de los grados de libertad adicionales propuestos por la teoría Micropolar buscando mejorar la capacidad predictiva y la objetividad de las soluciones alcanzadas.

En este marco teórico se derivan las ecuaciones de la elastoplasticidad a partir de la teoría del flujo de la plasticidad. Se efectúa la discretización del problema de valores de borde extendiendo la aplicación de las funciones de interpolación lineales a los grados de libertad adicionales que son los microgiros de Cosserat. Se pretende estudiar la capacidad regularizadora de los continuos de Cosserat.

Los continuos micropolares presentan interés por su cualidad a partir de que introducen la influencia de los efectos en la vecindad de la zona de deformación localizada resultando una descripción no local del problema.

En anteriores trabajos se ha buscado superar las dificultades de regularización del Modelo Extendido de Leon incorporando las ventajas de los grados de libertad adicionales de Cosserat, para el régimen de ablandamiento. En la presente publicación se incorpora el régimen de endurecimiento del Modelo Extendido de Leon para continuos micropolares y se presentan las predicciones numéricas desarrolladas para calibrar la función de los parámetros del modelo en ese régimen.

Además se implementa el Modelo Extendido de Leon Micropolar en códigos de elementos finitos en ensayos de compresión y tracción simple en estado de deformaciones planas para diferentes valores de la longitud característica de Cosserat, para analizar la dependencia de las mallas usadas con los resultados que se obtienen. Se presenta además el posprocesamiento de las mallas usadas que permite visualizar las diferencias en la localización de la banda de deformaciones.

1 INTRODUCCION

En este trabajo se considera el modelo de Leon, que fue extendido por Etse y Willam, buscando evitar los quiebres de la traza del tensor desviatorio del modelo original. Esta extensión incorpora además una constante que permite reproducir comportamientos de endurecimiento y ablandamiento en el régimen de pre y pospico. El modelo desarrollado para los continuos clásicos se enriquece con el aporte de los grados de libertad adicionales propuestos por la teoría Micropolar de los hermanos Cosserat ([Cosserat, E.y F.1909](#)) buscando mejorar la capacidad predictiva y la objetividad de las soluciones alcanzadas.

2 GENERALIDADES DEL MODELO DE LEON

En este modelo, el criterio de falla considerado es el propuesto por León y extendido luego por Hoek y Brown, combinando los parámetros de fricción de Mohr - Coulomb y de cohesión de Rankine.

Fue originalmente formulado en función de las tensiones principales mayor y menor, como una expresión parabólica de la envolvente de falla de Mohr como

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = F(\sigma_I, \sigma_{III}) = \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{f_c'} \right)^2 + m_0 \left(\frac{\sigma_I}{f_c'} \right) - c_0 = 0 \quad (1)$$

siendo:

c_0 : parámetro de cohesión, m_0 : parámetro de fricción, f_c' : resistencia uniaxial de compresión.

La calibración del parámetro de fricción se efectúa en términos de la resistencia uniaxial de tracción y de compresión, con $\sigma_{III} = 0$ y $\sigma_I = f_t'$ conduce a

$$m_0 = \frac{c \cdot f_c'^2 - f_t'^2}{f_c' \cdot f_t'} \quad (2)$$

Posterior modificaciones de la función de fluencia adoptada llevaron a incorporar la influencia del tercer invariante de tensiones, o el ángulo de Lode, y de una variable adicional que mapea el comportamiento de endurecimiento del material

$$F = f(I_1, J_2, J_3, c, m, q_\alpha) \quad (3)$$

El criterio de falla de Leon expresado en términos de las coordenadas de tensión de Haigh - Westergard, p , ρ y θ toman la forma

$$F(p, \rho, \theta) = \frac{\rho^2}{f_c'^2} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \cos\theta + \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{m}{f_c'} \left(p + \sqrt{\frac{3}{2}} \rho \cos\theta \right) - c = 0 \quad (4)$$

Con

$$p = I_1/3 = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad \rho = \sqrt{2J_2} \quad \cos 3\theta = \frac{\sqrt{27}J_3}{2J_2^{3/2}}$$

Que fuera modificado por Etse y Willam ([Etse, G. y Willam, K., 1993](#)), buscando evitar los quiebres en la traza desviat6rica del modelo. Ellos reemplazaron el radio vector desviat6rico por la coordenada polar $\rho r(\theta)$ con

$$r(\theta) = \frac{4(1-e^2)\cos^2\theta + (2e-1)^2}{2(1-e^2)\cos\theta + (2e-1)\sqrt{4(1-e^2)\cos^2\theta + 5e^2 - 4e}} \quad (5)$$

siendo e la excentricidad, definida como $e = \frac{\rho_t}{\rho_c}$. La coordenada polar $r(\theta)$ define la variaci6n el6ptica del parámetro ρ entre ρ_c y ρ_t , ([Menetrey, P. y Willam, K., 1995](#)) y toma valores entre

$$r(\theta=0) = \frac{1}{e} \qquad r(\theta=\pi/3) = 1$$

Dado que la determinaci6n de θ , requiere del valor del tercer invariante del desviador de tensiones, se ha adoptado la forma de los determinantes:

$$s = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - p & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - p & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - p \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mu = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{bmatrix}$$

de las matrices de tensiones y de momentos tensionales, de manera que el valor de J_3 tiene la forma

$$J_3 = \det(s) + \frac{\det(\mu)}{lc^3} \quad (6)$$

La plasticidad dependiente del tercer invariante provee mayor estabilizaci6n del operador material tangente m1s all1 del punto l6mite, que el formato de plasticidad del segundo invariante ([Willam, K., 2002](#)).

Con las modificaciones realizadas, la superficie de continuidad C^1 que constituye la funci6n de fluencia del Modelo Extendido de Le6n, en el r6gimen de endurecimiento y de ablandamiento, se define por

$$F(p, \rho, \theta, k, c) = \left\{ (1-k) \left(\frac{p}{f'_c} + \frac{\rho r(\theta)}{\sqrt{6} f'_c} \right)^2 + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\rho r(\theta)}{f'_c} \right\}^2 + \frac{k^2 m}{f'_c} \left(p + \frac{\rho r(\theta)}{\sqrt{6}} \right) - k^2 c = 0 \quad (7)$$

La funci6n de fluencia del ELM puede dividirse en tres regiones: un r6gimen inicial el1stico lineal, un comportamiento no lineal de endurecimiento de pre pico y una regi6n de ablandamiento no lineal de post pico

$$F(p, \rho, \theta, k, c) = F(p, \rho, \theta)_{falla} + F(p, \rho, \theta, k)_{hard} + F(p, \rho, \theta, c)_{soft} = 0$$

Con esta funci6n de fluencia propuesta se obtendr1 una respuesta inicial el1stica lineal, seguida de una respuesta de endurecimiento que depende del confinamiento de la estructura

en función de los valores de k y una posterior respuesta de ablandamiento gobernada por la variación de los valores de la cohesión.

La [Figura1](#) y [Figura2](#) muestran las variaciones de la respuesta del Modelo Extendido de Leon en los regímenes de endurecimiento y ablandamiento.

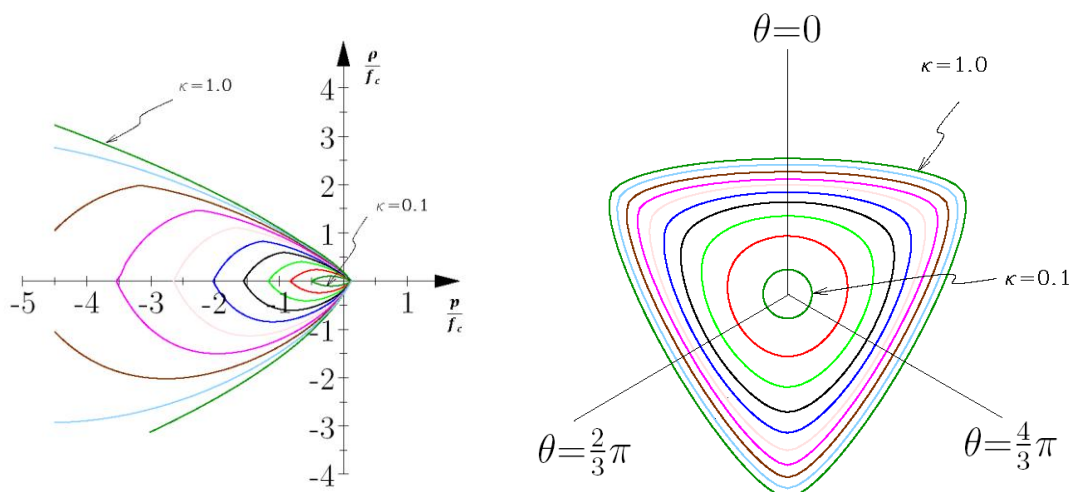


Figura 1.- Modelo Extendido de Leon en plano de Invariantes. Curvas de variación en función de k . Plano de invariantes y plano desviador

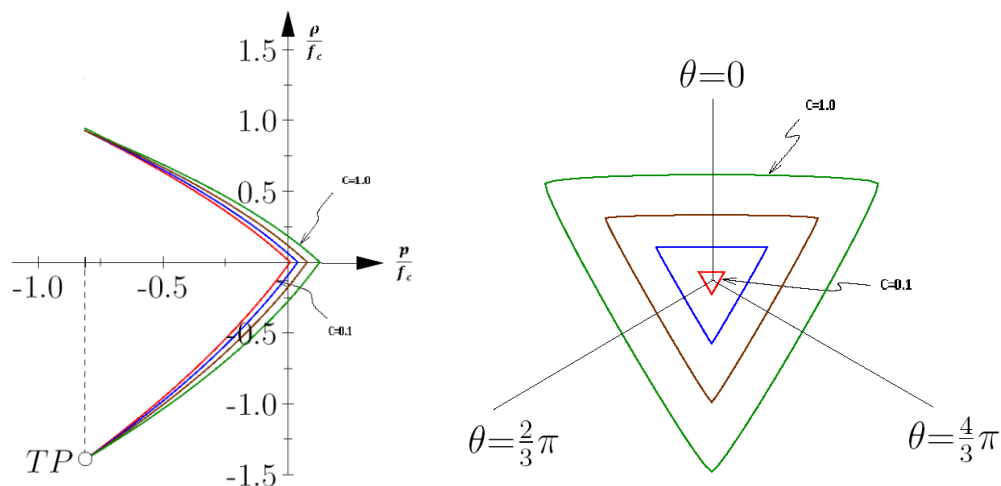


Figura2.- Modelo Extendido de Leon en plano de Invariantes. Curvas de variación en función de la cohesión

Así es que a la respuesta elástica le sigue una superficie plástica inicial que crece isotrópicamente con el incremento de las deformaciones plásticas mientras la cohesión y la fricción permanecen constantes. En el pico, cuando se inicia la fractura del material, se inicia el proceso de ablandamiento en el cual decrece la cohesión mientras se incrementa el valor de la fricción del material.

2.1.- Endurecimiento isotrópico

La constante adicional k varía entre $0 \leq k \leq 1$. Comienza con una posición inicial de la superficie de carga que crece monótonicamente con los incrementos de la deformación

inelástica hasta el valor final $k=1$ cuando se alcanza la envolvente de falla del criterio de Leon.

Esta hipótesis de endurecimiento isotrópico describe el estado actual de deformación del material a través del valor del parámetro x_p que se expresa en función de la variable κ_h como

$$\dot{\kappa} = \frac{1}{x_p} \dot{\xi}_p \quad (8)$$

donde la deformación plástica equivalente es

$$\dot{\xi}_p = \sqrt{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p + l c^2 \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}}_p : \dot{\boldsymbol{\kappa}}_p} \quad (9)$$

Así, la influencia de la presión de confinamiento en la ductilidad del material se tiene en cuenta a través del parámetro x_p que define el valor pico de la deformación plástica total cuando se alcanza la envolvente de falla ([Ortiz, M., 1985](#)). Este parámetro se valora a través de una poligonal cuadrática función de la presión hidrostática

$$x_p = A_h \left(\frac{\sigma}{f_c} \right)^2 + B_h \left(\frac{\sigma}{f_c} \right) + C_h \quad (10)$$

La evolución de la superficie de fluencia en el régimen de prepico se controla con el parámetro de endurecimiento k cuya expresión está dada por la función elíptica

$$k = \kappa_o + (1 - \kappa_o) \sqrt{\kappa_h (2 - \kappa_h)} \quad (11)$$

2.2.- Ablandamiento isotrópico

El ablandamiento del hormigón constituye una manifestación de los drásticos cambios que ocurren en la micro y meso estructura de este material heterogéneo, cuando se propagan microdefectos que devienen en macrodefectos. De modo que el ablandamiento es un fenómeno estructural más que una propiedad material. Siguiendo el concepto de falla difusa, la degradación de la resistencia se describe en términos de la relación de ablandamiento tensión - deformación, la cual no depende de la configuración del ensayo ni de las condiciones de borde. Con el objeto de superar esta inconsistencia entre el fenómeno de degradación física y la formulación de ablandamiento basada en fisura difusa, se han tomado en el presente trabajo, dos aproximaciones diferentes.

La primera tiene como base la identificación de las propiedades de fractura en el régimen de respuesta postcrítica que son independientes de la particular geometría de los ensayos y de sus condiciones de borde, e incorporar estas propiedades en la relación $\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\varepsilon}$. Esto conduce a una formulación de ablandamiento basada en energía de fractura.

La segunda aproximación parte de la incorporación de la teoría no local para suprimir la localización, o sea la bifurcación discontinua a nivel material.

El modo de falla del hormigón depende de su nivel de confinamiento. En régimen de compresión con bajo confinamiento, existe un punto de transición de fractura frágil - dúctil que separa el comportamiento de ablandamiento frágil del régimen de falla dúctil con pequeña o nula pérdida de resistencia ([Etse, G. y Willam, K., 1993](#)).

En el régimen de ablandamiento, esa decir cuando $k = 1$, la superficie de fluencia toma el valor

$$F(\sigma, \rho, \theta) = \frac{3}{2} \left[\frac{\rho \cdot r(\theta)}{f_c'} \right]^2 + \frac{m_0}{f_c'} \cdot \left[\sigma + \frac{\rho \cdot r(\theta)}{\sqrt{6}} \right] - c = 0 \quad (12)$$

Cuando $c \rightarrow 0$, la tracción uniaxial y la resistencia en compresión se aproximan asintóticamente a cero, lo que equivale a una decohesión isotrópica.

En este estado, la resistencia remanente es debida puramente a la resistencia friccional de las partículas. En el límite, la superficie de carga en el régimen de ablandamiento colapsa en la resistencia residual

$$F(\sigma, \rho, \theta) = \frac{3}{2} \left[\frac{\rho \cdot r(\theta)}{f_c'} \right]^2 + \frac{m_r}{f_c'} \cdot \left[\sigma + \frac{\rho \cdot r(\theta)}{\sqrt{6}} \right] = 0 \quad (13)$$

Aquí, la envolvente de resistencia residual en el plano meridional, pasa a través del origen O y del punto TP de transición de falla frágil - dúctil, donde se une con la envolvente de resistencia original. Entonces, la degradación de la cohesión está conectada con el endurecimiento friccional simultáneo puesto que el punto de transición permanece fijo.

Los estados de ablandamiento describen la degradación de la resistencia de tracción en términos del parámetro de decohesión

$$c_s = \frac{\sigma_t}{f_t} \text{ donde } 0 \leq c_s \leq 1 \quad \text{y } \sigma_t : \text{ resistencia a la tracción}$$

y el endurecimiento asociado al parámetro de fricción se relaciona al valor de la decohesión a través de

$$m_s = m_r - (m_r - m_0)c_s \text{ con } m_0 \leq m_s \leq m_r \quad (14)$$

de modo que

$$m = m_0 \quad \text{para } c = c_0 = 1$$

$$m = m_r \quad \text{para } c = c_r = 0$$

2.3.- Función de Potencial Plástico

Debido al efecto de Poisson, el corrector de tensiones plásticas no es en general coaxial con la dirección del incremento plástico de las deformaciones, cuando se calculan las predicciones de falla de los modelos de plasticidad de los materiales. Solo se verifica en el caso de superficies de fluencia cilíndricas ([Gunther, W., 1958](#)) que el corrector de tensiones plásticas retorna la tensión elástica de prueba normal a la superficie, en la implementación numérica de los modelos. La condición de flujo no asociado es necesaria para llevar el camino de tensiones hacia la superficie de falla en el espacio de tensiones.

La función de potencial seleccionada en el ELM, en los casos de implementación de flujo no asociado que se consideran, de acuerdo a Etse y Willam ([Etse, G. y Willam, K., 1993](#)), está basada en una modificación del parámetro de fricción y tiene la forma

$$Q(p, \rho, \theta, k, c) = \left\{ (1-k) \left(\frac{p}{f'_c} + \frac{\rho \cdot r(\theta)}{\sqrt{6} f'_c} \right)^2 + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\rho \cdot r(\theta)}{f'_c} \right\} + \frac{k^2}{f'_c} \left(m_q + m \cdot \frac{\rho \cdot r(\theta)}{\sqrt{6}} \right) - k^2 c = 0 \quad (15)$$

similar a la función de fluencia excepto por el parámetro m_q que se define en términos de su gradiente como

$$\frac{\partial m_q}{\partial p} = D \exp E x^2 + F \quad \text{Donde } x = \frac{-p + f'_t/3}{f'_c} \quad (16)$$

Los parámetros materiales D , E y F son calibrados a partir de tres diferentes ensayos midiendo valores de dilatación en tracción sin confinamiento y compresión con niveles de bajo y alto confinamiento.

2.4.- Ley de ablandamiento isotrópico.- Formulación basada en energía de fractura.

Para formular un modelo constitutivo generalizado en tracción es necesario realizar un proceso de mapeado en el cual una propiedad material localizada, se distribuye en un continuo que es capaz de reproducir la respuesta de ablandamiento del elemento localizado. La formulación de ablandamiento se basa en la homogeneización de la zona de falla localizada en una región finita, siguiendo el modelo de Fractura Compuesta propuesto por Willam, y otros ([Willam, K., Bicanic, N., Pramono, E. y Sture, S., 1986](#)). En tracción esto corresponde a proponer un modelo de fractura donde la propagación de la fractura por tracción en un volumen elemental se describe como un proceso de ablandamiento plástico equivalente en el cual se mantiene el valor de la energía de fractura ([Etse, G., 1992](#)), ([Etse, G. y Willam, K., 1993](#)), ([Willam, K. y Etse, G., 1990](#)), ([Bazant, Z. and Oh, B., 1988](#)).

2.4.1.- Modo de Fractura I

La energía en el Modo I de fractura es la energía relacionada con una fisura abierta con un cierto desplazamiento μ_f con el valor σ de tensión aplicada se puede calcular

$$G_f^I = \int_0^\infty \sigma \cdot d\mu_f \quad (17)$$

Con el concepto de homogeneización de falla difusa, y considerando el valor

$$d\mu_f = h_t \cdot d\varepsilon_f \quad (18)$$

El decaimiento del parámetro de decohesión se calcula con la expresión

$$c = \frac{\sigma_t}{f'_t} = 1 \cdot \exp \left[-5 \frac{u_f}{u_r} \right] = \exp \left[-5 \frac{d\varepsilon_f \cdot h_t}{u_r} \right] \quad (19)$$

2.4.2.- Modo de Fractura II

El modelo de Willam y otros ([Willam, K, Bicanic, N., Pramono, E. y Sture, S.,1986](#)) puede extenderse al Modo II de falla, efectuándose una generalización de los resultados anteriores, a través de un proceso de homogeneización similar. Se puede observar que en condiciones de bajo confinamiento, se forma una banda de corte inclinada, que puede ser tratada con las mismas consideraciones usadas en el Modo I .

$$G_f^{II} = \int_0^{\infty} \rho_c \cdot du_{f,c} \quad (20)$$

donde $u_{f,c}$ corresponde al desplazamiento de rotura para tensión residual nula en el Modo II de fractura. Considerando la relación de la energía de fractura por corte con aquella del continuo equivalente plástico

$$du_{f,c} = d\varepsilon_{f,c} \cdot h_c \quad (21)$$

La expresión de la decohesión para este Modo

$$c = \frac{\rho_c}{\rho_c} = 1 \cdot \exp\left[-5 \frac{u_{f,c}}{u_r}\right] = \exp\left[-5 \frac{d\varepsilon_{f,c} \cdot h_c}{u_r}\right] \quad (22)$$

La relación de las energías de fractura correspondientes a los modos descritos puede calcularse de la forma:

$$\frac{G_f^{II}}{G_f^I} = A_f R(x)^4 + B_f R(x)^2 + 1 \quad (23)$$

La tasa de endurecimiento puede calcularse con la relación de las energías desarrolladas en ambos modos con la expresión

$$\dot{k}_f = \frac{G_f^{II}}{G_f^I} h_t \cdot \dot{\xi}_f = \frac{1}{x_f} \dot{\xi}_f \quad (24)$$

2.4.3.- Formulación de Energía de Fractura. Modo de Fractura Rotacional

Dado que los continuos micropolares presentan grados de libertad adicionales, la formulación de Energía de Fractura debe también contemplarlos. Una forma de fractura adicional se produce como consecuencia de los giros o microcurvaturas que se desarrollan en el continuo enriquecido ([Nieto, M.,1998](#))

. Se tiene un Modo de Fractura Rotacional, que se agrega a los dos modos de fractura descriptos anteriormente.

La decohesión del continuo por la fractura del mismo producida por microgiro se define como

$$c = \frac{u}{u_{\max}} = e^{-5(\omega_f / \omega_{\max})^*(Ap/lc^2)} \quad (25)$$

En procesos de ablandamiento combinado se tendrá el valor de la decohesión dado por la expresión

$$c = \exp \left[-5 \left(\frac{d\varepsilon_f \cdot h}{u_r} + \frac{d\kappa_{fis} \cdot lc}{\omega_{max}} \right) \right] \quad (26)$$

que combina el Modo Rotacional de fractura con el Modo I o II.

Por otra parte, la energía de fractura desarrollada para la generación de la fisura por giro en la probeta se obtiene de la relación integral entre la cupla tensional y el giro dado por el microgiro ω_{fis} en el caso del continuo micropolar equivalente. Tanto la cupla tensional aplicada para producir la fisura como el giro producido en la probeta son constantes, entonces, la relación integral entre estas variable permanece constante y también la energía de fractura por giro en este sólido equivalente.

Es decir, este modelo de deformación plástica basada en energía de fractura mantiene las propiedades fundamentales de la teoría de mecánica de fracturas pero utilizando en la equivalencia un sólido micropolar de Cosserat en lugar del sólido de Boltzmann utilizado en la formulación clásica de este modelo enunciada por Willam.

3.-IMPLEMENTACION NUMERICA Y ANALISIS DE PROBLEMAS DE VALORES DE BORDE

En este capítulo se presentan los algoritmos de las formulaciones elastoplásticas desarrollados en los capítulos previos.

Se calibran las funciones de endurecimiento y ablandamiento del Modelo Extendido de Leon Micropolar.

Se presentan las predicciones numéricas del Modelo y se efectúa el análisis de la capacidad regularizadora de los continuos micropolares.

La implementación numérica tiene un rol muy importante en el desarrollo y la aplicación de los modelos constitutivos. La formulación de esta implementación se centra solo en la plasticidad incremental donde las variables de estado internas son función solo del incremento de las deformaciones plásticas ([Etse, G., 1992](#)) ([Jeremic, B., 1994](#)), ([VanMier,J., 1984](#)), ([VanGeel, H., 1995](#)).

En el análisis de Elementos Finitos ([Argyris, J. y Mlejnek, H., 1988](#)), ([Bathe, K.J., 1986](#)), ([Zienkiewics, O. y Taylor, R., 1994](#)) , ([Hughes, T., 1987](#)) usando elementos isoparamétricos, las ecuaciones constitutivas se integran en puntos de Gauss. En cada paso incrementos de deformación son dados o conocidos y las incógnitas son las tensiones resultantes y el valor de las variables plásticas.

3.1.- Implementación Numérica

Un algoritmo para la integración de las ecuaciones constitutivas es el Método de Retorno de Euler. Teniendo en cuenta las relaciones de la plasticidad incremental, la variación de las deformaciones y de las microcurvaturas está dada por

$$\Delta \varepsilon_p = \varepsilon_p^{n+1} - \varepsilon_p^n = \int_n^{n+\Delta t} \dot{\lambda} \mathbf{v}_u dt \quad (27)$$

$$\Delta \kappa_p = \kappa_p^{n+1} - \kappa_p^n = \int_n^{n+\Delta t} \dot{\lambda} \mathbf{v}_\omega dt \quad (28)$$

El incremento de las tensiones y momentos tensionales de obtiene por las integrales

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \int_{\Delta t} \dot{\boldsymbol{\sigma}} dt = \int_n^{n+\Delta t} \mathbf{E}_0^{uu} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dt - \int_n^{n+\Delta t} \mathbf{E}_0^{uu} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p dt = \mathbf{E}_0^{uu} \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\lambda \mathbf{E}_0^{uu} : \mathbf{v}_u \quad (29)$$

$$\Delta\boldsymbol{\mu} = \int_{\Delta t} \dot{\boldsymbol{\mu}} dt = \int_n^{n+\Delta t} \mathbf{E}_0^{\omega\omega} : \dot{\boldsymbol{\kappa}} dt - \int_n^{n+\Delta t} \mathbf{E}_0^{\omega\omega} : \dot{\boldsymbol{\kappa}}_p dt = \mathbf{E}_0^{\omega\omega} \Delta\boldsymbol{\kappa} - \Delta\lambda \mathbf{E}_0^{\omega\omega} : \mathbf{v}_\omega \quad (30)$$

de modo que en el paso $n+1$ se proyecta un valor de tensión elástica de prueba con valor ([Desai, C. y Siriwardane, J., 1984](#)), ([de Borst, R. y Mühlhaus, H., 1992](#)), ([Gunther, W., 1958](#)).

$$\boldsymbol{\sigma}_e^{n+1} = \boldsymbol{\sigma}^n + \mathbf{E}_0^{uu} \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (31)$$

$$\boldsymbol{\mu}_e^{n+1} = \boldsymbol{\mu}^n + \mathbf{E}_0^{\omega\omega} \Delta\boldsymbol{\kappa} \quad (32)$$

que se corrige luego descontando el valor del corrector plástico, de modo que

$$\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_e^{n+1} - \Delta\lambda \mathbf{E}_0^{uu} : \mathbf{v}_u \quad (33)$$

$$\boldsymbol{\mu}^{n+1} = \boldsymbol{\mu}_e^{n+1} - \Delta\lambda \mathbf{E}_0^{\omega\omega} : \mathbf{v}_\omega \quad (34)$$

La [figura 3](#) muestra el esquema Predictor - Corrector de la Proyección de Punto Cerrado.

Para obtener el valor de las variables de estado se utiliza el algoritmo de iteración de Newton. Con este, el valor de $\Delta\lambda$ en el punto j para el paso $n+1$ en la iteración $i+1$ tiene la forma

$$[{}^{n+1} \Delta\lambda^{i+1}]_j = [{}^{n+1} \Delta\lambda^i]_j - \left[\frac{F({}^{n+1} \Delta\lambda^i)}{{}^{n+1} g^i} \right]_j \quad (35)$$

con

$$g = \frac{\partial F(\Delta\lambda)}{\partial \Delta\lambda} = n_\sigma : \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \lambda} + n_\mu : \frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \lambda} + \left(\frac{\partial F}{\partial c} + \frac{\partial F}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial c} \right) \frac{\partial c}{\partial \lambda} \quad (36)$$

Las iteraciones se interrumpen cuando se verifica la tolerancia dada por

$$\left[\frac{\|{}^{n+1} \Delta\lambda^{i+1} - {}^{n+1} \Delta\lambda^i\|}{\|{}^{n+1} \Delta\lambda^{i+1}\|} \right]_j < tol \quad (37)$$

Introduciendo estas expresiones en las ec. (33) y (34) y teniendo en cuenta los valores dados por las ec. (31) y (32), la expresión de las tensiones y momentos tensionales en el punto $n+1$ para la iteración $i+1$ se expresa como

$$[{}^{n+1} \boldsymbol{\sigma}^{i+1}]_j = {}^n \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{E}_0^{uu} : {}^{n+1} \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - [({}^{n+1} \Delta\lambda^{i+1}) \mathbf{E}_0^{uu} : {}^{n+1} \mathbf{v}_u]_j \quad (38)$$

$$[{}^{n+1} \boldsymbol{\mu}^{i+1}]_j = {}^n \boldsymbol{\mu} + \mathbf{E}_0^{\omega\omega} : {}^{n+1} \Delta\boldsymbol{\kappa} - [({}^{n+1} \Delta\lambda^{i+1}) \mathbf{E}_0^{\omega\omega} : {}^{n+1} \mathbf{v}_\omega]_j \quad (39)$$

La condición de consistencia se verifica cuando se cumple

$${}^{n+1}\Delta F = 0 \tag{40}$$

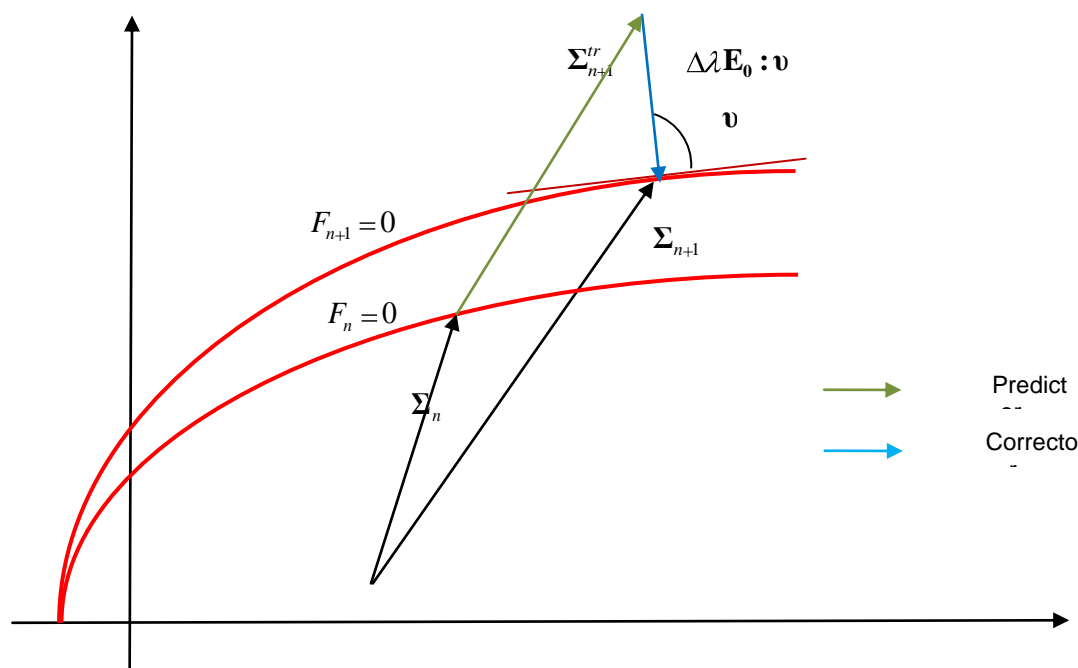


Figura 3.- Esquema Predictor - Corrector

La forma diferencial de esta condición de consistencia es

$$\begin{aligned} dF|_{t_{n+1}} &= \left[\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\mu}} : d\boldsymbol{\mu} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} : d\mathbf{q} \right]_{t_{n+1}} = \\ &= \left[\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\mu}} : d\boldsymbol{\mu} - \mathbf{E}_p : d\lambda \right]_{t_{n+1}} = 0 \end{aligned} \tag{41}$$

Si se utiliza el Método de iterativo de Newton - Raphson a nivel de equilibrio global, el uso del tensor elastoplástico tangente destruye la tasa cuadrática de convergencia del esquema iterativo. A los fines de preservar esta tasa de convergencia se deriva un Tensor de Rigidez Tangente Consistente, incorporando un término en las ecuaciones (38) a (39) que corresponde a las derivadas de la dirección normal de la función de potencial y que se evalúan en el paso final de iteración, en el punto final de tensiones sobre la superficie de fluencia. Haciendo uso de este tensor de rigidez, se alcanza la fluencia con una tasa de convergencia cuadrática, con las iteraciones del Método de Newton - Raphson. Los incrementos diferenciales de tensiones y de momentos tensionales se expresan como

$$d\boldsymbol{\sigma}|_{t_{n+1}} = \mathbf{E}_0^{uu} : \left[d\boldsymbol{\varepsilon} - d\lambda \mathbf{v}_u - \Delta\lambda \frac{\partial \mathbf{v}_u}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} \right]_{t_{n+1}} \tag{42}$$

$$d\boldsymbol{\mu}|_{t_{n+1}} = \mathbf{E}_0^{\omega\omega} : \left[d\boldsymbol{\kappa} - d\lambda \mathbf{v}_\omega - \Delta\lambda \frac{\partial \mathbf{v}_\omega}{\partial \boldsymbol{\mu}} : d\boldsymbol{\mu} \right]_{t_{n+1}} \quad (43)$$

Estas ecuaciones (42) y (43) pueden expresarse agrupando términos

$$d\boldsymbol{\sigma}|_{t_{n+1}} = [(\mathbf{E}_0^{uu})^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial \mathbf{v}_u}{\partial \boldsymbol{\sigma}}]^{-1} : (d\boldsymbol{\varepsilon} - d\lambda \mathbf{v}_u)_{t_{n+1}} \quad (44)$$

$$d\boldsymbol{\mu}|_{t_{n+1}} = [(\mathbf{E}_0^{\omega\omega})^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial \mathbf{v}_\omega}{\partial \boldsymbol{\mu}}]^{-1} : (d\boldsymbol{\kappa} - d\lambda \mathbf{v}_\omega)_{t_{n+1}} \quad (45)$$

Introduciendo las expresiones (44) y (45), las componentes del tensor elástico modificado resultan

$$\mathbf{E}_m^{uu} = \left((\mathbf{E}_0^{uu})^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial \mathbf{v}_u}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^{-1} \quad (46)$$

$$\mathbf{E}_m^{\omega\omega} = \left((\mathbf{E}_0^{\omega\omega})^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial \mathbf{v}_\omega}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right)^{-1} \quad (47)$$

Despejando el valor de $d\lambda$ de la ecuación (41) se obtiene

$$d\lambda = \frac{\nu_u : \mathbf{E}_m^{uu} : d\boldsymbol{\varepsilon} + \nu_\omega : \mathbf{E}_m^{\omega\omega} : d\boldsymbol{\kappa}}{\nu_u : \mathbf{E}_m^{uu} : \nu_u + \nu_\omega : \mathbf{E}_m^{\omega\omega} : \nu_\omega + E_p} \quad (48)$$

Las ecuaciones diferenciales de las tensiones y momentos tensionales son

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}_{ep}^{uu} : d\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{E}_{ep}^{u\omega} : d\boldsymbol{\kappa} \quad (49)$$

$$d\boldsymbol{\mu} = \mathbf{E}_{ep}^{\omega u} : d\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{E}_{ep}^{\omega\omega} : d\boldsymbol{\kappa} \quad (50)$$

3.2- Calibración del Modelo Micropolar

A los fines de analizar varios aspectos del modelo de hormigón propuesto a nivel material y estructural en esta sección se implementan varios ensayos. En primer término se analiza el comportamiento de respuesta de la función de ablandamiento propuesta, comparando los resultados con los obtenidos para los continuos clásicos.

El segundo término se implementa además la función de endurecimiento y los resultados, más generales que los anteriores se comparan con resultados experimentales.

En tercer lugar se implementa el modelo en códigos de elementos finitos para tratar de representar la falla del material en distintos escenarios de carga y analizar los resultados obtenidos y la dependencia de ellos con la forma y tamaño de las mallas de elementos usadas.

Para la implementación numérica del modelo se asume un campo uniforme de propiedades de modo que la respuesta constitutiva del espécimen de hormigón se interpreta como un

experimento numérico a nivel de punto material. Se desarrollan pequeños incrementos de desplazamiento a los fines de minimizar errores.

El espécimen se discretiza en un cuarto de su dimensión debido a las características de doble simetría que presenta el problema.

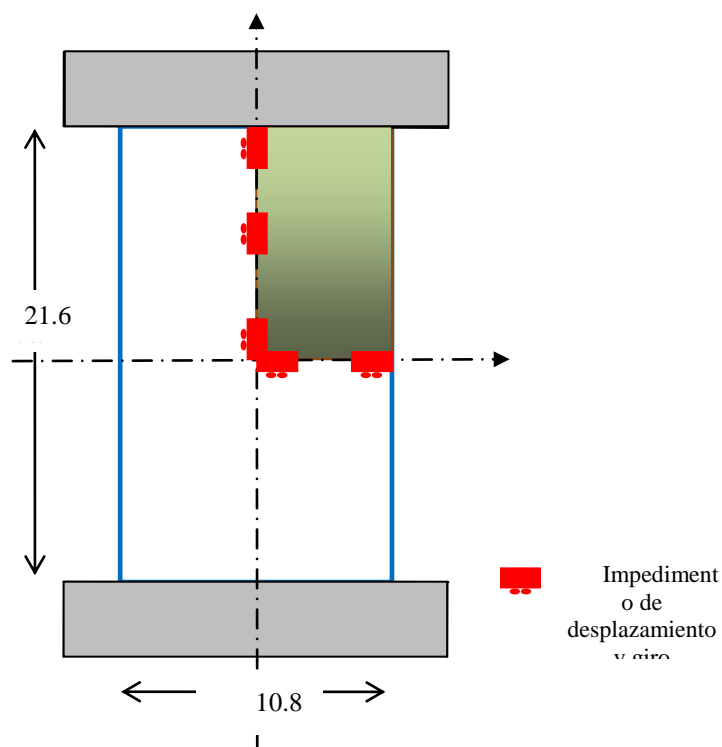


Figura 4. Esquema del ensayo

La implementación se realiza en el estado plano de deformaciones aplicando desplazamientos, implementando la función de ablandamiento desarrollada y considerando el endurecimiento del modelo.

Las condiciones de apoyo las proveen apoyos móviles mas dispositivos que impiden tanto los desplazamientos como los giros de los puntos.

Las dimensiones de la pieza son: altura total de 21.6 cm y base de 10.8 cm.. El espesor se toma de valor unitario.

La [figura 4](#) muestra el esquema del ensayo de tracción y compresión simple y las condiciones de apoyo utilizadas. Dada la simetría del espécimen, la implementación numérica se realiza sobre el cuarto sombreado

El ensayo de tracción se implementa para un valor de la longitud característica igual a la de la altura de la pieza y se compara con la respuesta obtenida con el Modelo extendido de Leon del continuo clásico. Las constantes materiales del hormigón son:

Módulo de Elasticidad Longitudinal: $E= 193.053 \text{ Mpa}$

Coefficiente de Poisson: $n=0.2$

Tensión máxima de compresión: $f_c=22,063 \text{ Mpa}$

Tensión máxima de tracción: $f_t=2,758 \text{ Mpa}$

Apertura de fisura máxima: $0,0127 \text{ cm}$

Separación de fisuras de tracción: $10,795 \text{ cm}$

Longitud característica de Cosserat: de $0,46 \text{ cm}$ a $5,5 \text{ cm}$

Las constantes calibradas para las ec. 5.10, 5.16 y 5.28 [Ets92] son

$$\begin{aligned}
 A_h &= -0.0017 \\
 B_h &= 0.000212 \\
 C_h &= -0.011 \\
 A_f &= 3.209530243 \\
 B_f &= 6.090632805 \\
 D &= 8.675 + 5.115e^{-5*(1-h)} \\
 E &= 14.956 + 6.726e^{-5*(1-h)} \\
 F &= -6.3
 \end{aligned}$$

3.3- Régimen de Endurecimiento - Ablandamiento

En esta sección se presentan las predicciones numéricas desarrolladas para calibrar la función de los parámetros del modelo en el régimen de endurecimiento.

En las figuras siguientes, se comparan los resultados experimentales de Xiaobin Lu ([Lu, X., 2005](#)) con los valores estimados por el modelo. Los ensayos implementados corresponden a compresiones con valores de confinamiento cada vez mayores buscando reproducir el comportamiento de respuesta de hormigones de alta resistencia. Las comparaciones de los resultados del Modelo y los valores experimentales se muestran en la [figura 6](#), [figura 7](#) y [figura 8](#). Se incluye el estado de compresión simple en [figura 5](#).

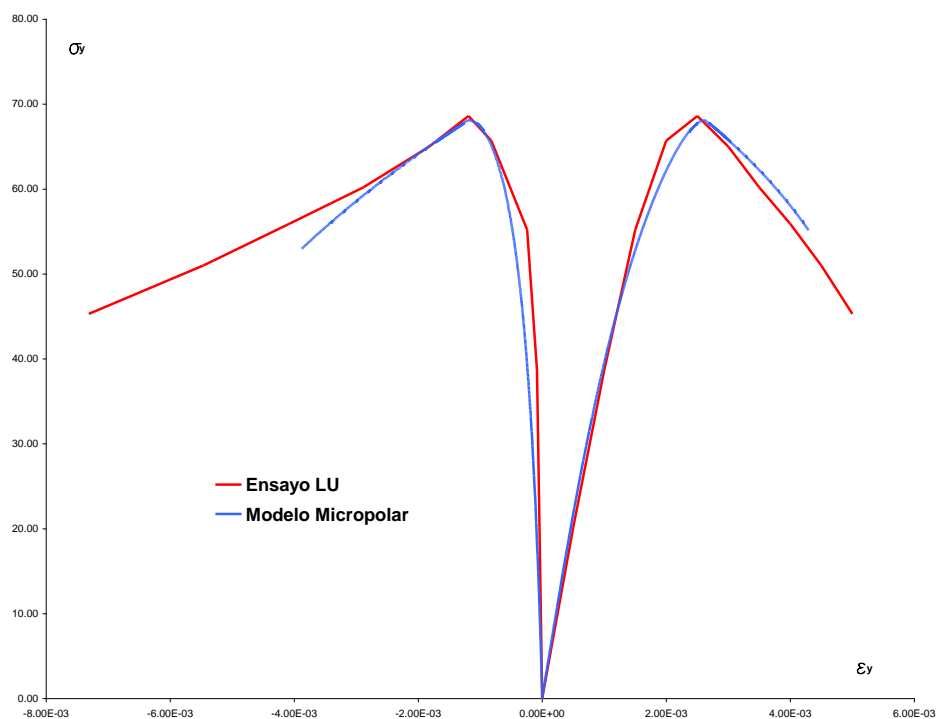


Figura 5.- Compresión Simple. Ensayo de Lu.

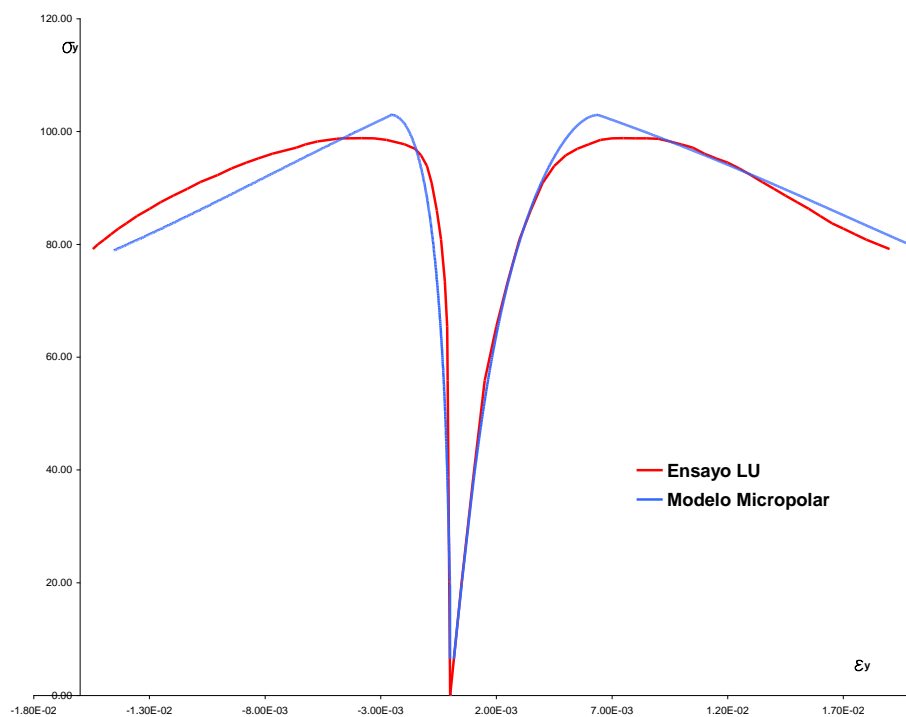


Figura 6.- Compresión Triaxial. $\sigma_x = -68,0MPa$ Ensayo de Lu.

Las presiones de confinamiento usadas van desde 68 MPa a 272 MPa. La modelación del comportamiento de respuesta ofrece resultados próximos a los valores experimentales, como se observa en las figuras..

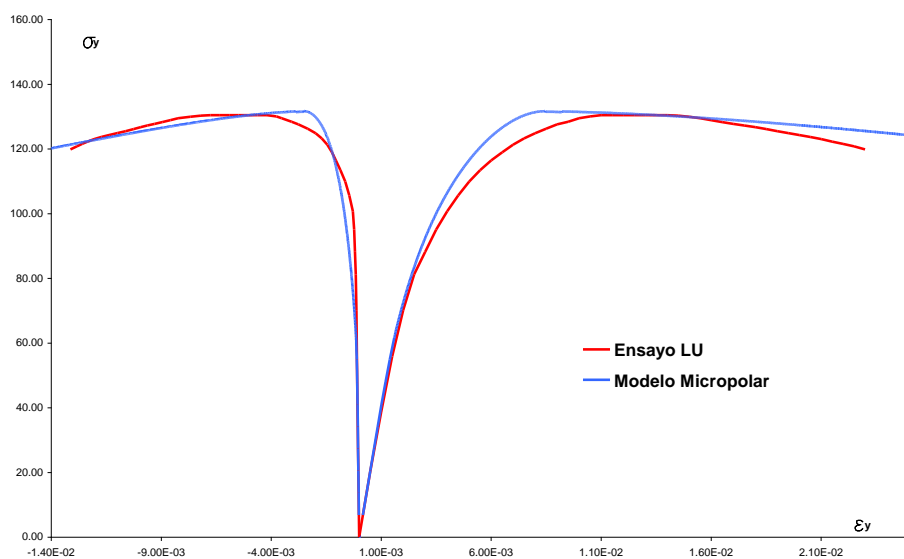


Figura 7.- Compresión Triaxial. $\sigma_x = -136,0MPa$ Ensayo de Lu.

La condición de no asociatividad implementada muestra, al igual que en continuos clásicos, una reducción considerable de la ductilidad de la respuesta que controla el cambio de volumen inelástico del material.

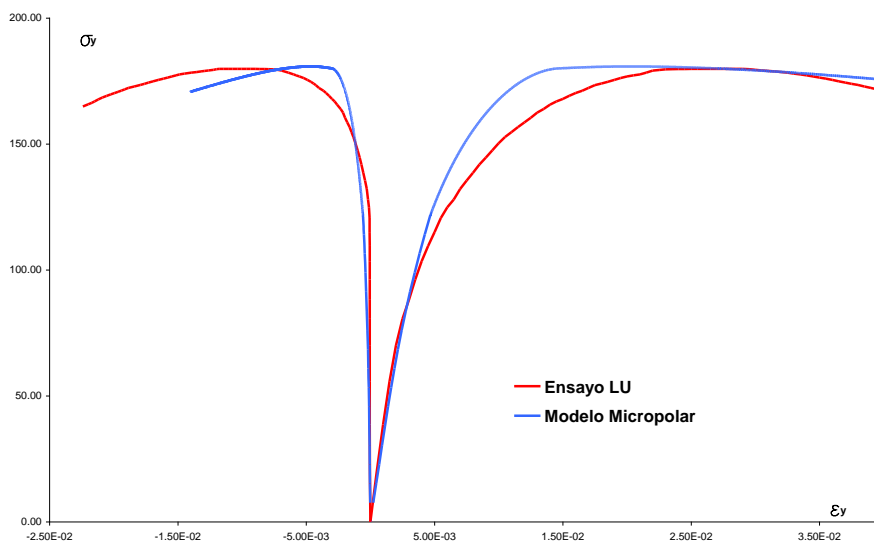


Figura 8.- Compresión Triaxial. $\sigma_x = -272,0MPa$ Ensayo de Lu.

Cambios en el valor de las longitudes características seleccionadas conducen a mayor fragilidad de los resultados de los ensayos debido a la incorporación de un modo de fractura rotacional que abarca los grados de libertad adicionales.

3.4.- Predicciones Numéricas de Elementos Finitos

La localización de las deformaciones juega un papel central en la plasticidad computacional, dado que la formación de discontinuidades trae como consecuencia la pérdida de elipticidad de las ecuaciones de gobierno. Como consecuencia se llega a una alta dependencia de los resultados con el tamaño y la orientación de los elementos de las mallas de elementos finitos usadas.

La formulación de elementos finitos deberá ser capaz de reproducir la singularidad detectada a nivel constitutivo, también a nivel estructural ([Steinmann, P. y Willam, K., 1991](#)).

El Modelo se ha implementado en códigos de Elementos Finitos con elementos cuadrangulares de 4 nodos, tratando de obtener el espécimen deformado con las bandas de deformación localizada que se espera en ensayos de compresión simple. Las mallas se refinan para estudiar como esto influye en los resultados y la visualización de las deformaciones correspondientes. Las mallas deformadas permiten el análisis de la relación entre las predicciones obtenidas y las longitudes características de Cosserat usadas.

A estos fines se han usado mallas de 18 (3x6) elementos, 72 (6x12) elementos y 288 (12x24) elementos, cuadrangulares regulares. Luego se incorporan mallas de 128 (8x16) elementos regulares e irregulares de cuatro nodos que concentran y disminuyen su tamaño coincidentemente con la banda de deformación esperada. Dicha malla se gira luego para que la banda de deformaciones localizada se oriente en sentido inverso a la concentración de elementos.

La condición de inhomogeneidad se introduce por medio de los vínculos. En el borde superior, apoyos fijos instalados en los nodos impiden desplazamientos horizontales de la cara ([Pamin, J., 1994](#)).

3.4.1.- Ensayo de Compresión Simple

Implementado en estado de deformaciones planas, este ensayo ha sido desarrollado para las cinco mallas descritas, con tres valores de longitud característica: una muy pequeña de valor igual al ancho del espécimen dividido 24, es decir 0,45 cm, un valor intermedio de $b/6=1,77$ cm hasta $b/2=5,38$ cm. La malla de 128 elementos se evalúa solo para el valor intermedio de la longitud de Cosserat.

En la [Figura 9](#) se puede ver la variación de la respuesta evaluada con el modelo para las diferentes mallas usadas y diferentes valores de longitud característica.

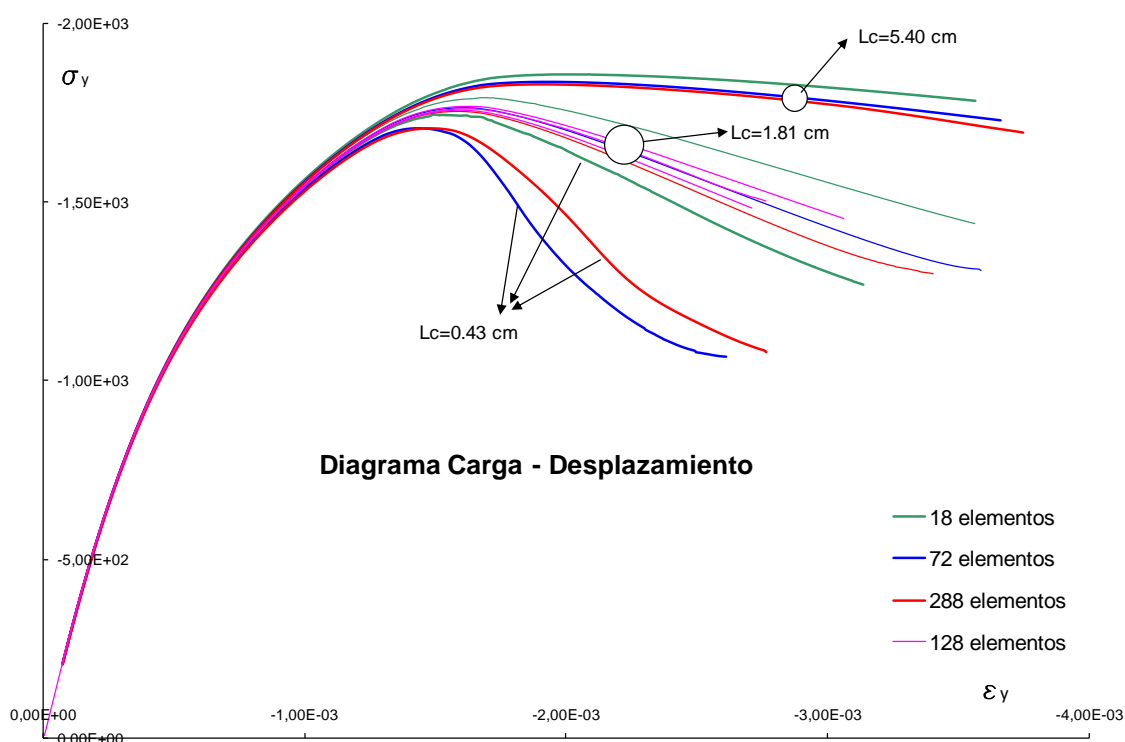


Figura 9.- Comparación de resultados fuerza - desplazamiento. Ensayo de Compresión Simple. Malla cuadrangular de 4 nodos

Con el objeto de mejorar la comparación de resultados, se grafican en la [figura 10](#) los resultados para el menor valor de l_c usado.

Claramente la respuesta alcanzada para valores bajos de longitud de Cosserat, provee curvas similares a las del modelo clásico, con una fuerte variación de los valores conforme se cambia el tamaño de la malla.

El valor de longitud característica de 1,81 cm se implementa en los ensayos de todas las mallas estudiadas.

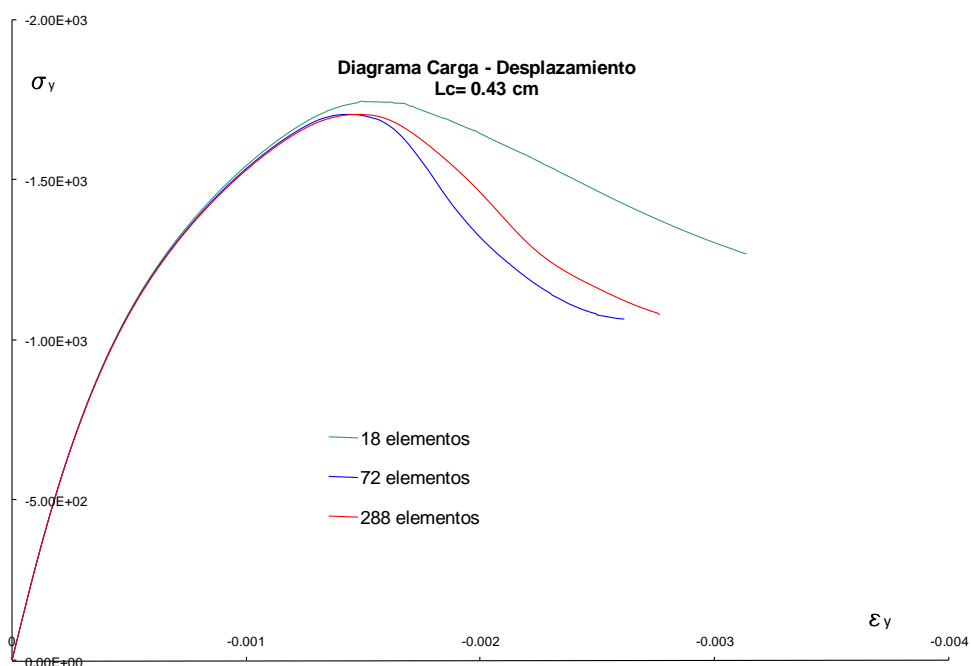


Figura 10.- Comparación de resultados fuerza - desplazamiento. Longitud característica= $b/24=0,43$ cm

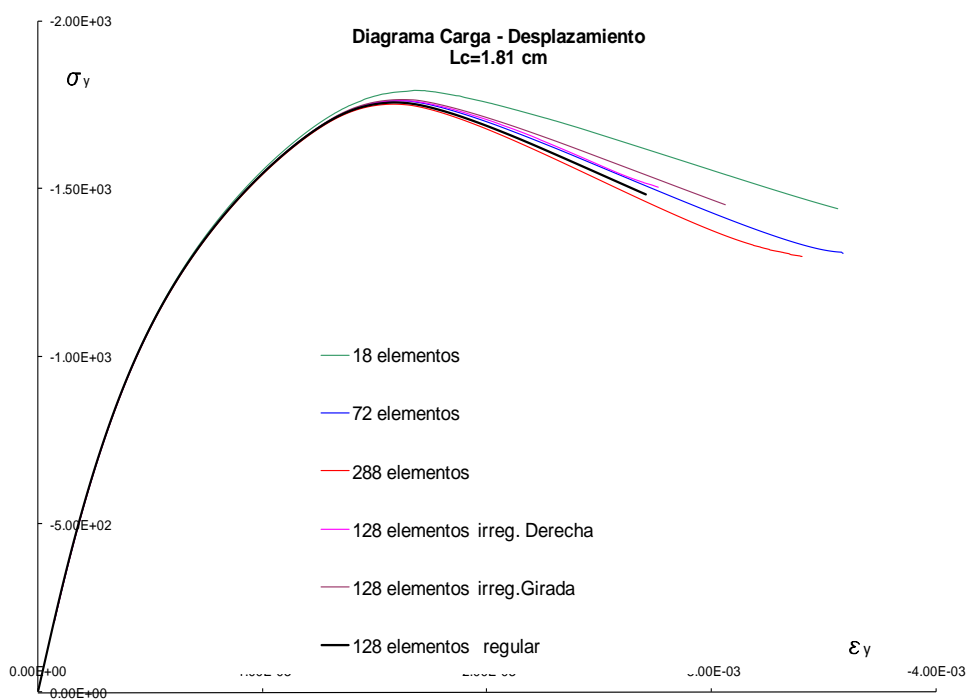


Figura 11.- Comparación de resultados fuerza - desplazamiento. Longitud característica= $b/6=1,81$ cm

En esta [figura 11](#) se puede observar que los resultados son más próximos, siendo la variabilidad detectada muy inferior a la correspondiente a $L_c=0.43$ cm.

Los resultados para la longitud característica mayor se grafica en la [figura 12](#). Las curvas obtenidas son muy próximas entre sí, para este valor de la longitud usada.

En todos los casos que se analizan resulta claro que la respuesta obtenida con la implementación numérica es más dúctil para mallas menos densas.

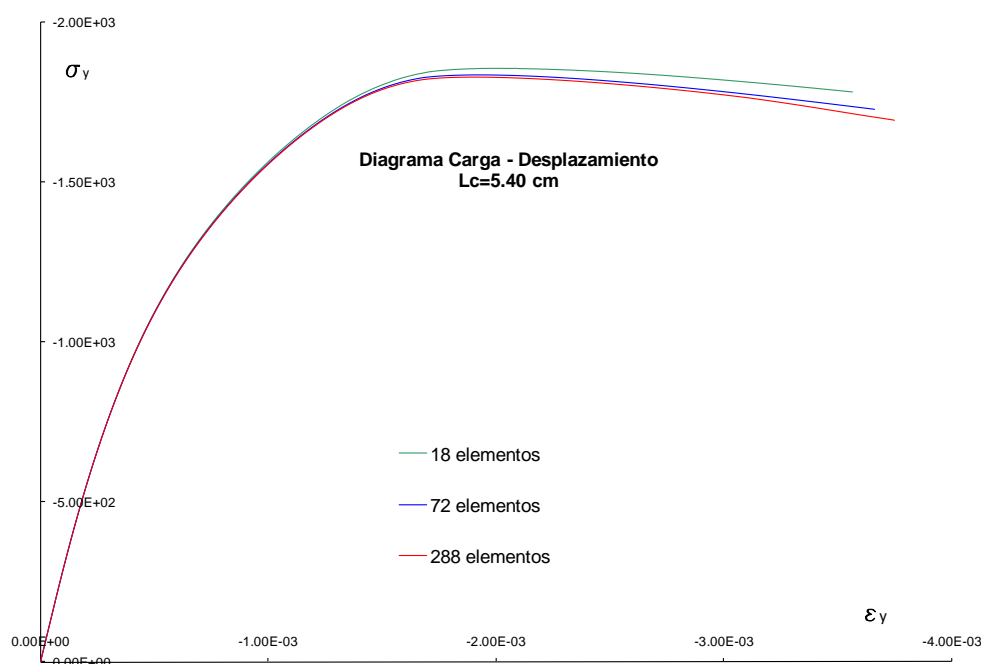


Figura 12.- Comparación de resultados fuerza - desplazamiento. Longitud característica= $b/2=5,40$ cm

Las mallas deformadas de 18 elementos (3x6) para las longitudes características que se indican en la [Figura 13](#), muestran localización de deformaciones muy similares para diferentes valores de L_c .

En lo que sigue se analizan las mallas deformadas correspondientes a la carga residual de los ensayos anteriores.

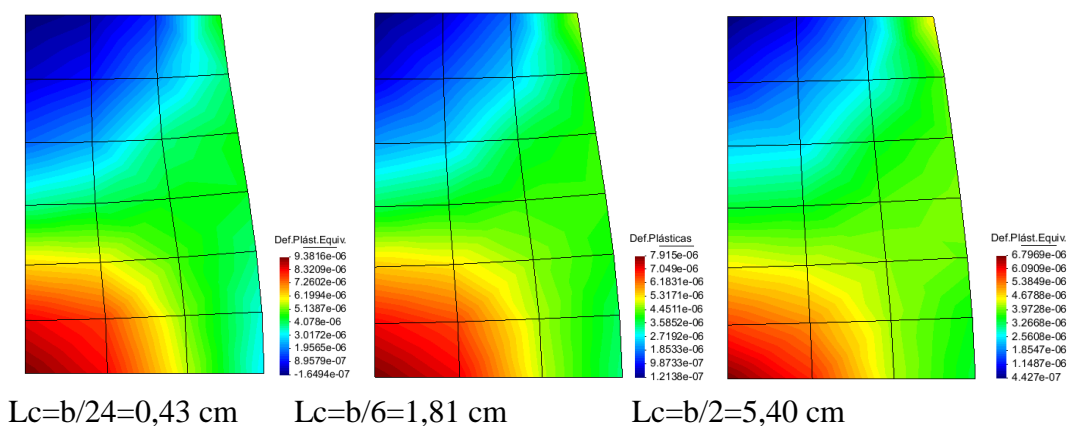


Figura 13.- Malla de 18 elementos 4 nodos. Deformaciones Plásticas Equivalentes

Se puede apreciar que cuando la longitud característica crece, la probeta se deforma de modo más regular. El borde libre (derecho) deformado tiende a formar un arco con curvatura más uniforme.

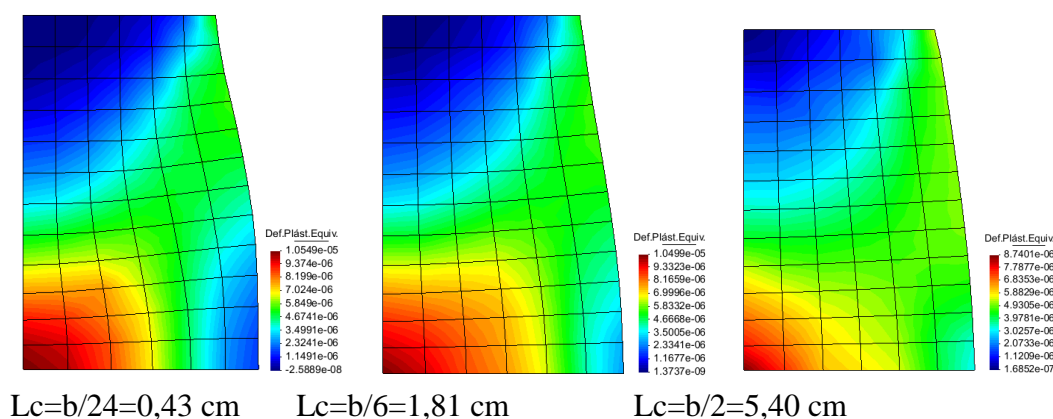


Figura 14.- Malla de 72 elementos. Deformaciones Plásticas Equivalentes

Las mallas de 72 elementos (6x12) de la [Figura 14](#), comienzan a mostrar algunas diferencias en la localización de la banda de deformaciones, la que aparece de menor ancho para menores valores de la longitud característica y se difunde en una zona mayor cuando l_c es igual al ancho de la probeta

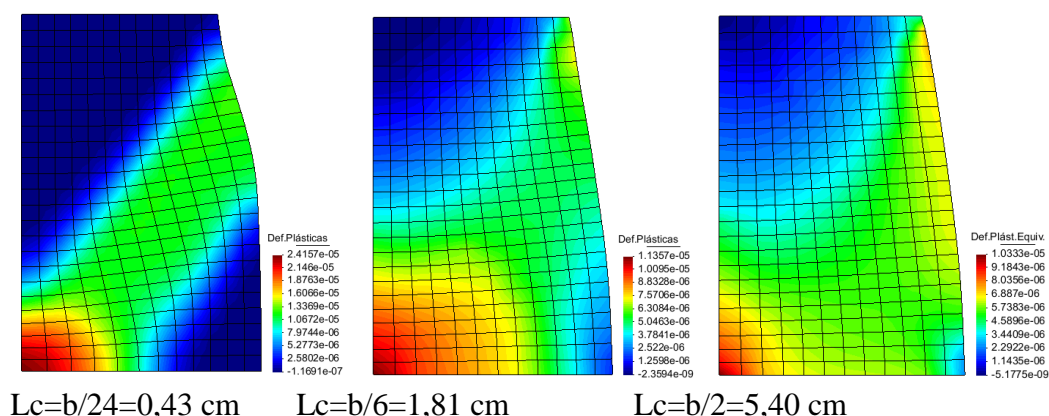


Figura 15.- Malla de 288 elementos. Deformaciones Plásticas Equivalentes

Esta observación es aún más válida para la malla de 288 elementos de la [Figura 15](#). La banda de localización más difusa que se ve cuando aumenta la longitud característica trae como consecuencia una forma más regular del borde libre. La concentración de las deformaciones equivalentes en una banda de corte estrecha se hace más notable cuando aumenta la densidad de los elementos de las mallas.

Las deformaciones de mallas de 128 elementos (8x16) regular e irregulares permiten visualizar la manera en que cambia el dibujo de la banda de corte de acuerdo a como se orienta la densificación de las mallas irregulares.

Se ve cómo se concentran las deformaciones equivalentes en la banda de corte cuando se orienta hacia la discontinuidad, como se muestra en el primer dibujo, como se difunden al girar la malla y alinearse al revés de ella y cuando la misma es regular.

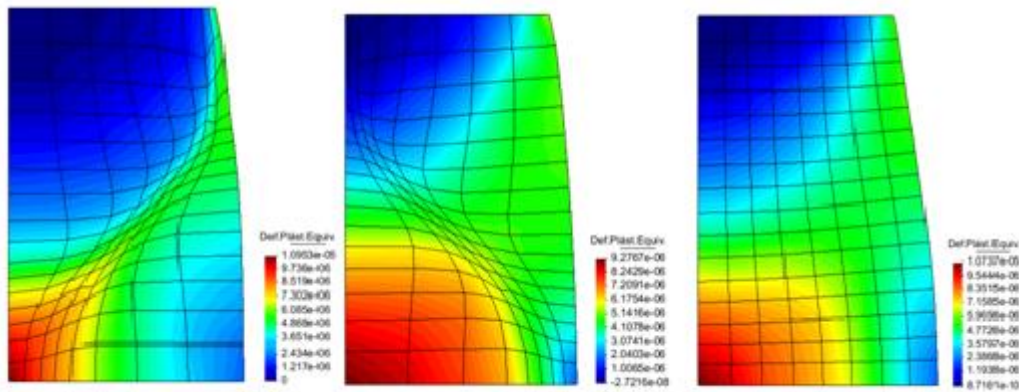


Figura 16.- Malla de 288 elementos. Deformaciones Plásticas Equivalentes

$L_c=1.81$ cm

la malla de 128 elementos (8x16) de la [figura 16](#) irregular muestra como se concentran las deformaciones equivalentes en la banda de corte cuando esta derecha, como se difunden al girar la malla y una distribución en la malla regular.

3.4.2.- Ensayo de Tracción Simple

Para el ensayo de tracción simple en estado de deformaciones planas se han usado las mallas regulares de 18, 72 y 288 elementos y se muestran las mallas deformadas graficándose las deformaciones plásticas equivalentes en el valor de la tensión residual.

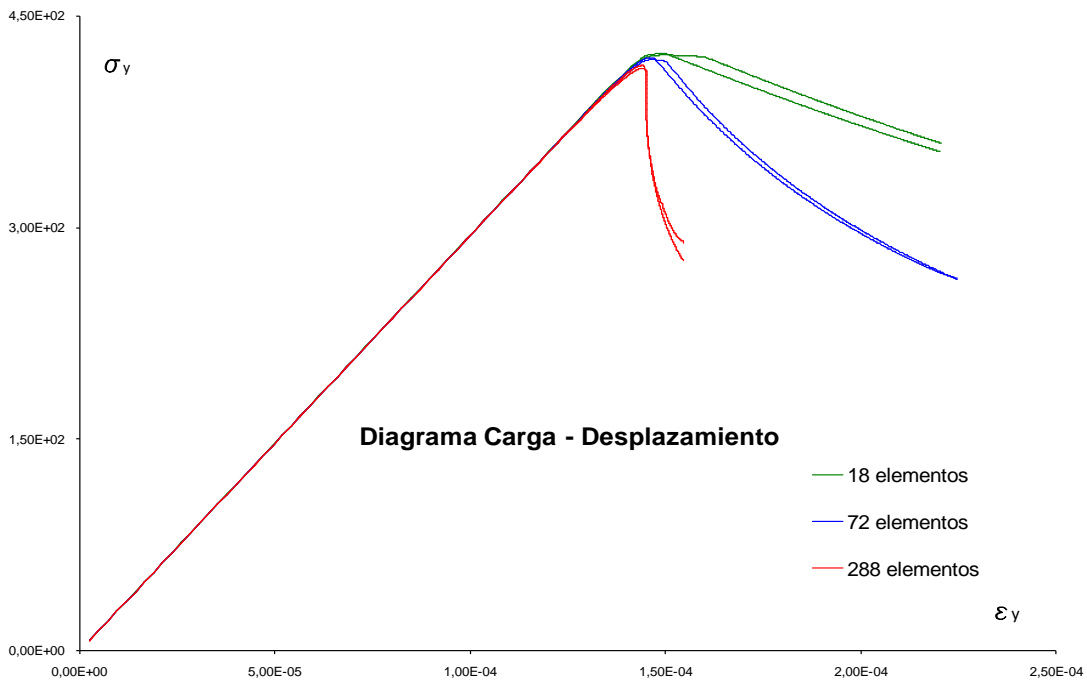


Figura 17.- Comparación de resultados fuerza - desplazamiento. Ensayo de Tracción Simple

La [Fig. 17](#) presenta las relaciones de carga desplazamiento para diferentes valores de longitud característica $L_c=1,81$ cm y $L_c=5,40$ cm

Se observa que los resultados para las diferentes mallas seleccionadas no registran importantes variaciones cuando se cambia el valor de la longitud característica. En este ensayo las microrotaciones de Cosserat no adquieren valores significativos que puedan hacer variar las curvas de relación carga – desplazamiento.

Las gráficas de las mallas deformadas donde se visualizan las deformaciones plásticas equivalentes muestran la concentración de las deformaciones en una banda horizontal que disminuye su ancho a medida que se aumenta la densificación de la malla (ver [figura 18](#), [19](#) y [20](#)).

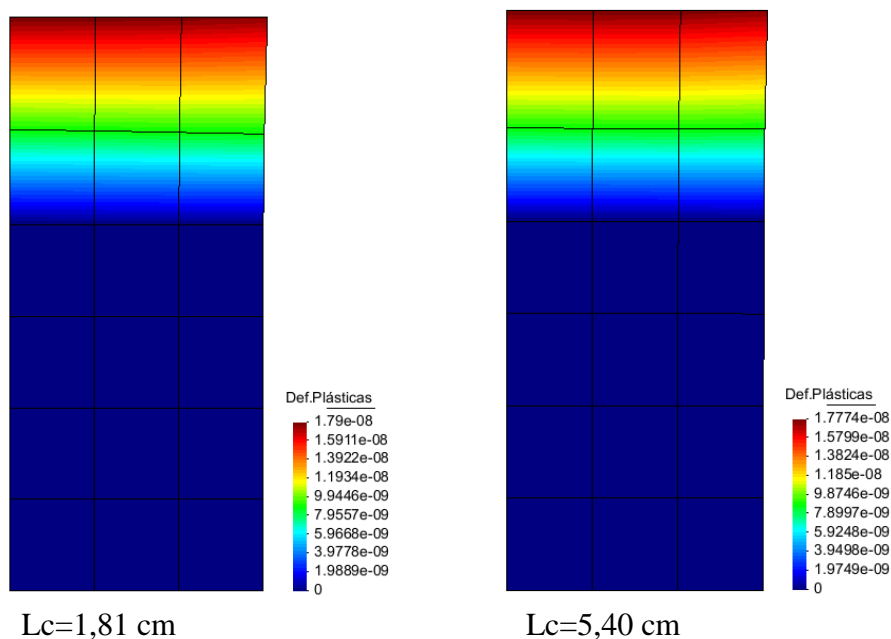


Figura 18.- Malla de 18 elementos. Deformaciones Plásticas Equivalentes

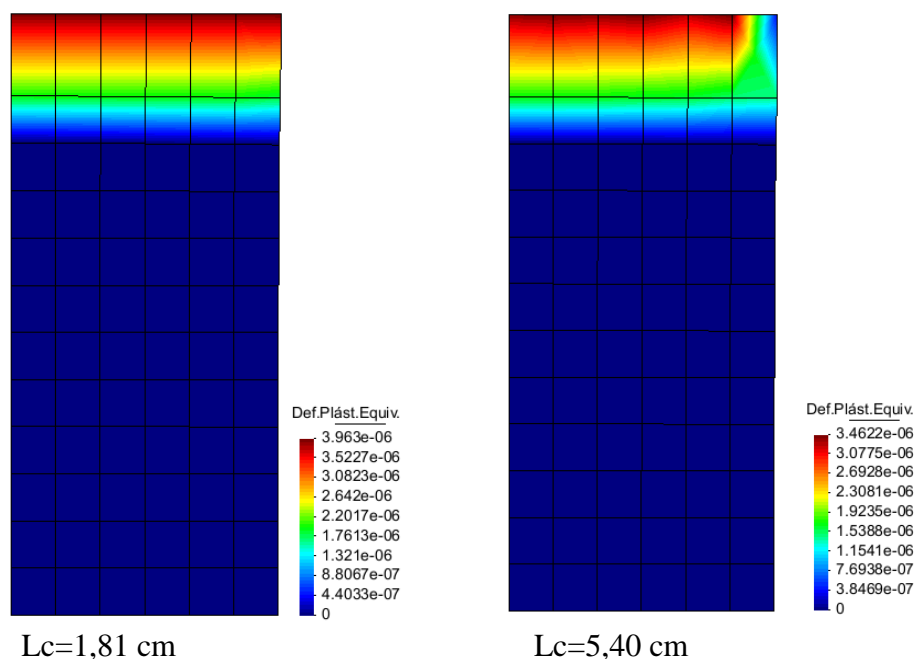


Figura 19.- Malla de 72 elementos. Deformaciones Plásticas Equivalentes

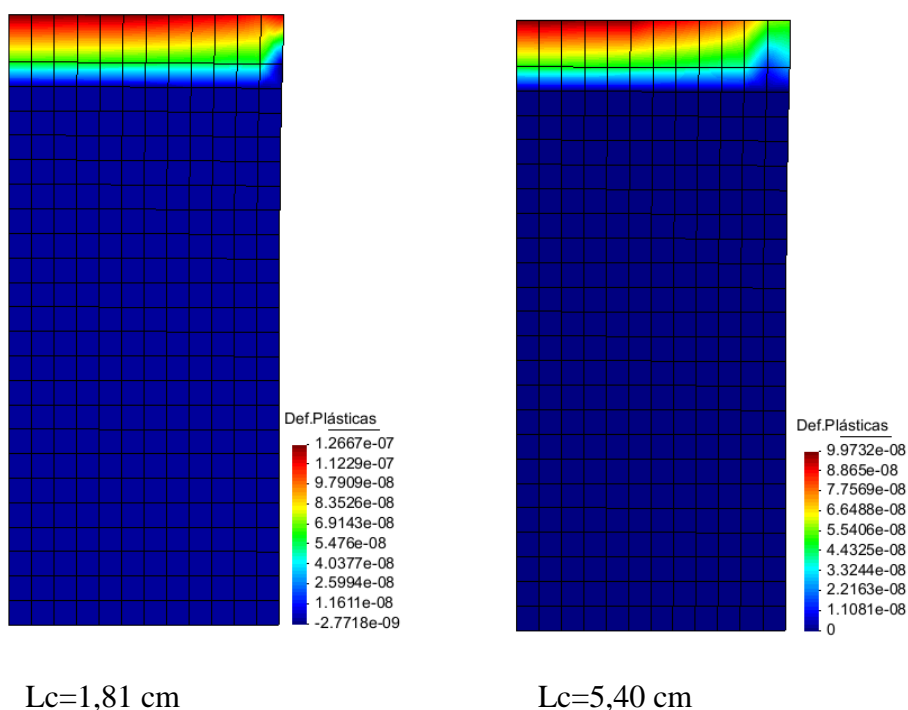


Figura 20.- Malla de 288 elementos. Deformaciones Plásticas Equivalentes

4.- CONCLUSIONES

En la discretización del problema de valores de borde, se extendió la aplicación de las funciones de interpolación lineales a los grados de libertad adicionales que corresponden a los giros micropolares. Los resultados obtenidos muestran que los continuos micropolares de Cosserat brindan objetividad de las soluciones cuando se utilizan valores adecuados de la longitud característica. En este caso las ecuaciones diferenciales de equilibrio no pierden sus características elípticas durante historias de deformaciones cuasiestáticas, obteniéndose modos de falla difusos en lugar de localizados.

Los resultados muestran además que valores bajos de la longitud característica conducen a resultados idénticos a los obtenidos en los continuos elastoplásticos clásicos caracterizados por fuertes dependencias de la densidad de las mallas de elementos finitos.

Cuando la longitud característica se hace mayor, la dispersión de los resultados alcanzados con distintas mallas disminuye notablemente y el material muestra un comportamiento más dúctil.

Mallas más densas conducen a resultados más frágiles en todas las evaluaciones efectuadas en el rango de longitudes estudiadas.

También se puede establecer que las predicciones obtenidas con continuos micropolares y con elementos isoparamétricos lineales son igualmente sensibles a la orientación de los elementos.

REFERENCIAS

- Argyris, J., Mlejnek, H.. *Die Methode der Finiten Elemente*. Tomos I, II. Friedr. Vieweg & Shon, Braunschweig / Wiesbaden. (1988)
- Bathe, K. J..- *Finite Element Procedure in Engineering Analysis*. Prentice Hall Inc. New Jersey (1996).-

- Bazant, Z. and Oh, B.. Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and Structures*, Vol. 16. Pag.155 - 177. (1988).
- Cosserat, E.y F.- *Théorie des Corps Déformable*..París. (1909).-
- de Borst, R. and H. Mühlhaus. Gradient-dependent plasticity: formulation and algorithmic aspects. *Int J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 35(3). Pag.. 521 – 539. (1992).
- Desai, C., Siriwardane, J.- *Constitutive Laws for Engineering Materials*. Prentice Hall. (1984).-
- Etse, G. *Theoretische und Numerische Untersuchung zum Diffusen und Lokalisierten Versagen in Beton*. PhD Thesis. University of Kalsruhe. Alemania. (1992).-
- Etse, G. , Willam, K.- *Fracture Energy Formulation for Inelastic Behavoir of Plain Concrete*. *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 120. Pag. 1983 - 2009. (1993).-
- Gunther, W.- *Zur Statik und Kinematik des Cosserat'schen Kontinums*, Abh. Braunschweig. Wiss.Ges. Pag. 195-213. (1958).-
- Hughes, T. .- *The Finite Element Method*. Prentice Hall International. London.
- Jeremic, B.- *Implicit Integration Rules in Plasticity: Theory and Implementation*. PhD. Thesis of the University of Colorado. (1994).-
- Lu, X. *Uniaxial and triaxial behavior of high strength concrete with and without steel.bers*. PhD thesis, New Jersey Institute of Technology. .(2005)
- Menetrey, P. and Willam, K. Triaxial failure criterion for concrete and its generalization. *ACI-SJ*, Vol. 92(3). Pag. 311 - 318. (1995).
- Nieto, M. *Teoría Elastoplástica Micropolar de Cosserat para Materiales Cohesivo Friccionales*. Tesis de Magister en Ingeniería Estructural. Universidad Nacional deTucumán. Argentina. (1998)
- Ortiz, M. . A constitutive theory for the inelastic behavior of concrete. *Mechanics of Materials*, Vol. 4. Pag. 67 - 93. (1985).
- Pamin, J.. Gradient-dependent plasticity in numerical simulation of localization phenomena. PhD thesis, TU Delft, The Netherlands. (1994).
- Steinmann, P y Willam, K. Localization within the framework of micropolar elastoplasticity. In V. Mannl et al., editor, *Advances in continuum mechanics*, Berlin, Springer Verlag. Pag. 296_313. (1991)
- Van Geel, H. Behavior of concrete in plane strain compression. Technical Report BKO95.19, TH Eindhoven, Eindhoven, The Netherlands. (1995)
- Van Mier, J.. Strain Softening of Concrete under Multiaxial Loading Conditions. PhD thesis, TH Eindhoven, Eindhoven, The Netherlands. (1984).
- Willam, K., Bicanic, N., Pramono, E., Sture, S.. *Composite Fracture Model for Strain Softening Computations of Concrete*. *Fracture Mechanics of Concrete- Fundamentals and Applications*. De Wittmann. Vol I. Pag. 221 - 235. (1986).-
- Willam, K., Etse G.- *Failure Assessment of the Extended Leon Model for Plain Concrete*. *SCI - C Conf.Proceed.*, Eds N.Bicanic & H.Mang. Pineridge Press. Vol. II. Pag. 851 - 870. (1990).-
- Willam, K.,. *Encyclopedia of physical Science & Technology*. Accademic Press. Vol.3. Pag. 603 – 633. (2002).
- Zienkiewics, O. y Taylor, R.- *El método de los Elementos Finitos*. Ed. Mc Graw Hill. España. (1994).-