

DAÑO EN COMPUESTOS LAMINADOS REFORZADOS CON FIBRAS

Fermín E. Otero-Gruera^a y Bibiana M. Luccioni^b

^aFundación YPF, Instituto de Estructuras, Universidad Nacional de Tucumán, Av. Roca 1800, 4000
San Miguel de Tucumán, Argentina, ferminotero25@hotmail.com

^bCONICET, Instituto de Estructuras, Universidad Nacional de Tucumán, Av. Roca 1800,
4000 San Miguel de Tucumán, Tucumán, Argentina, bluccioni@herrera.unt.edu.ar

Palabras Clave: Compuesto, daño, deslizamiento, modelo constitutivo.

Resumen. Durante los últimos años, los materiales compuestos han reemplazado progresivamente a los materiales tradicionales en una amplia variedad de aplicaciones. El adecuado diseño de elementos estructurales elaborados con este tipo de materiales requiere la utilización de modelos constitutivos capaces de estimar su rigidez, resistencia y distintos modos de falla.

En este trabajo se presenta la extensión de un modelo general para compuestos laminados reforzados con fibras unidireccionales ya existente, para incluir daño de las componentes y distintos modos de falla que incluyen despegue de las componentes como el deslizamiento de fibras.

El modelo se obtiene de la generalización de la teoría de mezclas clásicas, teniendo en cuenta la participación en la deformación y tensión de cada una de las componentes en las direcciones principales de simetría. Cada una de las componentes puede tener un modelo constitutivo elastoplástico anisótropo general con daño. El modelo desarrollado incluye, además, la posibilidad de deslizamiento relativo entre componentes del compuesto, ya sea entre fibra-matriz (debonding) o entre laminas (delaminación).

El deslizamiento relativo entre componentes se modela mediante una ley cohesiva friccional que se incorpora en la ecuación constitutiva de las componentes. Se considera que dicho deslizamiento es un fenómeno inelástico que se resuelve en forma acoplada con los otros fenómenos inelásticos (daño y plasticidad) que se desarrollan en la componente misma.

En el trabajo se describe la implementación numérica del modelo en un programa de elementos finitos no lineal 3D con el cual se realizaron distintos ejemplos de aplicación. El trabajo se completa con la comparación de los resultados numéricos con resultados experimentales presentados por diferentes autores.

1 INTRODUCCIÓN

En la actualidad, los materiales compuestos han sustituido a los materiales convencionales en incontables aplicaciones: En particular, los compuestos laminados reforzados con fibras se utilizan en aplicaciones estructurales, por lo tanto, resulta fundamental conocer sus propiedades, comportamiento y modos de falla.

Cuando un material compuesto reforzado con fibras es sometido a carga, comienza el agrietamiento o apertura de fisuras perpendiculares a la dirección de la carga, en la matriz. Cuando una grieta aguda entra en contacto con una fibra perpendicular a esta, la concentración de esfuerzos en el borde de la fisura tiende a causar la rotura de la interfaz y de la fibra (figura 1).

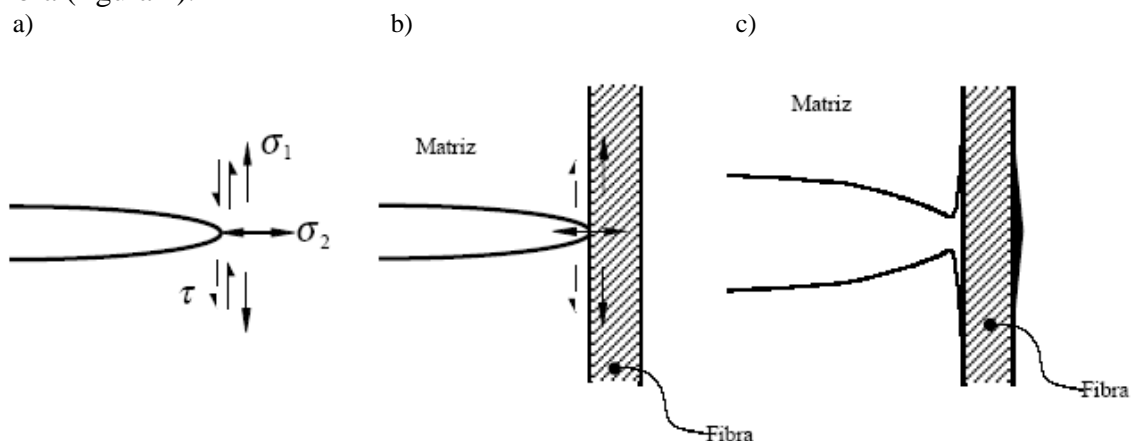


Figura 1: Proceso de agrietamiento y despegue de fibras. a) tensiones en la cabeza de una fisura, b) transferencia de tensiones a la interfaz fibra-matriz, c) despegue de fibra.

La transferencia de tensiones entre matriz y fibra se realiza a través de la interfaz que existe entre ellas. En la figura 2 se observa una fibra dentro de una matriz orientada en la dirección de la carga, la matriz y la fibra experimentan diferentes deformaciones a tracción debido a la diferencia entre los módulos elásticos, esto es cada vez mayor cuanto más cerca se está del extremo de la fibra. Esta diferencia de deformación produce un esfuerzo cortante paralelo a la fibra en la interfaz y si este esfuerzo supera la resistencia al corte de la misma, se produce el despegue de la fibra y, por ende, el deslizamiento relativo entre matriz y fibra.

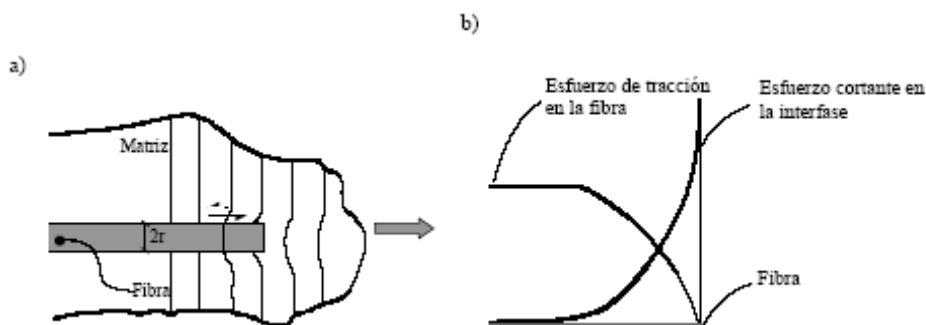


Figura 2: Mecanismo de transferencia de esfuerzos para una fibra cortada.

La modelación precisa de estos mecanismos de falla en materiales compuestos reforzados con fibras es todavía un tema de mucha actualidad en investigación ya que no se han logrado proponer modelos que reproduzcan eficientemente los distintos fenómenos físicos que tienen lugar y que, a la vez, puedan ser utilizados en análisis estructural con un costo computacional

razonable.

Los modelos constitutivos utilizados para describir los materiales compuestos pueden ser clasificados según la escala en que son definidos (Chaboche et al., 1998). En los macro-modelos se representa al compuesto con un único material con propiedades unificadas. En los meso-modelos se considera al compuesto formado por láminas unidireccionales con sus respectivas ecuaciones constitutivas y, a partir de ellas, se obtienen las propiedades del compuesto. En los micro-modelos se utilizan las ecuaciones constitutivas de los elementos constituyentes: matrices, fibras, interfaz fibra-matriz, etc. Se lleva cuenta de lo que ocurre en cada componente y se obtienen las propiedades del compuesto utilizando algún tipo de homogeneización. También existen modelos denominados multi-escala. A diferencia de los modelos de homogeneización, los modelos multi-escala se pueden definir como modelos constitutivos en los que el comportamiento global del compuesto se determina simultáneamente a lo largo de todo el análisis, en base al comportamiento de los materiales constituyentes y sus interacciones. Esto resulta considerablemente conveniente para simular la evolución de la microestructura con el crecimiento de fisuras, ya que la evolución de la microestructura depende de la historia de carga en la mayoría de los problemas prácticos. Recientes desarrollos buscan obtener modelos capaces de vincular micro-modelos con meso-modelos para considerar, de esta forma, varios modos de falla (Ladeveze et al., 2006).

La teoría de mezclas es un método simple para analizar el comportamiento de un material compuesto a partir de las ecuaciones constitutivas de sus componentes. Sin embargo, la hipótesis de compatibilidad de deformaciones utilizada limita su aplicación a materiales que trabajan en paralelo (igual deformación de todas las componentes) y no permite considerar ciertos fenómenos, por ejemplo, el deslizamiento entre fibra-matriz o entre láminas. Existen formas de salvar estas dificultades. Una forma de salvar la primera dificultad consiste en modificar las ecuaciones de cierre de la teoría de mezclas (Luccioni, 2006; Toledo et al., 2008). Para salvar la segunda dificultad se pueden introducir modificaciones en las ecuaciones constitutivas de las componentes (Car E., 2000; Luccioni y López, 2002; Luccioni et al., 2005). En este trabajo se presenta un modelo que combina ambos enfoques para simular el despegue de las componentes en materiales compuestos con fibras. El modelo se particulariza luego para modelar el deslizamiento fibra-matriz.

2 EXTENSIÓN DE LA TEORÍA DE MEZCLAS GENERALIZADA

2.1 Introducción

La teoría clásica de mezclas se basa en la hipótesis de que todos los componentes del compuesto tienen la misma deformación. Esto constituye una hipótesis restrictiva muy fuerte que, en general, sólo se cumple en compuestos muy especiales. Para salvar esta dificultad se ha propuesto una generalización de la teoría de mezclas clásica. En esta nueva teoría se supone que en compuestos con una estructura sencilla pueden identificarse algunas direcciones en las cuales las componentes del compuesto tienen la misma deformación (comportamiento paralelo) y otras direcciones en que todas las componentes tienen la misma tensión (comportamiento serie). Este análisis permite utilizar el concepto de modelo paralelo o serie para describir el comportamiento del compuesto (Toledo et al., 2008; Luccioni B., 2006)

Por otro lado, la teoría de mezclas clásica tampoco permite considerar deslizamientos relativos entre componentes lo cual limita su rango de aplicación ya que en la mayoría de los compuestos aparecen fenómenos de despegue o deslizamiento de fibras y, en muchos casos, delaminación. Para salvar esta dificultad, se ha propuesto modificar las ecuaciones

constitutivas de las componentes (Car 2002, Luccioni y López 2002, Luccioni et al. 2005).

El modelo que se presenta a continuación consiste en una extensión de la teoría de mezclas generalizada para incluir la posibilidad de deslizamiento relativo entre las componentes.

2.2 Ecuaciones básicas de la teoría de mezclas generalizadas (Luccioni, 2006; Toledo et al., 2008)

En un modelo en paralelo se puede suponer que todas las deformaciones son iguales y la tensión resulta de la suma de las tensiones de los componentes multiplicada por un factor de participación. Por otro lado, en un modelo en serie se puede suponer que la tensión es la misma en todas las componentes y la deformación total resulta de la suma de las deformaciones de las componentes multiplicada por su respectivo factor de participación.

Para escribir las ecuaciones constitutivas del compuesto teniendo en cuenta que puede trabajar de distintas formas en las distintas direcciones, conviene reordenar las componentes de tensión y deformación de cada uno de los materiales que forman el compuesto, de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^* &= \boldsymbol{\alpha}^\sigma : \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\alpha}^\varepsilon : \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\alpha}^\sigma : \boldsymbol{\sigma}^* + \boldsymbol{\alpha}^\varepsilon : \boldsymbol{\varepsilon}^* \\ \boldsymbol{\varepsilon}^* &= \boldsymbol{\alpha}^\varepsilon : \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\alpha}^\sigma : \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\alpha}^\varepsilon : \boldsymbol{\sigma}^* + \boldsymbol{\alpha}^\sigma : \boldsymbol{\varepsilon}^* \end{aligned} \quad (1)$$

Donde

$$\begin{aligned} \alpha_{ijkl}^\sigma &= \delta_{ir} \delta_{js} \delta_{kr} \delta_{ls} H(p_{rs}) \\ \alpha_{ijkl}^\varepsilon &= \delta_{ik} \delta_{jl} - \alpha_{ijkl}^\sigma \end{aligned}$$

H: función escalón,
$$p_{rs} = \begin{cases} 1 & \text{si la componente } rs \text{ trabaja en paralelo} \\ 0 & \text{si la componente } rs \text{ trabaja en serie} \end{cases} \quad (2)$$

Donde $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}$ son los tensores de tensión y deformación respectivamente, $\boldsymbol{\sigma}^*$ y $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ son tensores mixtos de tensión y deformación respectivamente. El tensor $\boldsymbol{\sigma}^*$ es tal que, referido direcciones locales del material (fibra, lámina, etc.), tiene componentes de tensión en correspondencia con aquellas direcciones en las que trabaja en paralelo y deformaciones totales en aquellas direcciones en las que trabaja en serie. De manera análoga, el tensor $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ es tal que, referido direcciones locales del material (fibra, lámina, etc.), tiene componentes de deformaciones totales en correspondencia con aquellas direcciones en las que trabaja en paralelo y tensión en aquellas direcciones en las que trabaja en serie.

En la teoría de mezclas generalizada se reordenan las ecuaciones constitutivas elastoplásticas de las componentes para obtener una relación entre los tensores $\boldsymbol{\sigma}^*$ y $\boldsymbol{\varepsilon}^*$. Posteriormente se obtiene la ecuación constitutiva del compuesto partiendo de la hipótesis que el tensor mixto de deformación $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ es común a todas las componentes del compuesto y el tensor mixto de tensión del compuesto $\boldsymbol{\sigma}^*$ se obtiene como suma de los tensores $\boldsymbol{\sigma}^*$ de las componentes multiplicados por sus respectivas participaciones de volumen.

2.3 Inclusión del deslizamiento relativo

A continuación se describe una forma general de extender la teoría de mezclas generalizada para incluir el despegue de las componentes. Se trata de un marco general en el que se permite que todas las componentes se despeguen. Este marco puede ser luego particularizado para simular deslizamiento de fibras o delaminación.

2.3.1. Ecuaciones constitutivas de las componentes

La hipótesis de la teoría de mezclas generalizada de que el tensor mixto de deformación $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ es común a todas las componentes del compuesto, implica que no hay deslizamiento relativo en aquellas direcciones en que trabaja en paralelo. Una forma de tener en cuenta el efecto del deslizamiento entre las componentes, utilizando el marco de la teoría de mezclas generalizadas, consiste en modificar las ecuaciones constitutivas de las componentes. Cuando se produce el despegue de las componentes, la transferencia de tensiones entre ellas se ve afectada y esto se traduce en una reducción del nivel tensional de las mismas que puede interpretarse como el producto de una disminución en el nivel de deformación vinculado con la deformación inelástica de la interfaz.

Para simular este fenómeno, se introduce entonces una deformación inelástica $\boldsymbol{\varepsilon}^s$ a nivel de cada componente del compuesto que, en cierta forma representa la deformación inelástica de la interfaz. Considerando que las componentes tienen un comportamiento elástoplástico, las ecuaciones constitutivas secantes de las mismas pueden ser escritas de manera general como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^s) \quad (3)$$

Donde \mathbf{C} es el tensor constitutivo elástico, $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ es el tensor de deformaciones plásticas y $\boldsymbol{\varepsilon}^s$ el tensor de deformaciones de la interfaz.

Reordenando la ecuación (3) de acuerdo a (1) se llega a:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{C}^* : \boldsymbol{\varepsilon}^* - \boldsymbol{\sigma}^{p*} - \boldsymbol{\sigma}^{s*} \quad (4)$$

Donde,

$$\mathbf{C}^* = (\boldsymbol{\alpha}^\sigma : \mathbf{C} + \boldsymbol{\alpha}^\varepsilon) : (\boldsymbol{\alpha}^\varepsilon : \mathbf{C} + \boldsymbol{\alpha}^\sigma)^{-1} \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{p*} = (\mathbf{C}^* : \boldsymbol{\alpha}^\sigma - \boldsymbol{\alpha}^\varepsilon) : \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{s*} = (\mathbf{C}^* : \boldsymbol{\alpha}^\sigma - \boldsymbol{\alpha}^\varepsilon) : \boldsymbol{\varepsilon}^s$$

2.3.2. Ecuación Constitutiva del Compuesto

Si se considera un compuesto simple en el cual las direcciones principales de ortotropía del material y los tensores $\boldsymbol{\alpha}^\sigma$ y $\boldsymbol{\alpha}^\varepsilon$ coinciden para todas las componentes, se cumple la siguiente condición:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_c^* = \boldsymbol{\varepsilon}^* \quad (7)$$

Donde el subíndice c denota una componente cualquiera.

Suponiendo además que en las direcciones que el material trabaja en serie la deformación plástica y la deformación por deslizamiento del compuesto resultan iguales a la suma de la deformación de cada componente por su respectiva participación volumétrica, se llega a:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{C}^* : \boldsymbol{\varepsilon}^* - \boldsymbol{\sigma}^{p*} - \boldsymbol{\sigma}^{s*} \quad (8)$$

Donde,

$$\mathbf{C}^* = \sum k_c \mathbf{C}_c^* \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^{p*} &= \sum k_c (\mathbf{C}_c^* : \boldsymbol{\alpha}^\sigma - \boldsymbol{\alpha}^\varepsilon) : \boldsymbol{\varepsilon}_c^p = \sum k_c \boldsymbol{\sigma}_c^{p*} \\ \boldsymbol{\sigma}^{s*} &= \sum k_c (\mathbf{C}_c^* : \boldsymbol{\alpha}^\sigma - \boldsymbol{\alpha}^\varepsilon) : \boldsymbol{\varepsilon}_c^s = \sum k_c \boldsymbol{\sigma}_c^{s*} \end{aligned} \quad (9)$$

k_c Representa la fracción volumétrica de cada componente en el compuesto.

Con la ayuda de la ecuación (1), la ecuación (8) puede ser reordenada para llegar finalmente a la ecuación del compuesto.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}^p - \boldsymbol{\sigma}^s \quad (10)$$

Donde,

$$\mathbf{C} = (\boldsymbol{\alpha}^\sigma : \mathbf{C}^* + \boldsymbol{\alpha}^\varepsilon) : (\boldsymbol{\alpha}^\varepsilon : \mathbf{C}^* + \boldsymbol{\alpha}^\sigma)^{-1} \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^p &= (\boldsymbol{\alpha}^\sigma - \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}^\varepsilon) : \boldsymbol{\sigma}^{p*} \\ \boldsymbol{\sigma}^s &= (\boldsymbol{\alpha}^\sigma - \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}^\varepsilon) : \boldsymbol{\sigma}^{s*} \end{aligned} \quad (11)$$

Para llevar a cabo la implementación numérica en un programa de elementos finitos es necesario conocer las deformaciones de las componentes a partir de la deformación del compuesto. Una vez obtenidas éstas, es posible integrar la ecuación constitutiva de cada componente por separado.

Partiendo de la ecuación (7) y utilizando las ecuaciones (1), (4) y (8) se obtiene la siguiente relación que vincula las deformaciones de las componentes con las del compuesto.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_c = \boldsymbol{\phi}_c : \boldsymbol{\varepsilon} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^p + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^s \quad (12)$$

Donde,

$$\boldsymbol{\phi}_c = (\boldsymbol{\alpha}^\varepsilon : \mathbf{C}_c^* + \boldsymbol{\alpha}^\sigma) : (\boldsymbol{\alpha}^\varepsilon : \mathbf{C}^* + \boldsymbol{\alpha}^\sigma)^{-1} \quad \begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^p &= \boldsymbol{\phi}_c : \boldsymbol{\alpha}^\varepsilon : \boldsymbol{\sigma}^{p*} - \boldsymbol{\alpha}^\varepsilon : \boldsymbol{\sigma}_c^{p*} \\ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^s &= \boldsymbol{\phi}_c : \boldsymbol{\alpha}^\varepsilon : \boldsymbol{\sigma}^{s*} - \boldsymbol{\alpha}^\varepsilon : \boldsymbol{\sigma}_c^{s*} \end{aligned} \quad (13)$$

El tensor elastoplástico con deslizamiento tangente del compuesto puede ser obtenido derivando la ecuación (10)

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}^p - \dot{\boldsymbol{\sigma}}^s = \mathbf{C}^T : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (14)$$

$$\mathbf{C}^T = \mathbf{C} - (\boldsymbol{\alpha}^\sigma - \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}^\varepsilon) : \sum k_c (\mathbf{C}_c^* : \boldsymbol{\alpha}^\sigma - \boldsymbol{\alpha}^\varepsilon) : (\mathbf{I} - \mathbf{C}_c^{-1} : \mathbf{C}_c^T) : \boldsymbol{\phi}_c \quad (15)$$

Donde \mathbf{C}_c^T es el tensor elastoplástico tangente del componente c .

Es importante resaltar que todas las ecuaciones antes mostradas son válidas sólo en el sistema de referencia local del compuesto que coincide con las direcciones principales de simetría. Para trabajar en otro sistema de referencia general se deben rotar todos los tensores.

3 MODELO CONSTITUTIVO GENERAL PROPUESTO PARA LAS COMPONENTES

La modificación de la ecuación de compatibilidad de deformaciones planteada antes introduce una deformación por deslizamiento en las ecuaciones constitutivas de los componentes del compuesto. Esta deformación representa la deformación inelástica de la interfaz y depende directamente de la interfaz entre componentes. La ventaja de introducir esta, en las ecuaciones de las componentes, es evitar considerar a la interfaz como una componente más del compuesto.

Para ello, es necesario admitir que en el conjunto componente-interfaz conviven dos

mecanismos disipativos: uno debido a la plastificación de la componente misma y otro al deslizamiento relativo a las otras componentes. Considerando la hipótesis de elasticidad desacoplada, la expresión de la densidad de energía libre del conjunto puede escribirse:

$$\Psi(\varepsilon_{ij}^e, p_i, s_i) = \Psi_e(\varepsilon_{ij}^e) + \Psi_p(p_i) + \Psi_s(s_i) \quad (16)$$

Donde Ψ representa la energía libre por unidad de volumen de la componente considerando la interfaz, Ψ_e representa la energía libre elástica por unidad de volumen de la componente, Ψ_p representa la energía libre plástica por unidad de volumen de la componente, Ψ_s representa la energía libre por unidad de volumen de la interfaz, ε_{ij}^e es el tensor de deformaciones elásticas y p_i, s_i son las variables internas asociadas a los mecanismos de disipación plástica y por deslizamiento respectivamente.

El tensor de deformaciones de la componente con deslizamiento es descompuesto en una parte elástica y plástica que dependen exclusivamente de la componente y la deformación por deslizamiento relativo que depende de la interfaz ε_{ij}^s :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^s \quad (17)$$

La disipación por unidad de volumen puede escribirse como:

$$\Xi = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \eta \dot{\theta} - \dot{\Psi} - \frac{1}{\theta} q_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \geq 0 \quad (18)$$

Donde θ es la temperatura, η la entropía específica por unidad de volumen, q_i el flujo de calor por conducción y x_i las coordenadas espaciales.

Reemplazando la expresión de la energía libre y el tensor de deformaciones

$$\begin{aligned} & \sigma_{ij} (\dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p + \dot{\varepsilon}_{ij}^s) - \eta \dot{\theta} - \left[\frac{\partial \Psi_e}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \frac{\partial \Psi_p}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial \Psi_s}{\partial s_i} \dot{s}_i + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \dot{\theta} \right] - \frac{1}{\theta} q_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \geq 0 \\ & \left(\sigma_{ij} - \frac{\partial \Psi_e}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \right) \dot{\varepsilon}_{ij}^e - \left(\eta + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} + \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \frac{\partial \Psi_p}{\partial p_i} \dot{p}_i + \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^s - \frac{\partial \Psi_s}{\partial s_i} \dot{s}_i - \frac{1}{\theta} q_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \geq 0 \end{aligned} \quad (19)$$

La entropía y la ecuación constitutiva secante surgen de aplicar el método de Coleman que a la desigualdad de Clausius-Duhem:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi_e}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \quad \eta = - \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad (20)$$

Las componentes termodinámicas asociadas a las variables internas resultan:

$$P_i = - \frac{\partial \Psi_p}{\partial p_i} \quad S_i = - \frac{\partial \Psi_s}{\partial s_i} \quad (21)$$

La disipación mecánica puede ser separada según el fenómeno que la genere:

$$\Xi_m = \Xi_p + \Xi_s \geq 0 \quad (22)$$

Donde

$$\Xi_p = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p + P_i \dot{p}_i \geq 0 \quad \Xi_s = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^s + S_i \dot{s}_i \geq 0 \quad (23)$$

La evolución de las deformaciones inelásticas de la fibra y de la interfaz, y de las variables internas son computadas definiendo las siguientes reglas de flujo:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}^p &= \dot{\lambda}_p \frac{\partial G_p}{\partial \sigma_{ij}} & \dot{p}_i &= \dot{\lambda}_p h_i^p & \dot{\epsilon}_{ij}^s &= \dot{\lambda}_s \frac{\partial G_s}{\partial \sigma_{ij}} & \dot{s}_i &= \dot{\lambda}_s h_i^s \\ \dot{\lambda}_p &\begin{cases} = 0 & \text{si } F_p(\sigma_{ij}, p_i) < 0 \\ > 0 & \text{si } F_p(\sigma_{ij}, p_i) = 0 \end{cases} & \dot{\lambda}_s &\begin{cases} = 0 & \text{si } F_s(\sigma_{ij}, s_i) < 0 \\ > 0 & \text{si } F_s(\sigma_{ij}, s_i) = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

Donde G_p, G_s son potenciales de disipación definidos como funciones convexas y F_p, F_s son criterios que determinan el comienzo y definen del fenómeno disipativo, los cuales deben ser también funciones convexas.

Las condiciones de carga descarga se derivan de las ecuaciones de Kuhn Tucker y se resumen como:

$$\text{Plasticidad: } \begin{cases} \dot{\lambda}_p \geq 0 \\ F_p \leq 0 \\ \dot{\lambda}_p F_p = 0 \end{cases} \quad \text{Deslizamiento: } \begin{cases} \dot{\lambda}_s \geq 0 \\ F_s \leq 0 \\ \dot{\lambda}_s F_s = 0 \end{cases} \quad (25)$$

Los coeficientes $\dot{\lambda}_p$ y $\dot{\lambda}_s$ salen de la condición de consistencia plástica y de deslizamiento de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} \dot{F}_s &= \frac{\partial F_s}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial F_s}{\partial s} \dot{s} = 0 \\ \dot{F}_p &= \frac{\partial F_p}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial F_p}{\partial p} \dot{p} = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

Considerando que

$$\dot{\sigma} = \mathbf{C} : (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p - \dot{\epsilon}^s) \quad (27)$$

Reemplazando las ecuaciones (27) y (24) en (26) y reordenando

$$\begin{aligned} \underbrace{\left(\frac{\partial F_s}{\partial \sigma} : \mathbf{C} : \frac{\partial G_p}{\partial \sigma} \right)}_{A_{11}} \dot{\lambda}_p + \underbrace{\left(\frac{\partial F_s}{\partial \sigma} : \mathbf{C} : \frac{\partial G_s}{\partial \sigma} - \frac{\partial F_s}{\partial s} h^s \right)}_{A_{12}} \dot{\lambda}_s &= \frac{\partial F_s}{\partial \sigma} : \mathbf{C} : \dot{\epsilon} \\ \underbrace{\left(\frac{\partial F_p}{\partial \sigma} : \mathbf{C} : \frac{\partial G_p}{\partial \sigma} - \frac{\partial F_p}{\partial p} h^p \right)}_{A_{21}} \dot{\lambda}_p + \underbrace{\left(\frac{\partial F_p}{\partial \sigma} : \mathbf{C} : \frac{\partial G_s}{\partial \sigma} \right)}_{A_{22}} \dot{\lambda}_s &= \frac{\partial F_p}{\partial \sigma} : \mathbf{C} : \dot{\epsilon} \end{aligned} \quad (28)$$

Las cuales pueden ser escritas en forma matricial

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\lambda}_p \\ \dot{\lambda}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial F_s}{\partial \sigma} : \mathbf{C} : \dot{\epsilon} \\ \frac{\partial F_p}{\partial \sigma} : \mathbf{C} : \dot{\epsilon} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

Resolviendo el sistema (29) se obtienen los coeficientes buscados

$$\dot{\lambda}_p = \frac{\left(A_{22} \frac{\partial F_s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} - A_{12} \frac{\partial F_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}} \quad \dot{\lambda}_s = \frac{\left(A_{11} \frac{\partial F_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} - A_{21} \frac{\partial F_s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}} \quad (30)$$

Introduciendo los coeficientes obtenidos de la ecuación (30) en la ecuación (27) se obtiene la siguiente expresión:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} \left[\mathbf{I} - \frac{\left(A_{22} \frac{\partial F_s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} - A_{12} \frac{\partial F_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} \right)}{A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}} : \frac{\partial G_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{\left(A_{11} \frac{\partial F_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} - A_{21} \frac{\partial F_s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} \right)}{A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}} : \frac{\partial G_s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (31)$$

De donde se obtiene el tensor constitutivo tangente:

$$\mathbf{C}^T = \mathbf{C} - \mathbf{C} \frac{\left(A_{22} \frac{\partial F_s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} - A_{12} \frac{\partial F_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} \right)}{A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}} : \frac{\partial G_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{C} \frac{\left(A_{11} \frac{\partial F_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} - A_{21} \frac{\partial F_s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} \right)}{A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}} : \frac{\partial G_s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (32)$$

4 PARTICULARIZACIÓN A UNA LÁMINA FORMADA POR MATRIZ Y FIBRAS UNIDIRECCIONALES

4.1 Introducción

En esta sección se particulariza el marco teórico desarrollado en las secciones precedentes al caso de una lámina compuesta por una matriz elastoplástica y fibras unidireccionales.

Si bien el modelo descrito permite incluir deslizamiento relativo en todas las componentes, en este caso resulta conveniente modelar dicho fenómeno en conjunto con las fibras y considerar que $\boldsymbol{\varepsilon}^s$ es nulo en la matriz.

Teniendo en cuenta esta consideración, la matriz puede describirse con un modelo elastoplástico convencional y las fibras con un modelo elastoplástico con deslizamiento como el que se describe en el apartado anterior.

Para la parte elastoplástica de las fibras se usa la teoría clásica de la plasticidad con funciones de fluencia y flujo de Von Mises.

A continuación, se describe el modelo utilizado para describir la evolución de las deformaciones inelásticas que representan el deslizamiento fibra-matriz.

4.2 Modelo de deslizamiento fibra-matriz

Para definir la evolución de las deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}^s$ es necesario definir el umbral de comienzo de este fenómeno a través de la función F_s , la dirección de la evolución de las deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}^s$ a través de la función G_s y la evolución de la variable interna s que lleva cuenta de la evolución del fenómeno inelástico de deslizamiento.

En general, el umbral de deslizamiento definido por la función F_s depende no sólo del estado tensional de la interfaz sino del estado de daño de la matriz. Como simplificación, en este trabajo se considera sólo el estado tensional de la interfaz. La función umbral de

deslizamiento puede ser escrita como:

$$F_s = f(\sigma) - K_s(s) \quad (33)$$

Donde $f(\sigma)$ es la función de deslizamiento y $K_s(s)$ es el umbral de deslizamiento que depende de la variable interna s .

Al estudiar el comportamiento de la interfaz entre fibra y matriz, se deduce que el deslizamiento entre ambas componentes depende fundamentalmente de la tensión de corte en la interfaz. Por otro lado, la resistencia al corte de la interfaz depende de las tensiones normales a la misma. En base a estas consideraciones se propone una función de deslizamiento similar a la función de Mohr-Coulomb:

$$f(\sigma) = |\tau| - \sigma_n \operatorname{tg} \phi \quad (34)$$

Donde:

τ Es la tensión de corte de la interfaz.

σ_n La tensión normal a la interfaz.

ϕ Angulo de fricción interna.

Considerando un compuesto con fibras largas, se puede relacionar la tensión longitudinal en la fibra con la tensión de corte de la interfaz fibra-matriz de la siguiente forma:

$$\sigma_f A_f = \tau P_f L_A \quad (35)$$

Donde:

σ_f Tensión longitudinal fibra.

τ Tensión interfaz fibra-matriz.

A_f Area transversal fibra.

P_f Perímetro fibra.

L_A Longitud de la fibra dentro de la matriz.

Utilizando las siguientes relaciones:

$$A_f = \frac{\pi D^2}{4} \quad P_f = \pi D \quad (36)$$

D Diámetro fibra

Con (35) y despejando se llega:

$$\tau = \frac{\sigma_f D}{4L_A} \quad (37)$$

Si se define un sistema de coordenadas locales en la fibra de tal forma que el eje 1 corresponde a la dirección longitudinal de la misma, se puede escribir:

$$\tau = \frac{\sigma_{11} D}{4L_A} \quad (38)$$

La tensión normal a la interfaz se calcula como el promedio de las tensiones transversales a la fibra, es decir y considerando el sistema local antes mencionado:

$$\sigma_n = -\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \quad (39)$$

Reemplazando esto en la función de fluencia resulta:

$$f(\sigma) = |\sigma_{11}| \frac{D}{4L_A} + (\sigma_{22} + \sigma_{33}) \frac{\text{tg } \phi}{2} \quad (40)$$

Definiendo:

$$\alpha \doteq \frac{D}{4L_A} \quad \beta \doteq \frac{\text{tg } \phi}{2} \quad (41)$$

La función umbral de deslizamiento modificada puede escribirse finalmente como:

$$f(\sigma) = |\sigma_{11}| \alpha + (\sigma_{22} + \sigma_{33}) \beta \quad (42)$$

El potencial de disipación da la dirección de evolución de la deformación en la interfaz, esto se observa claramente en la ecuación (24). Debido a que el modelo de interfaz es introducido dentro de la componente fibra, es fundamental estudiar los efectos que genera el deslizamiento relativo en las tensiones de la fibra. La rotura de la interfaz trae como consecuencia la disminución de la tensión longitudinal en la fibra ya que es un refuerzo unidireccional. Considerando nuevamente un sistema local definido en la fibra como el anterior, el flujo debe garantizar una evolución de las deformaciones por deslizamiento en la dirección longitudinal de la fibra que corresponde con el eje 1 en el sistema local. Por lo tanto:

$$G_s(\sigma) = Sg(\sigma_{11}) \quad (43)$$

Donde la función Sg es la función signo definida como:

$$Sg(\sigma_{11}) \doteq \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma_{11} > 0 \\ -1 & \text{si } \sigma_{11} < 0 \end{cases} \quad (44)$$

La variable interna s se obtiene normalizando la energía disipada en el proceso de deslizamiento por unidad de volumen, por medio de esto, la variable s vale 0 para una interfaz no dañada y 1 para una interfaz completamente dañada. Por lo visto anteriormente, la única componte no nula del tensor de deformaciones por deslizamiento es ϵ_{11}^s . Por lo tanto, la evolución de la variable interna puede escribirse como:

$$\dot{s} = \frac{\sigma_{11} \dot{\epsilon}_{11}^s}{\tilde{g}^s} \quad (45)$$

Donde

$$\tilde{g}^s = \mathfrak{I} g^s \quad (46)$$

La función \mathfrak{I} es introducida para tener en cuenta el cambio en la energía g^s según el estado tensional de la interfaz, y se define como:

$$\mathfrak{I} = \frac{|\sigma_{11}|}{f(\sigma)} \quad (47)$$

Por último,

$$\mathbf{g}^s = \frac{\tilde{G}_s}{L_c} \quad (48)$$

Donde \tilde{G}_s es la energía de interfaz que debe ser obtenida de ensayos experimentales (Zhou et al. 2001). La misma se divide por una longitud característica L_c , relacionada con el tamaño de los elementos finitos, con el fin de obtener objetividad en la respuesta respecto del tamaño de malla.

Si dentro de una lámina se tienen fibras cortadas y la misma es cargada de tal forma que las fibras estén sometidas a un esfuerzo de tracción superior al umbral de deslizamiento, esto genera un aumento en las deformaciones por deslizamiento. Si la carga es retirada, la deformación por deslizamiento permanece mientras que la deformación elástica se recupera. Si la lámina es cargada nuevamente, pero ahora el esfuerzo en la fibra es de compresión y superior al límite elástico por deslizamiento actual, aparecen incrementos de deformación por deslizamiento de signo contrario. La deformación por deslizamiento acumulada comienza a disminuir hasta anularse completamente. Aunque la carga perdure, la fibra no puede tener deformaciones por deslizamiento negativas ya que esto implicaría que un lado de la misma penetre el otro lado de la fibra lo cual es físicamente imposible. Por esto, cuando la deformación por deslizamiento vuelve a cero, la fibra retoma un comportamiento lineal recuperando la rigidez inicial. Es importante aclarar que, si bien la fibra ahora no presenta deformaciones por deslizamiento, el umbral por deslizamiento se ha reducido ya que depende de la variable interna \mathbf{s} , con lo cual el esfuerzo de tracción necesario para separar la fibra nuevamente es menor. También se verifica que la capacidad de disipación de energía de la interfaz ha disminuido y no se recupera por más que la fibra trabaje elásticamente sin deslizarse. Resumiendo, el “daño” producido por el deslizamiento de la fibra es irreversible, aunque no se ponga de manifiesto.

5 IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

La integración de la ecuación constitutiva de las componentes se lleva a cabo con un algoritmo del tipo retorno mapeado. Considerando un paso de carga n , iteración k , se plantean las condiciones de consistencia plástica y de deslizamiento como una linealización alrededor de la iteración $k-1$.

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{F}_n^s \right]^k &= \left[\mathbf{F}_n^s \right]^{k-1} + \left[\frac{\partial \mathbf{F}_n^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^{k-1} : \delta \boldsymbol{\sigma}^k + \left[\frac{\partial \mathbf{F}_n^s}{\partial \mathbf{s}} \right]^{k-1} \delta \mathbf{s}^k = 0 \\ \left[\mathbf{F}_n^p \right]^k &= \left[\mathbf{F}_n^p \right]^{k-1} + \left[\frac{\partial \mathbf{F}_n^p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^{k-1} : \delta \boldsymbol{\sigma}^k + \left[\frac{\partial \mathbf{F}_n^p}{\partial \mathbf{p}} \right]^{k-1} \delta \mathbf{p}^k = 0 \end{aligned} \quad (49)$$

Reemplazando en la ecuación anterior las siguientes relaciones:

$$\delta \boldsymbol{\sigma}^k = \mathbf{C} : \left(-\delta \lambda_p^k \left[\frac{\partial \mathbf{G}_n^p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^{k-1} - \delta \lambda_s^k \left[\frac{\partial \mathbf{G}_n^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^{k-1} \right) \quad \delta \mathbf{s}^k = \delta \lambda_s^k \left[\mathbf{h}_n^s \right]^{k-1} \quad \delta \mathbf{p}^k = \delta \lambda_p^k \left[\mathbf{h}_n^p \right]^{k-1} \quad (50)$$

Se obtiene:

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{F}_n^s \right]^{k-1} - \left[\frac{\partial \mathbf{F}_n^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^{k-1} : \mathbf{C} : \delta \lambda_p^k \left[\frac{\partial \mathbf{G}_n^p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^{k-1} - \left[\frac{\partial \mathbf{F}_n^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^{k-1} : \mathbf{C} : \delta \lambda_s^k \left[\frac{\partial \mathbf{G}_n^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^{k-1} + \left[\frac{\partial \mathbf{F}_n^s}{\partial \mathbf{s}} \right]^{k-1} \delta \lambda_s^k \left[\mathbf{h}_n^s \right]^{k-1} &= 0 \\ \left[\mathbf{F}_n^p \right]^{k-1} - \left[\frac{\partial \mathbf{F}_n^p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^{k-1} : \mathbf{C} : \delta \lambda_p^k \left[\frac{\partial \mathbf{G}_n^p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^{k-1} - \left[\frac{\partial \mathbf{F}_n^p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^{k-1} : \mathbf{C} : \delta \lambda_s^k \left[\frac{\partial \mathbf{G}_n^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^{k-1} + \left[\frac{\partial \mathbf{F}_n^p}{\partial \mathbf{p}} \right]^{k-1} \delta \lambda_p^k \left[\mathbf{h}_n^p \right]^{k-1} &= 0 \end{aligned} \quad (51)$$

Reordenado y escribiendo las ecuaciones en forma matricial

$$\begin{aligned} \underbrace{\left[\frac{\partial \mathbf{F}_n^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^{k-1} : \mathbf{C} : \left[\frac{\partial \mathbf{G}_n^p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^{k-1}}_{\mathbf{A}_{11}} \delta \lambda_p^k + \underbrace{\left(\left[\frac{\partial \mathbf{F}_n^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^{k-1} : \mathbf{C} : \left[\frac{\partial \mathbf{G}_n^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^{k-1} - \left[\frac{\partial \mathbf{F}_n^s}{\partial \mathbf{s}} \right]^{k-1} \left[\mathbf{h}_n^s \right]^{k-1} \right)}_{\mathbf{A}_{12}} \delta \lambda_s^k &= \left[\mathbf{F}_n^s \right]^{k-1} \\ \underbrace{\left(\left[\frac{\partial \mathbf{F}_n^p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^{k-1} : \mathbf{C} : \left[\frac{\partial \mathbf{G}_n^p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^{k-1} - \left[\frac{\partial \mathbf{F}_n^p}{\partial \mathbf{p}} \right]^{k-1} \left[\mathbf{h}_n^p \right]^{k-1} \right)}_{\mathbf{A}_{21}} \delta \lambda_p^k + \underbrace{\left[\frac{\partial \mathbf{F}_n^p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^{k-1} : \mathbf{C} : \left[\frac{\partial \mathbf{G}_n^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^{k-1}}_{\mathbf{A}_{22}} \delta \lambda_s^k &= \left[\mathbf{F}_n^p \right]^{k-1} \end{aligned} \quad (52)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \lambda_p^k \\ \delta \lambda_s^k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left[\mathbf{F}_n^s \right]^{k-1} \\ \left[\mathbf{F}_n^p \right]^{k-1} \end{Bmatrix}$$

Resolviendo el sistema planteado antes se obtiene

$$\delta \lambda_p^k = \frac{\mathbf{A}_{22} \left[\mathbf{F}_n^s \right]^{k-1} - \mathbf{A}_{12} \left[\mathbf{F}_n^p \right]^{k-1}}{\mathbf{A}_{11} \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{21}} \quad \delta \lambda_s^k = \frac{\mathbf{A}_{11} \left[\mathbf{F}_n^p \right]^{k-1} - \mathbf{A}_{21} \left[\mathbf{F}_n^s \right]^{k-1}}{\mathbf{A}_{11} \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{21}} \quad (53)$$

Con los resultados de la ecuación (53) se actualizan las deformaciones, tensiones y variables internas en ese orden.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_p^k &= \boldsymbol{\varepsilon}_p^{k-1} + \delta \lambda_p^k \left[\frac{\partial \mathbf{G}_n^p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^{k-1} & \boldsymbol{\varepsilon}_s^k &= \boldsymbol{\varepsilon}_s^{k-1} + \delta \lambda_s^k \left[\frac{\partial \mathbf{G}_n^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^{k-1} \\ \boldsymbol{\sigma}_n^k &= \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_n - \boldsymbol{\varepsilon}_p^k - \boldsymbol{\varepsilon}_s^k) \\ \mathbf{s}^k &= \mathbf{s}^{k-1} + \delta \lambda_s^k \left[\mathbf{h}_n^s \right]^k & \mathbf{p}^k &= \mathbf{p}^{k-1} + \delta \lambda_p^k \left[\mathbf{h}_n^p \right]^k \end{aligned} \quad (54)$$

5.1 Algoritmo Implementación Componente fibra: plasticidad-deslizamiento acoplado

Actualizaciones de las deformaciones paso de carga n:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = \boldsymbol{\varepsilon}_{n-1} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n$$

Predictor elástico para las tensiones paso n:

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma}_{n-1} + \mathbf{C} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n$$

Iniciación de variables dentro de la integración constitutiva, k=0:

$$\boldsymbol{\sigma}_n^k = \boldsymbol{\sigma}_n \quad \left[\boldsymbol{\varepsilon}_n^p \right]^k = \boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}^p \quad \mathbf{p}_n^k = \mathbf{p}_{n-1} \quad \left[\boldsymbol{\varepsilon}_n^s \right]^k = \boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}^s \quad \mathbf{s}_n^k = \mathbf{s}_{n-1} \quad \alpha = 0$$

Cálculo funciones umbrales:

$$[F_n^p]^k = F^p(\sigma_n^k, p_n^k) \quad [F_n^s]^k = F^s(\sigma_n^k, s_n^k)$$

Si: $\{[F_n^p]^k > 0 \text{ y } [F_n^s]^k > 0\} \Rightarrow$ Plasticidad y Deslizamiento

Repetir mientras: $\{k < k_{\max} \text{ y } \alpha \neq 1\} \Rightarrow k=k+1$

$$\dot{\lambda}_p = \frac{A_{22}[F_n^s]^{k-1} - A_{12}[F_n^p]^{k-1}}{A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}} \quad \dot{\lambda}_s = \frac{A_{11}[F_n^p]^{k-1} - A_{21}[F_n^s]^{k-1}}{A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}}$$

$$[\Delta \epsilon_n^p]^k = \dot{\lambda}_p \frac{\partial G_p}{\partial \sigma_n^{k-1}} \quad [\Delta \epsilon_n^s]^k = \dot{\lambda}_s \frac{\partial G_s}{\partial \sigma_n^{k-1}}$$

$$[\epsilon_n^p]^k = [\epsilon_n^p]^{k-1} + [\Delta \epsilon_n^p]^k \quad [\epsilon_n^s]^k = [\epsilon_n^s]^{k-1} + [\Delta \epsilon_n^s]^k$$

Si: $\{[\epsilon_n^s]^k < 0 \Rightarrow \{[\epsilon_n^s]^k = 0 \text{ y } \alpha = 1\}$

$$[\Delta \sigma_n^p]^k = C : [\Delta \epsilon_n^p]^k \quad [\Delta \sigma_n^s]^k = C : [\Delta \epsilon_n^s]^k$$

$$\sigma_n^k = \sigma_n^{k-1} - [\Delta \sigma_n^p]^k - [\Delta \sigma_n^s]^k \quad p_n^k = p_n^{k-1} + \Delta p_n^k \quad s_n^k = s_n^{k-1} + \Delta s_n^k$$

$$[F_n^p]^k = F^p(\sigma_n^k, p_n^k) \quad [F_n^s]^k = F^s(\sigma_n^k, s_n^k)$$

Si: $\{[F_n^p]^k \leq 0 \text{ y } [F_n^s]^k \leq 0\} \Rightarrow \alpha = 1$

Si: $\{[F_n^s]^0 > 0 \text{ y } \alpha \neq 1\} \Rightarrow$ Deslizamiento

Repetir mientras: $\{k < k_{\max} \text{ y } \alpha \neq 1\} \Rightarrow k=k+1$

$$\dot{\lambda}_s = \frac{[F_n^s]^{k-1}}{A_{12}} \Rightarrow [\Delta \epsilon_n^s]^k = \dot{\lambda}_s \frac{\partial G_s}{\partial \sigma_n^{k-1}}$$

$$[\epsilon_n^s]^k = [\epsilon_n^s]^{k-1} + [\Delta \epsilon_n^s]^k$$

Si: $\{[\epsilon_n^s]^k < 0 \Rightarrow \{[\epsilon_n^s]^k = 0 \text{ y } \alpha = 1\}$

$$s_n^k = s_n^{k-1} + \Delta s_n^k \quad [\Delta \sigma_n^s]^k = C : [\Delta \epsilon_n^s]^k \Rightarrow \sigma_n^k = \sigma_n^{k-1} - [\Delta \sigma_n^s]^k$$

$$[F_n^s]^k = F^s(\sigma_n^k, s_n^k)$$

Si: $\{[F_n^s]^k \leq 0\} \Rightarrow \alpha = 1$

Si: $\{[F_n^p]^0 > 0\} \Rightarrow$ Plasticidad

Repetir mientras: $\{k < k_{\max} \text{ y } [F_n^p]^k > 0\} \Rightarrow k=k+1$

$$\dot{\lambda}_p = \frac{[F_n^p]^{k-1}}{A_{21}} \Rightarrow [\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^p]^k = \dot{\lambda}_p \frac{\partial G_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}_n^{k-1}}$$

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_n^p]^k = [\boldsymbol{\varepsilon}_n^p]^{k-1} + [\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^p]^k$$

$$\mathbf{p}_n^k = \mathbf{p}_n^{k-1} + \Delta \mathbf{p}_n^k \quad [\Delta \boldsymbol{\sigma}_n^p]^k = \mathbf{C} : [\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^p]^k \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_n^k = \boldsymbol{\sigma}_n^{k-1} - [\Delta \boldsymbol{\sigma}_n^p]^k$$

$$[F_n^p]^k = F^p(\boldsymbol{\sigma}_n^k, \mathbf{p}_n^k)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma}_n^k \quad \boldsymbol{\varepsilon}_n^p = [\boldsymbol{\varepsilon}_n^p]^k \quad \mathbf{p}_n = \mathbf{p}_n^k \quad \boldsymbol{\varepsilon}_n^s = [\boldsymbol{\varepsilon}_n^s]^k \quad \mathbf{s}_n = \mathbf{s}_n^k$$

Fin

5.2 Esquema de implementación en programa de elementos finitos

El modelo desarrollado es implementado en un programa de elemento no-lineal siguiendo el esquema iterativo presentado en la figura 3.

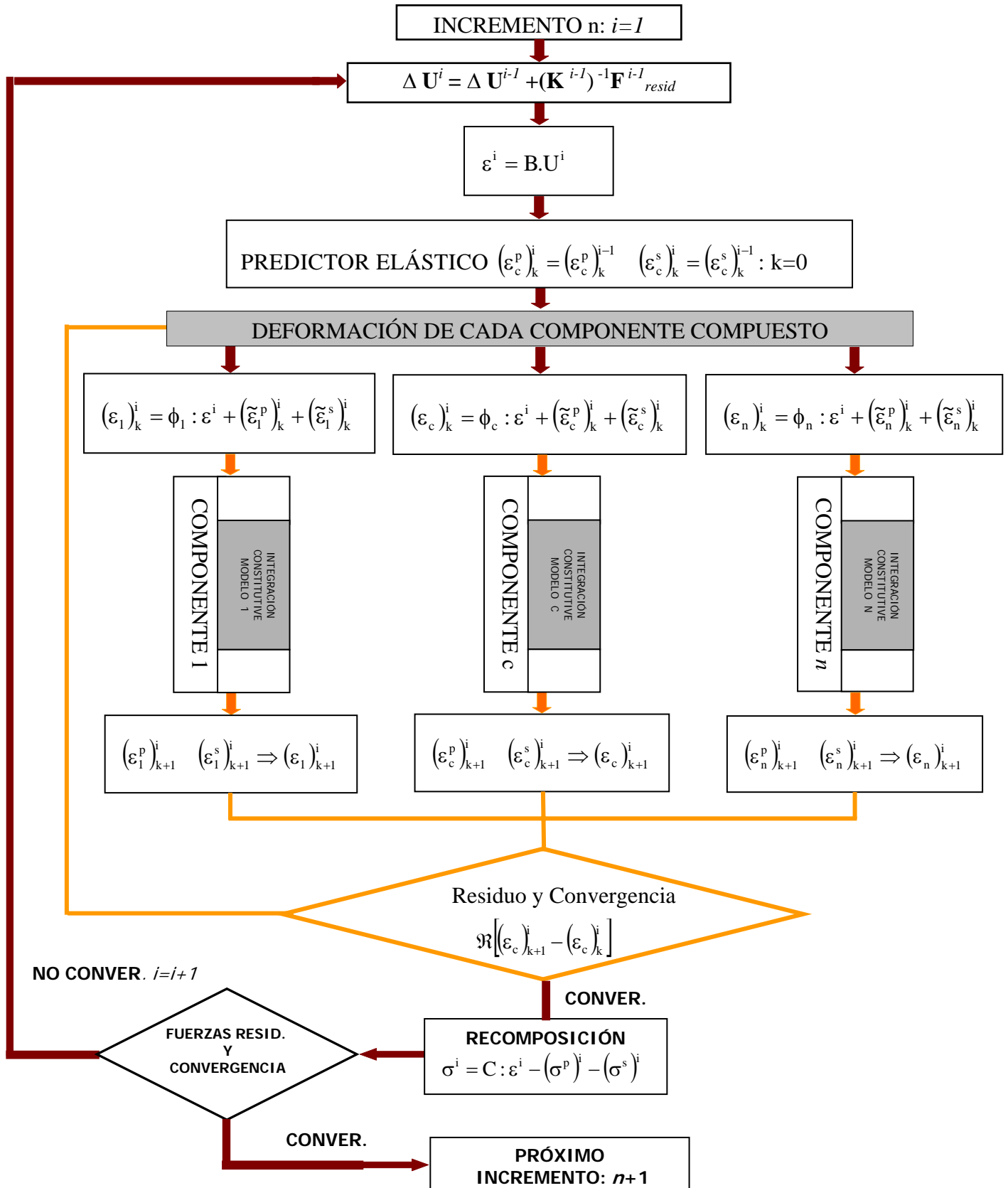


Figura 3: Esquema iterativo de implementación numérica programa de elemento finito.
Copyright © 2009 Asociación Argentina de Mecánica Computacional <http://www.amcaonline.org.ar>

La deformación de cada componente del compuesto en cada iteración es obtenida con la ecuación (12).

6 VALIDACIÓN DEL MODELO

El algoritmo descrito en la sección anterior fue implementado en un programa de elemento finito 3D que tiene incorporada la teoría de mezclas generalizadas. Se llevaron a cabo diferentes ensayos numéricos para corroborar su funcionamiento. Finalmente, se tomaron resultados experimentales y se calibraron los parámetros para describir numéricamente el fenómeno de despegue de fibra.

El modelo geométrico utilizado es un cubo de 10 mm por lado, a menos que se indique lo contrario y los elementos finitos utilizados son del tipo tetraedro con cuatro nodos y un punto de integración. Para llevar a cabo el ensayo se fijan tres caras del cubo impidiendo el desplazamiento en dirección normal a las mismas, y, del otro extremo se le impone desplazamientos iguales normales a la cara, en la figura 8 se puede observar el esquema de carga, la presión de confinamiento esta presente en aquellos ensayos que así lo indiquen.

El material compuesto puede estar formado por fibra y matriz o solo alguno de ellos, pero en todos los casos los materiales utilizados son isótropos.

6.1 Ensayo plasticidad-deslizamiento acoplados

El objetivo de este ensayo numérico es evaluar la capacidad que tiene el modelo numérico implementado para describir el comportamiento que presenta la componente fibra cuando la misma tiene plasticidad y deslizamiento relativo. Para simplificar el ensayo, se simuló un compuesto que tiene una única componente con el modelo constitutivo implementado. Las propiedades de la fibra-interfaz utilizadas se presentan en la Tabla 1.

Propiedad	Fibra	Interfaz
Módulo de Elasticidad [Mpa]	72000	-
Coefficiente de Poisson	0.2	-
Tensión Límite Elástico [Mpa]	500	570
Criterio de Fluencia-Deslizamiento	Von Mises	Modelo Propuesto
Flujo	Asociado	Modelo Propuesto
Energía de Interfaz [N/mm]	-	30
Tipo de curva proceso no lineal	Endurecimiento Lineal -14000 [Mpa]	Ablandamiento Exponencial
Parámetros Interfaz	-	$\alpha = 1$ $\beta = 0$

Tabla 1: Propiedades mecánicas de los materiales utilizados

En este ensayo el modelo fue fijado de un extremo y estirado del otro en la dirección de la fibra hasta alcanzar el umbral por plasticidad, se lo continuó estirando hasta llegar al umbral por deslizamiento, luego se lo descargó y cargó en sentido contrario y, por último, se descargó y volvió a cargar nuevamente en el sentido original. La curva de respuesta obtenida es mostrada en la figura 4.

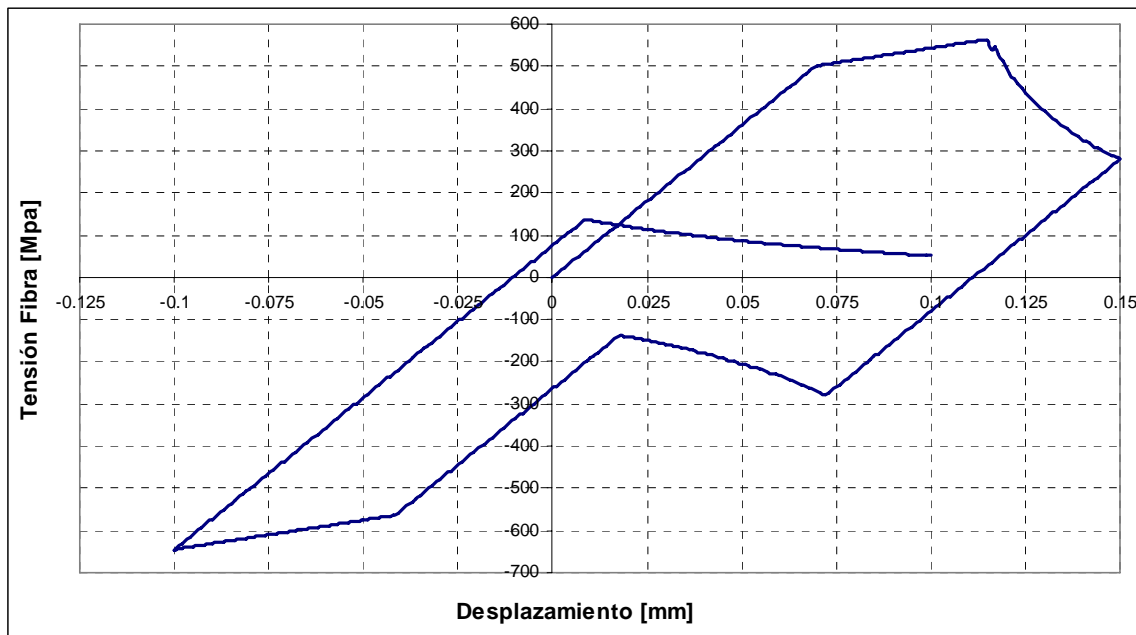


Figura 4: Resultado Ensayo Plasticidad-Deslizamiento Acoplados.

Como se utiliza plasticidad con endurecimiento lineal las tensiones siguen aumentando después de superado el umbral de plasticidad hasta que se llega al límite por deslizamiento. A partir de este punto, la tensión en la fibra comienza a disminuir a deformación creciente. Posteriormente, el modelo es descargado y la respuesta resulta elástica sin evidenciar deslizamiento ni deformaciones permanentes adicionales. Luego el modelo se comprime inicialmente de manera elástica, con la rigidez original, hasta llegar al umbral de deslizamiento con que quedó antes de ser descargado. La fibra comienza entonces a deslizarse en sentido contrario hasta que la deformación por deslizamiento se anula y comienza nuevamente el comportamiento lineal ya que los extremos de la fibra cortada entran en contacto nuevamente. La tensión de compresión comienza a aumentar hasta llegar al límite plástico, la deformación plástica comienza a disminuir y cambia de signo. En este punto, al modelo se le imponen desplazamientos positivos nuevamente y comienza a descargarse, quedando con una deformación plástica residual de compresión. El comportamiento lineal perdura hasta llegar al límite por deslizamiento que ahora es mucho menor que el de plasticidad debido al proceso de falla que ha sufrido la fibra.

6.2 Ensayo deslizamiento para diferentes ángulos

Al igual que en el ensayo anterior, el material compuesto utilizado solo tiene la componente fibra-interfaz con las mismas propiedades presentadas en la tabla 1, pero ahora la tensión límite elástico para la interfaz es de 500 MPa y para la fibra se utilizó un valor mucho mayor que este para garantizar tener solo deslizamiento. El modelo es sometido a un ciclo de carga sobrepasando el límite por deslizamiento, se realiza el mismo ensayo para diferentes ángulos de la fibra con respecto a la dirección de aplicación del desplazamiento. Los resultados son mostrados en la figura 5 en donde se representa la tensión fibra en la dirección de aplicación del desplazamiento en función del desplazamiento en dicha dirección.

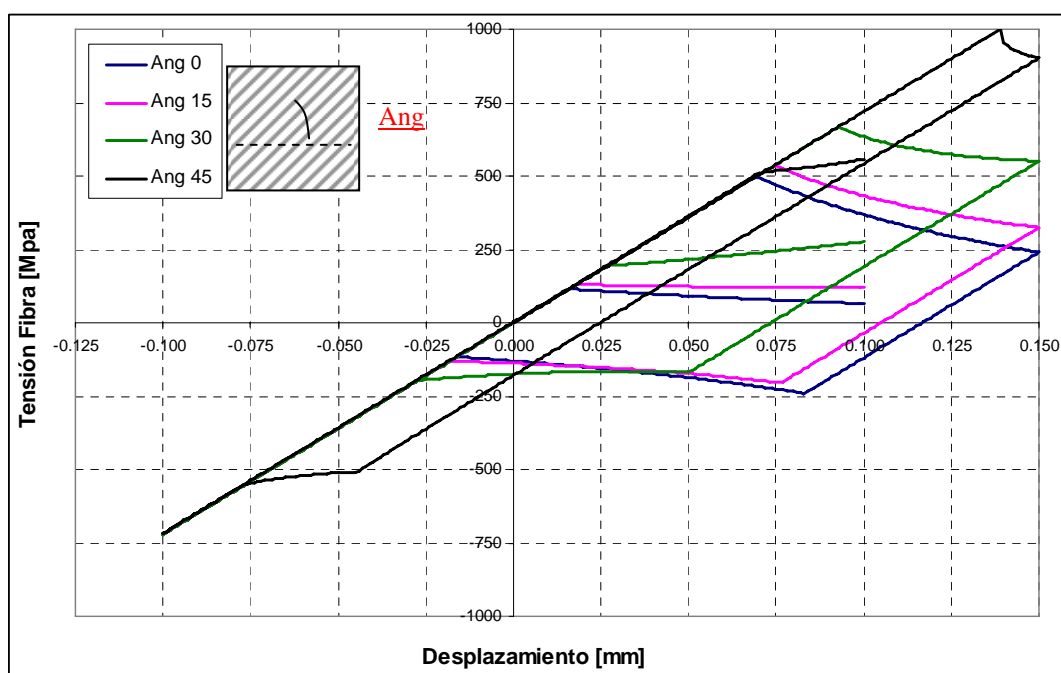


Figura 5: Resultados Ensayo Diferentes Angulo Fibra.

A mayor ángulo de la fibra respecto a la dirección del desplazamiento impuesto, mayor es la tensión que se necesita para llegar al umbral de deslizamiento. El límite elástico de la fibra no cambia con el ángulo, lo que ocurre es que la tensión en la dirección de la fibra disminuye. En el caso extremo de tener un ángulo muy grande, la fibra presenta un comportamiento puramente elástico.

6.3 Ensayo matriz-fibra con deslizamiento

En este ensayo el material compuesto utilizado está formado por una matriz elástica y una fibra con el modelo constitutivo desarrollado, las propiedades de los materiales se presentan en la Tabla 2.

Propiedad	Fibra	Matriz	Interfaz
Módulo de Elasticidad [Mpa]	72000	1350	-
Coefficiente de Poisson	0.2	0.4	-
Tensión Límite Elástico [Mpa]	600	-	500
Criterio de Fluencia-Deslizamiento	Von Mises	Elástico Puro	Modelo Propuesto
Flujo	Asociado	-	Modelo Propuesto
Energía de Interfaz [N/mm]	-	-	30
Tipo de curva proceso no lineal	Endurecimiento Lineal -14000 [Mpa]	-	Ablandamiento Exponencial
Fracción de Volumen	0.30	0.70	-
Parámetros Interfaz	-	-	$\alpha = 1$ $\beta = 0$

Tabla 2: Propiedades mecánicas de los materiales utilizados

En este ensayo el modelo geométrico utilizado es el mismo que el de los ensayos anteriores, el material es un compuesto formado por una lámina de fibra y matriz, la fibra esta orientado en el sentido de aplicación del desplazamiento.

En el ensayo el modelo es cargado hasta superar el umbral de deslizamiento de la fibra, posteriormente es descargado y cargado en sentido contrario a la misma hasta recuperar todo la deformación por deslizamiento. En este punto, el compuesto retoma el comportamiento elástico con su rigidez original, por último, se carga el modelo nuevamente en sentido de la fibra hasta superar el nuevo umbral de deslizamiento.

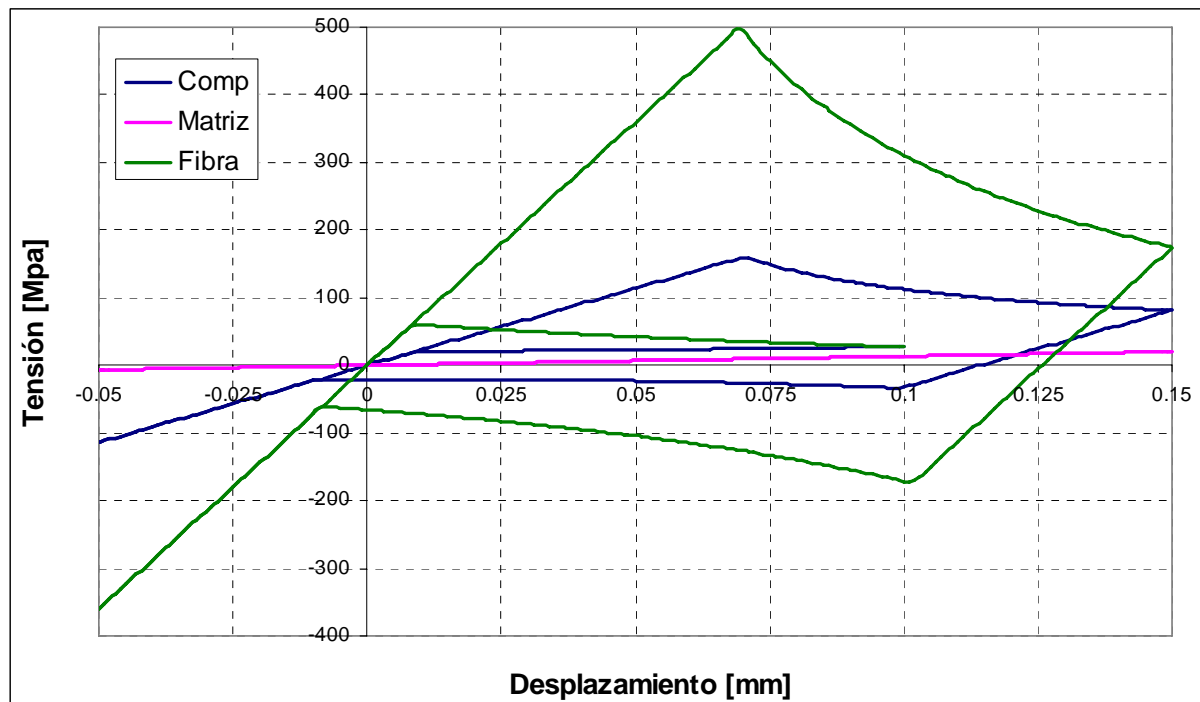


Figura 6: Resultado Ensayo Matriz-Fibra.

En la figura 6 se muestra la curva de comportamiento obtenida del ensayo.

6.4 Validación con datos experimentales

En este ejemplo se simulan los ensayos de arrancamiento de barras de acero ancladas en cilindros de hormigón realizados por (Malvar, 1992) utilizando una discretización gruesa del problema.

Los especímenes ensayados por (Malvar, 1992) eran de hormigón con una resistencia a rotura por compresión de 40.20 Mpa y 38.41 Mpa y forma cilíndrica de 76.2 mm de diámetro y 101.6 mm de longitud. En correspondencia con el eje longitudinal del cilindro se encontraba anclada una barra de acero nervurado tipo G60, #6 (ASTM A 615-89), de aproximadamente 19.05 mm de diámetro, anclada una longitud de 5 veces la separación entre las nervaduras de la barra, ver figura 6. Realizó cinco ensayos de arrancamiento con distintas presiones de confinamiento. Dentro de cada serie utilizó dos patrones de nervaduras distintos como se observa en figura 7.

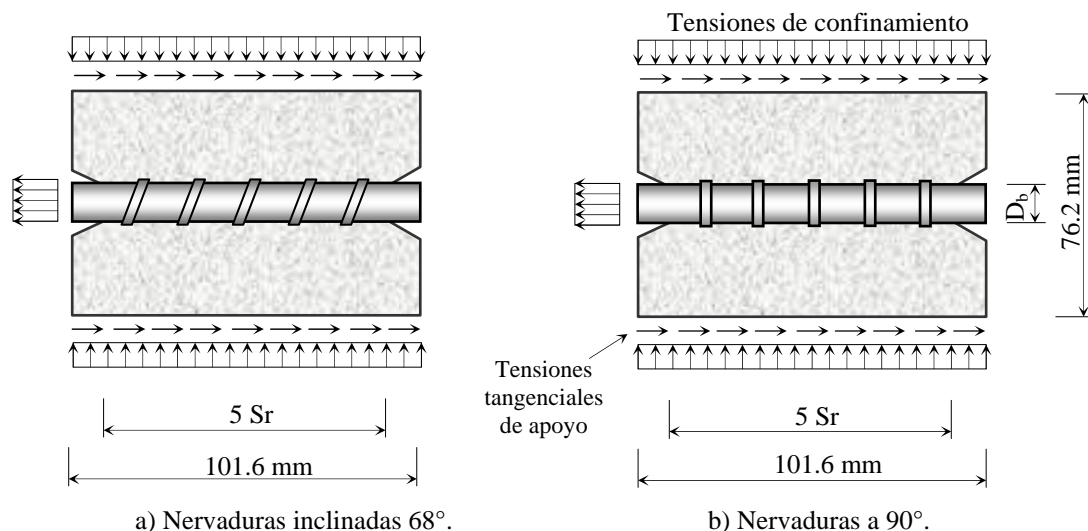


Figura 7: Esquema de los ensayos de Malvar

Para simular estos ensayos se modeló un cubo de 100 mm por lado, se utilizaron elementos finitos tipo tetraedro con cuatro nodos y un punto de integración. Como el deslizamiento relativo de la fibra está contenido dentro del modelo de la misma no es necesario utilizar muchos elementos finitos en la malla, los resultados mostrados más adelante son obtenidos con una malla de elementos finitos de 5 elementos en el volumen.

El modelo es fijado y cargado como se observa en la figura 8, para no complicar el dibujo no se incluyeron los apoyos que restringen el movimiento de la cara frontal.

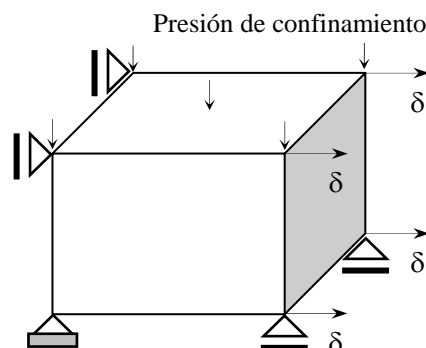
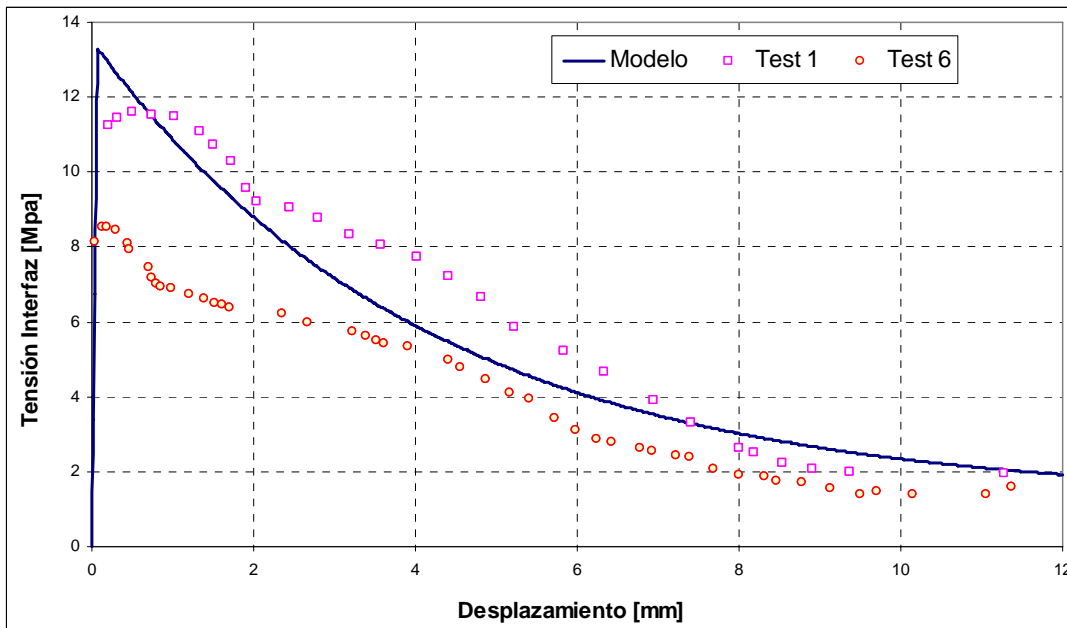


Figura 8: Esquema de Ensayo Modelo Numérico.

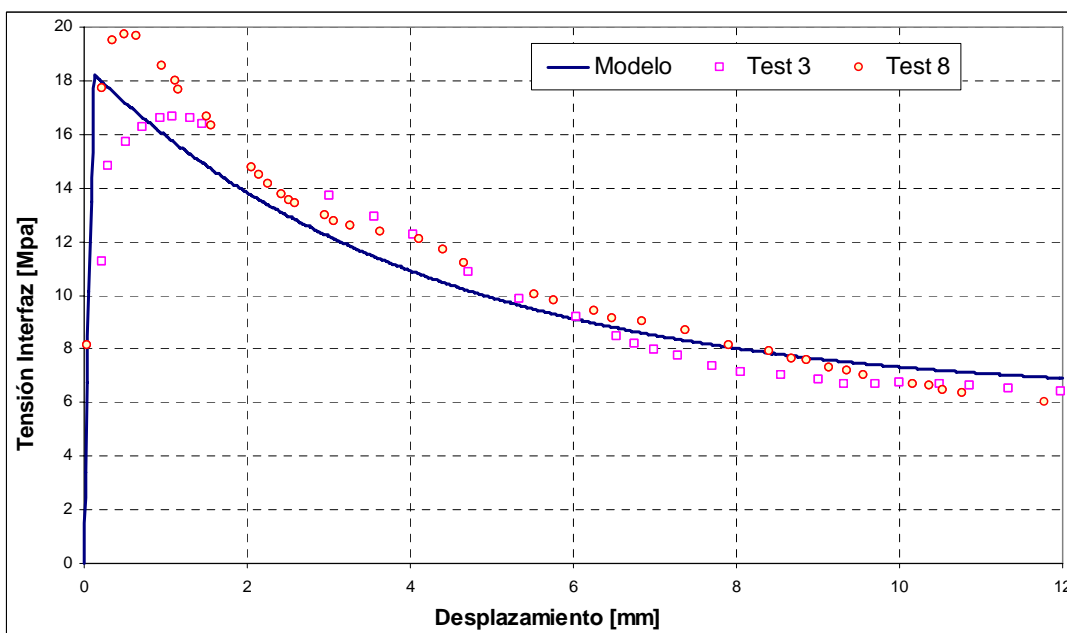
Propiedad	Fibra (Acero)	Interfaz
Módulo de Elasticidad [Mpa]	2.058×10^5	-
Coefficiente de Poisson	0.2	-
Tensión Límite Elástico [Mpa]	412	12
Criterio de Fluencia-Deslizamiento	Von Mises	Modelo Propuesto
Flujo	Asociado	Modelo Propuesto
Energía de Interfaz [N/mm]	-	25
Parámetros Interfaz	-	$\alpha = 8.2 \times 10^{-2}$ $\beta = 0.18$

Tabla 3: Propiedades mecánicas de los materiales

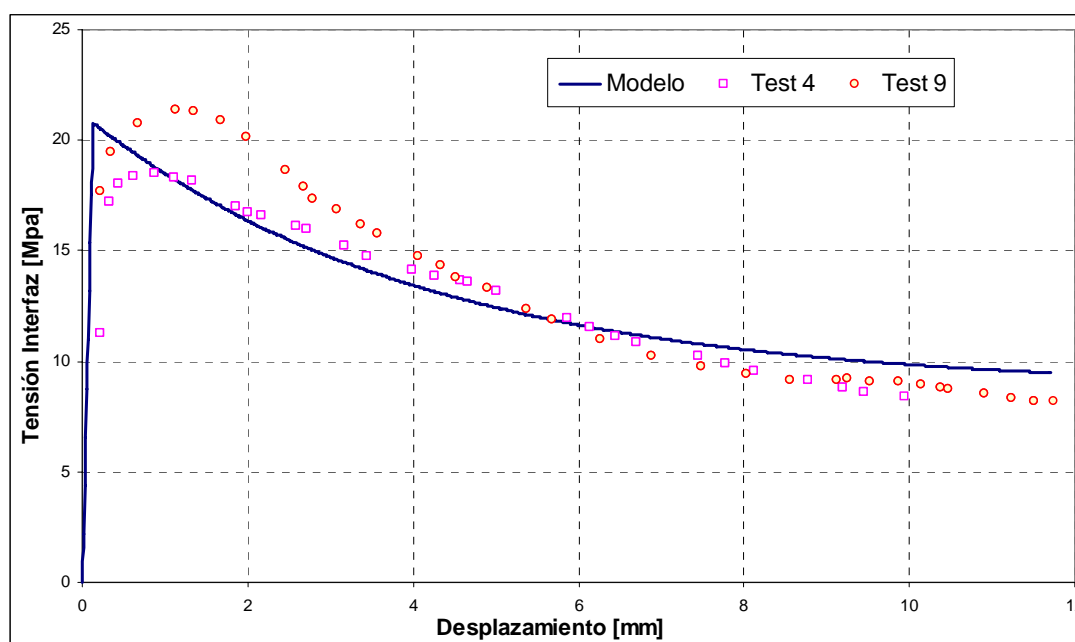
En la figura 9 se muestran las curvas tensión de la interfaz en función del desplazamiento impuesto al modelo y su comparación con los resultados experimentales. Teniendo en cuenta que el modelo desarrollado considera fibras lisas y los ensayos experimentales fueron realizados con fibras con nervaduras los resultados obtenidos muestran buena concordancia con los experimentales. Esto se logra mediante la adecuada calibración de los parámetros de la interfaz.



a) Carga transversal: 3.45 N/mm²



b) Carga transversal: 17.24 N/mm²



c) Carga transversal: 24.14 N/mm^2

Figura 9: Comparación con los resultados experimentales de Malvar.

7 CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un modelo constitutivo para materiales compuestos con fibras largas basado en la teoría de mezclas generalizadas, el cual, permite considerar el deslizamiento relativo entre componentes. El modelo presentado considera los efectos del deslizamiento relativo en el comportamiento de las componentes y del compuesto sin necesidad de discretizar explícitamente la interfaz.

Se llevó a cabo la implementación del modelo para considerar el deslizamiento relativo entre fibra y matriz presentando un modelo de interfaz introducido dentro de la componente fibra. La implementación computacional es sencilla y similar al de otros modelos multidisipativos llevando se a cabo en un programa de elementos finitos 3D.

Los ensayos presentados muestran la capacidad del modelo para representar el comportamiento de la interfaz con discretizaciones gruesas.

REFERENCIAS

- Car, E., 2000. Modelo Constitutivo Continuo para el Estudio del Comportamiento Mecánico de los Materiales Compuestos. Tesis Doctoral, Dpto. De Resistencia de Materiales Estructuras en la Ingeniería. Universidad Politécnica de Cataluña, España.
- Chaboche, J.L., Lesne, O., Pottier, T., 1998. Continuum damage mechanics of composites: towards a unified approach. *Damage Mechanics in Engineering Materials, Studies in Applied Mechanics 46, Elsevier Voyiadjis, Ju and Chaboche, Elsevier*. Vol 46, pp. 3-26.
- Ladeveze, P., Lubineau, D., Violeau and Marsal, D., 2006. A computational damage micromodel for laminate composites. *IUTAM Symposium on Multiscale Modelling of damage and Fracture Processes in Composite materials*, 1-12.
- Luccioni, B., López, D., and Danesi, R., 2005. Bond slip in Reinforced concrete elements. *J. Struct. Eng.-ASCE* 131 (11), 571-574.
- Luccioni, B., 2006. Constitutive model for fibre reinforced composite laminates. *J. Appl. Mech.-T ASME* 73 (6), 901-910.
- Luccioni, B., and López, D., 2002. Modelo para materiales compuestos con deslizamiento de fibras. *Análisis y cálculo de estructuras de materiales compuestos, S. Oller, ed., CIME, Barcelona, Spain*, 411-431.
- Malvar, L. J., Bond of Reinforcement under controlled confinement. *ACI Material Journal*, Title no. 89(6), 1992, pags.593-601.
- Toledo, M., Nallim, L., Luccioni, B., 2008. A micro-macromechanical approach for composite laminates. *Mechanics of Materials* 40 (2008) 885-906.
- Zhou, X. -F., Wagner, H. D., Nutt, S. R., 2001. Interfacial properties of polymer composites measured by push-out and fragmentation tests. *Composites: Part A* 32 (2001) 1543-1551.