

EFECTOS DE LA ORTOTROPÍA SOBRE EL FACTOR DE CONCENTRACIÓN DE TENSIONES: EXTENSIÓN DEL PROBLEMA DE KIRSCH

S. MAIZ^{*‡}, R. E. ROSSI^{*}, P. A. A. LAURA^{*§} y D. V. BAMBILL^{*‡}

^{*} Departamento de Ingeniería, Instituto de Mecánica Aplicada (IMA), Universidad Nacional del Sur

[§] Departamento de Física, Instituto de Mecánica Aplicada (IMA), Universidad Nacional del Sur,
Av. Alem 1253, B8000CPB, Bahía Blanca

[‡] Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)

E-mail: smaiz@uns.edu.ar; reossi@criba.edu.ar; ima@criba.edu.ar; dbambill@criba.edu.ar

Palabras Clave: Ortotropía, Concentración de Tensiones, Estado plano de tensiones

Resumen. *El problema de concentración de tensiones, resuelto y publicado por Kirsch en 1898 utilizando la clásica teoría matemática de la elasticidad bidimensional, marca una época en la elastomecánica ya que desde entonces sus resultados han sido utilizados con el objeto de corroborar la precisión relativa de otros métodos alternativos (tanto analíticos como experimentales). En el caso de materiales marcadamente ortótropos la información disponible en la literatura técnico-científica es escasa. Soluciones analíticas han sido propuestas por Lekhnitskii en uno de sus clásicos tratados y varios resultados numéricos han sido obtenidos recientemente. En este trabajo se presenta una síntesis de resultados obtenidos en el IMA y publicados en la literatura internacional donde se analiza la influencia de un orificio circular sobre la distribución de tensiones existentes en una placa rectangular ortótropa finita sometida a tracción uniforme en dos bordes opuestos. Se consideran diversos casos en los que la dirección principal elástica del material no coincide ni es normal a la dirección de la fuerza. En dichos casos la distribución de tensiones en la placa ortótropa no resultará simétrica con respecto a líneas paralelas o perpendiculares a la fuerza distribuida actuante y únicamente será simétrica con respecto al centro del orificio. En tanto las tensiones máximas no estarán en los extremos del diámetro normal al que actúan las fuerzas, sino en otros puntos. Se presentan resultados de los experimentos numéricos realizados por los autores utilizando el método de elementos finitos.*

1. INTRODUCCIÓN

Debido a la gran cantidad de nuevos materiales en la ingeniería con propiedades ortotrópicas, el diseñador debe tener en cuenta que su relación de rigidez juega un papel importante a la hora de proyectar y construir elementos estructurales* utilizados en el universo tecnológico. Más aún si éstas estarán solicitadas a grandes tensiones especialmente debidas a cambios bruscos de geometría, agujeros, etc.

El problema de concentración de tensiones, resuelto y publicado por Kirsch¹ en 1898 utilizando la clásica teoría matemática de la elasticidad bidimensional, marca una época en la elastomecánica ya que desde entonces sus resultados han sido utilizados con el objeto de corroborar la precisión relativa de otros métodos alternativos. El caso de una placa isótropa de dimensiones finitas con un orificio circular ha sido estudiado por muchos autores^{2,3}.

Lekhnitskii⁴ ha sido uno de los precursores en el tratamiento de materiales anisótropos y en su obra resuelve analíticamente el problema de una placa de dimensiones infinitas con un orificio circular. En otro trabajo más reciente⁵ se analiza la longitud de transición para placas finitas con distintas relaciones de ancho/diámetro del agujero y para dos casos de ortotropía.

La orientación de los ejes elásticos principales del material tiene gran importancia al elegir una configuración óptima del material en la pieza para la sollicitación que deba soportar. En investigaciones recientes realizadas por los autores⁶ se determinan valores del factor de concentración de tensiones en una placa ortótropa de dimensiones finitas y con un orificio

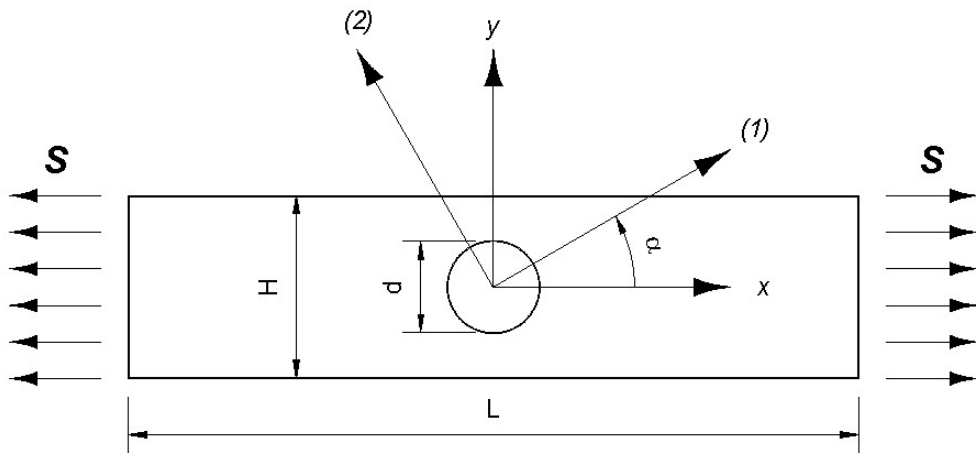


Figura1: Esquema del sistema estructural analizado.

* Es importante recordar el hecho de que ciertos procesos de fabricación (como el de laminado) generan características ortótropas en materiales como el acero y el aluminio, que en otras situaciones pueden ser considerados isótropos

circular de distintos tamaños. Aquí se toman como variables del análisis, la relación de módulos de elasticidad principales, la dirección de los ejes principales elásticos 1 y 2, y la relación entre ancho de la placa (H) y el diámetro del agujero (d). En el estudio se utilizó el código de Elementos Finitos ALGOR⁷ con el cual se modeló una placa rectangular de dimensiones fijas con elementos bidimensionales cuadrangulares y conformes. Los distintos modelos de placas difieren en el tamaño del orificio central. Se ensayaron diferentes mallados y se adoptaron los que arrojaron resultados más estables. Para cada uno de ellos se fue variando la orientación de los ejes elásticos principales del material (Figura 1) y la relación de módulos de elasticidad longitudinales.

2. MODELADO CON ELEMENTOS FINITOS

El primer paso fue fijar ciertos valores a los parámetros para los materiales ortótropos

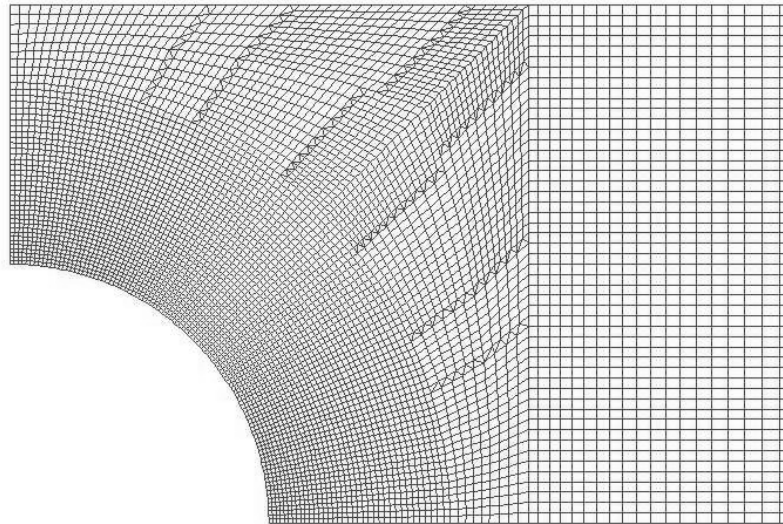


Figura 2 Detalle del mallado de un cuarto de la placa en la cercanía del orificio, para el caso $d/H = 0,5$

elegidos para este análisis numérico. Se adoptaron relaciones $\nu_1 = 0,3$ y $G_{12}/E_2 = 0,75$. Para la nomenclatura se utilizó la clásica notación de Lekhnitskii para identificar los parámetros de ortotropía, E_1 y E_2 representan los módulos de elasticidad de Young en las direcciones elásticas principales, G_{12} el módulo de elasticidad transversal, y ν_1 y ν_2 los coeficientes de Poisson, que cumplen con la relación espejo: $\nu_1 E_2 = \nu_2 E_1$.

Es importante destacar la dependencia de los resultados con la relación G_{12}/E_2 y en menor medida del valor de ν_1 . Por lo que el presente trabajo sólo está enfocado al estudio de la influencia de las características mencionadas (dimensiones del orificio, ortotropía, orientación de los ejes elásticos) en la concentración de tensiones.

Obviamente, para el caso de material isótropo la última relación es $G/E = \frac{1}{2(1+\nu)}$ habiéndose realizado los cálculos con $\nu = 0,3$.

Se modeló el sistema estructural tomando una relación de lados para la placa, $L/H = 5$, y con relaciones del tamaño de orificio $d/H = 0,8; 0,7; 0,6; 0,5; 0,4; 0,3; 0,2$ y $0,1$, (Figura 2).

Los ejes elásticos principales del material fueron tomados con distintas orientaciones con respecto a los lados de la placa (Figura 1): $\alpha = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ y 90° , con respecto al borde de mayor longitud de la placa, adoptado como eje x , que coincide también con la dirección de la carga de tracción S . Debido a la gran variedad de materiales disponibles con diversas características ortótropas, las relaciones elegidas de los módulos de elasticidad fueron: $E_1/E_2 = 1; 5; 10; 20$ y 40 . Con los resultados obtenidos para cada relación se presentan tablas y gráficos que muestran la variación del factor de concentración de tensiones cuando se giran los ejes elásticos del material.

En todos los casos se aplicó sobre la placa una tensión constante de tracción S en los bordes $x = \pm L/2$ (Figura 1), y se hallaron los valores del factor de concentración de tensiones correspondientes a las tensiones normales máxima $\sigma_{máx}$ y mínima $\sigma_{mín}$ que los definimos como:

$$K_{máx} = \frac{\sigma_{máx}}{S} \quad (1)$$

$$K_{mín} = \frac{\sigma_{mín}}{S} \quad (2)$$

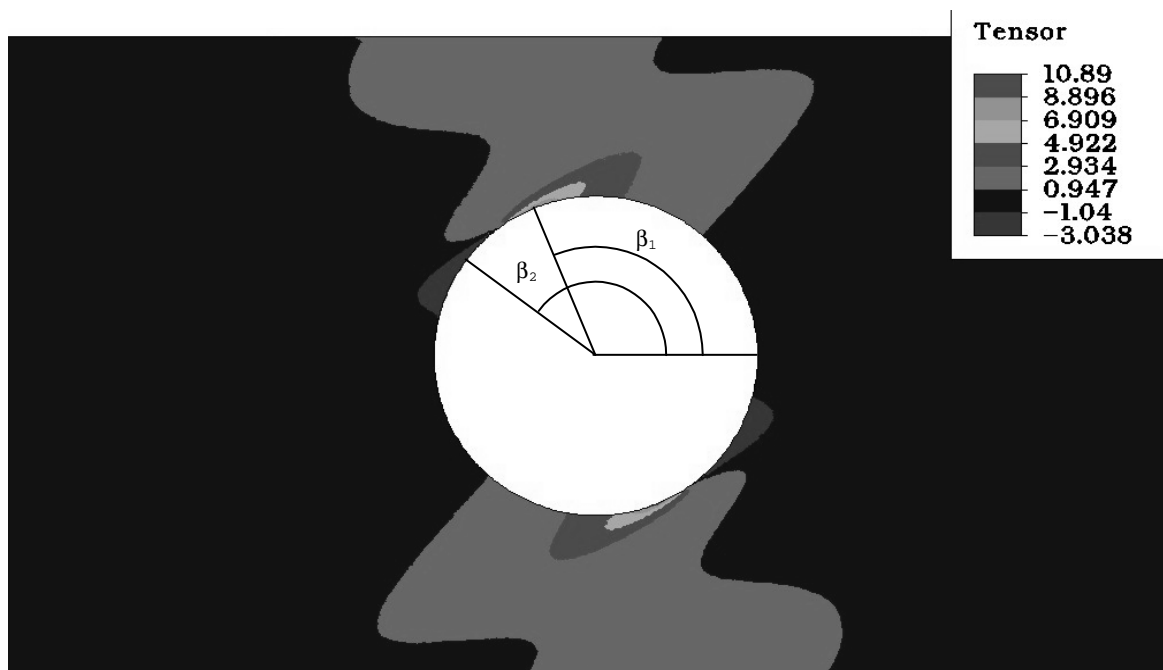


Figura 3: Distribución de la tensión normal máxima en el caso $d/H = 0,5$, $\alpha=30^\circ$ y $E_1/E_2=40$

Es obvio que en los casos donde la dirección principal elástica 1 del material ortótropo no coincide ni es normal a la dirección de la tensión aplicada, la distribución de tensiones no resulta simétrica con respecto a los ejes coordenados, sino únicamente con respecto al centro del orificio circular. Las tensiones máximas tampoco se producen en los extremos del diámetro normal a la dirección de la carga, sino en otros puntos del contorno del agujero.

En la Figura 3 se puede ver la distribución de tensiones en los bordes del agujero para una placa de relación $d/H = 0,50$ de un material ortótropo con relación $E_1/E_2=40$ dispuesto con sus ejes elásticos principales formando un ángulo $\alpha = 30^\circ$ con respecto a la dirección de carga S .

Con β_1 se indica el ángulo que corresponde al punto sobre el contorno del orificio donde se produce la máxima tensión de tracción. En forma análoga β_2 es el ángulo correspondiente al punto del contorno donde se produce la mínima tensión (máxima de compresión).

En este caso se comprueba que la máxima tensión ($K_{m\acute{a}x} = + 10,89$) se produce en un punto del contorno cuyo radio-vector forma un ángulo aproximado de 113° con el eje coordenado x y en su simétrico con respecto al centro del orificio ($\beta_1' = -67^\circ$).

La tensión mínima ($K_{m\acute{i}n} = -3,04$) se presenta en un punto cercano al anterior, donde el radio-vector forma con el eje x un ángulo de 135° ($\beta_2' = -45^\circ$).

3. RESULTADOS:

Los resultados hallados de los factores de concentración de tensiones se volcaron en las Tablas 1 a 8, correspondientes a las relaciones $d/H = 0,1$ a $0,8$ respectivamente.

Según se observan en la Tabla 1, $d/H=0,1$, las mayores tensiones de tracción se producen en el caso en que la dirección principal 1 coincide con la dirección de carga S . En tanto que la tensión de compresión más significativa, se produce cuando la primera dirección principal elástica, 1, resulta ser normal a dicha dirección de carga, para las relaciones de ortotropía analizadas.

Los puntos de mayor concentración de tensiones, $K_{m\acute{a}x}$, $K_{m\acute{i}n}$, están sobre los ejes de simetría de la placa analizada, tal como era de esperar. Al tomar otras orientaciones para los ejes elásticos del material $\alpha=30^\circ$, $\alpha=45^\circ$ y $\alpha=60^\circ$ se produce un desfase de la posición de los puntos en que se concentran las tensiones, lo cual se indica en las tablas con los ángulos β_1 y β_2 , en grados sexagesimales.

La relación de ortotropía, E_1/E_2 , es un factor que influye en los valores de las tensiones. Comparando el material isótropo con otro ortótropo de relación $E_1/E_2=5$, se observa que cuando los ejes elásticos son ejes de simetría ($\alpha=0^\circ$) para el factor de concentración de las tensiones de tracción se produce un incremento del orden de $+40\%$, sin embargo si los ejes elásticos asumen otra orientación el efecto se atenúa y se obtiene para $\alpha=30^\circ$ un $+25\%$, para $\alpha=45^\circ$ un $+11\%$, mientras que para $\alpha=60^\circ$ hay una disminución del 3% y de 18% para $\alpha=90^\circ$.

En la Tabla 2 se considera el caso de una placa similar, pero con un orificio del doble de diámetro del modelo de la Tabla 1, $d=0,2H$. Los valores de los factores de concentración de tensiones respectivos, son mayores en valor absoluto para todas las situaciones analizadas. Sin

Tabla 1: Valores del factor de concentración de tensiones para distintas disposiciones del material en la placa de relación $d/H = 0,1$

Propiedades		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
$\alpha=0^\circ$	$E_1/E_2=1$	3,05	90	-1,04	0
	$E_1/E_2=5$	4,29	90	-0,46	0
	$E_1/E_2=10$	5,41	90	-0,32	0
	$E_1/E_2=20$	6,95	90	-0,23	0
	$E_1/E_2=40$	9,06	90	-0,16	0
$\alpha=30^\circ$		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
	$E_1/E_2=5$	3,86	105	-0,93	158
	$E_1/E_2=10$	4,68	110	-1,10	148
	$E_1/E_2=20$	5,91	113	-1,48	140
	$E_1/E_2=40$	7,69	114	-2,19	135
$\alpha=45^\circ$		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
	$E_1/E_2=5$	3,41	111	-1,41	159
	$E_1/E_2=10$	3,88	118	-1,87	153
	$E_1/E_2=20$	4,73	123	-2,64	148
	$E_1/E_2=40$	6,06	125	-3,82	146
$\alpha=60^\circ$		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
	$E_1/E_2=5$	2,95	113	-1,88	165
	$E_1/E_2=10$	3,05	122	-2,63	161
	$E_1/E_2=20$	3,42	130	-3,76	158
	$E_1/E_2=40$	4,17	136	-5,44	157
$\alpha=90^\circ$		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
	$E_1/E_2=5$	2,49	90	-2,36	0
	$E_1/E_2=10$	2,42	90	-3,41	0
	$E_1/E_2=20$	2,36	90	-4,96	0
	$E_1/E_2=40$	2,32	90	-7,28	0

Tabla 2: Valores del factor de concentración de tensiones para distintas disposiciones del material en la placa de relación $d/H = 0,2$

Propiedades		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
$\alpha=0^\circ$	$E_1/E_2=1$	3,16	90	-1,12	0
	$E_1/E_2=5$	4,42	90	-0,48	0
	$E_1/E_2=10$	5,55	90	-0,34	0
	$E_1/E_2=20$	7,11	90	-0,24	0
	$E_1/E_2=40$	9,29	90	-0,17	0

$\alpha=30^\circ$		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
	$E_1/E_2=5$	4,01	105	-1,00	158
	$E_1/E_2=10$	4,89	110	-1,17	148
	$E_1/E_2=20$	6,27	113	-1,56	140
	$E_1/E_2=40$	8,33	114	-2,28	136

$\alpha=45^\circ$		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
	$E_1/E_2=5$	3,56	111	-1,53	159
	$E_1/E_2=10$	4,08	118	-2,04	153
	$E_1/E_2=20$	5,01	122	-2,86	148
	$E_1/E_2=40$	6,47	125	-4,13	146

$\alpha=60^\circ$		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
	$E_1/E_2=5$	3,08	112	-2,09	165
	$E_1/E_2=10$	3,18	121	-2,96	161
	$E_1/E_2=20$	3,56	130	-4,31	158
	$E_1/E_2=40$	4,30	135	-6,33	157

$\alpha=90^\circ$		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
	$E_1/E_2=5$	2,61	90	-2,69	0
	$E_1/E_2=10$	2,55	90	-4,01	0
	$E_1/E_2=20$	2,50	90	-6,08	0
	$E_1/E_2=40$	2,47	90	-9,30	0

Tabla 3: Valores del factor de concentración de tensiones para distintas disposiciones del material en la placa de relación $d/H = 0,3$

Propiedades		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
		$E_1/E_2=1$	3,39	90	-1,26
$\alpha=0^\circ$	$E_1/E_2=5$	4,65	90	-0,53	0
	$E_1/E_2=10$	5,80	90	-0,37	0
	$E_1/E_2=20$	7,40	90	-0,26	0
	$E_1/E_2=40$	9,69	90	-0,19	0

		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
$\alpha=30^\circ$	$E_1/E_2=5$	4,27	104	-1,10	158
	$E_1/E_2=10$	5,24	110	-1,29	148
	$E_1/E_2=20$	6,79	113	-1,69	140
	$E_1/E_2=40$	9,13	114	-2,43	136

		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
$\alpha=45^\circ$	$E_1/E_2=5$	3,80	110	-1,72	159
	$E_1/E_2=10$	4,34	118	-2,28	152
	$E_1/E_2=20$	5,34	122	-3,19	148
	$E_1/E_2=40$	6,89	125	-4,57	146

		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
$\alpha=60^\circ$	$E_1/E_2=5$	3,29	110	-2,39	165
	$E_1/E_2=10$	3,35	120	-3,42	160
	$E_1/E_2=20$	3,67	129	-5,02	158
	$E_1/E_2=40$	4,36	134	-7,43	156

		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
$\alpha=90^\circ$	$E_1/E_2=5$	2,85	90	-3,13	0
	$E_1/E_2=10$	2,79	90	-4,78	0
	$E_1/E_2=20$	2,76	90	-7,38	0
	$E_1/E_2=40$	2,73	90	-11,47	0

Tabla 4: Valores del factor de concentración de tensiones para distintas disposiciones del material en la placa de relación $d/H = 0,4$

Propiedades		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
		$E_1/E_2=1$	3,76	90	-1,43
$\alpha=0^\circ$	$E_1/E_2=5$	5,03	90	-0,59	0
	$E_1/E_2=10$	6,21	90	-0,41	0
	$E_1/E_2=20$	7,86	90	-0,29	0
	$E_1/E_2=40$	10,28	90	-0,21	0
		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
		$E_1/E_2=5$	4,67	104	-1,24
$\alpha=30^\circ$	$E_1/E_2=10$	5,70	109	-1,44	148
	$E_1/E_2=20$	7,40	113	-1,88	140
	$E_1/E_2=40$	10,00	114	-2,67	136
		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
		$E_1/E_2=5$	4,14	108	-1,96
$\alpha=45^\circ$	$E_1/E_2=10$	4,65	116	-2,60	152
	$E_1/E_2=20$	5,63	121	-3,62	148
	$E_1/E_2=40$	7,19	124	-5,17	145
		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
		$E_1/E_2=5$	3,61	105	-2,75
$\alpha=60^\circ$	$E_1/E_2=10$	3,58	113	-3,96	159
	$E_1/E_2=20$	3,75	125	-5,85	158
	$E_1/E_2=40$	4,32	132	-8,73	156
		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
		$E_1/E_2=5$	3,24	90	-3,64
$\alpha=90^\circ$	$E_1/E_2=10$	3,19	90	-5,62	0
	$E_1/E_2=20$	3,16	90	-8,75	0
	$E_1/E_2=40$	3,13	90	-13,69	0

Tabla 5: Valores del factor de concentración de tensiones para distintas disposiciones del material en la placa de relación $d/H = 0,5$

Propiedades		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
		$E_1/E_2=1$	4,36	90	-1,62
$\alpha=0^\circ$	$E_1/E_2=5$	5,65	90	-0,66	0
	$E_1/E_2=10$	6,86	90	-0,46	0
	$E_1/E_2=20$	8,59	90	-0,33	0
	$E_1/E_2=40$	11,15	90	-0,24	0
		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
		$E_1/E_2=5$	5,24	103	-1,42
$\alpha=30^\circ$	$E_1/E_2=10$	6,30	108	-1,65	146
	$E_1/E_2=20$	8,10	112	-2,15	140
	$E_1/E_2=40$	10,89	113	-3,04	135
		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
		$E_1/E_2=5$	4,65	104	-2,24
$\alpha=45^\circ$	$E_1/E_2=10$	5,01	113	-3,00	150
	$E_1/E_2=20$	5,86	120	-4,21	147
	$E_1/E_2=40$	7,32	123	-6,02	144
		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
		$E_1/E_2=5$	4,14	100	-3,16
$\alpha=60^\circ$	$E_1/E_2=10$	4,04	102	-4,60	158
	$E_1/E_2=20$	4,00	104	-6,87	157
	$E_1/E_2=40$	4,15	130	-10,37	155
		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
		$E_1/E_2=5$	3,85	90	-4,18
$\alpha=90^\circ$	$E_1/E_2=10$	3,81	90	-6,48	0
	$E_1/E_2=20$	3,77	90	-10,15	0
	$E_1/E_2=40$	3,73	90	-15,96	0

Tabla 6: Valores del factor de concentración de tensiones para distintas disposiciones del material en la placa de relación $d/H = 0,6$

Propiedades		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
		$E_1/E_2=1$	5,34	90	-1,83
$\alpha=0^\circ$	$E_1/E_2=5$	6,66	90	-0,75	0
	$E_1/E_2=10$	7,93	90	-0,52	0
	$E_1/E_2=20$	9,76	90	-0,37	0
	$E_1/E_2=40$	12,48	90	-0,28	0

		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
$\alpha=30^\circ$	$E_1/E_2=5$	6,14	100	-1,64	153
	$E_1/E_2=10$	7,13	106	-1,95	144
	$E_1/E_2=20$	8,90	111	-2,58	138
	$E_1/E_2=40$	11,74	113	-3,64	134

		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
$\alpha=45^\circ$	$E_1/E_2=5$	5,49	100	-2,60	156
	$E_1/E_2=10$	5,62	106	-3,55	148
	$E_1/E_2=20$	6,09	116	-5,08	145
	$E_1/E_2=40$	7,27	121	-7,35	143

		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
$\alpha=60^\circ$	$E_1/E_2=5$	5,06	96	-3,65	162
	$E_1/E_2=10$	4,95	96	-5,39	158
	$E_1/E_2=20$	4,92	97	-8,17	155
	$E_1/E_2=40$	4,97	99	-12,52	154

		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
$\alpha=90^\circ$	$E_1/E_2=5$	4,82	90	-4,73	0
	$E_1/E_2=10$	4,76	90	-7,38	0
	$E_1/E_2=20$	4,72	90	-11,60	0
	$E_1/E_2=40$	4,68	90	-18,33	0

Tabla 7: Valores del factor de concentración de tensiones para distintas disposiciones del material en la placa de relación $d/H = 0,7$

Propiedades		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
		$E_1/E_2=1$	7,01	90	-2,05
$\alpha=0^\circ$	$E_1/E_2=5$	8,41	90	-0,85	0
	$E_1/E_2=10$	9,79	90	-0,60	0
	$E_1/E_2=20$	11,78	90	-0,43	0
	$E_1/E_2=40$	14,72	90	-0,33	0
		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
		$E_1/E_2=5$	7,73	97	-1,97
$\alpha=30^\circ$	$E_1/E_2=10$	8,49	103	-2,46	140
	$E_1/E_2=20$	9,99	108	-3,35	135
	$E_1/E_2=40$	12,62	111	-4,76	132
		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
		$E_1/E_2=5$	7,08	96	-3,10
$\alpha=45^\circ$	$E_1/E_2=10$	7,09	98	-4,41	147
	$E_1/E_2=20$	7,23	100	-6,50	143
	$E_1/E_2=40$	7,64	101	-9,66	141
		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
		$E_1/E_2=5$	6,70	94	-4,22
$\alpha=60^\circ$	$E_1/E_2=10$	6,60	94	-6,42	156
	$E_1/E_2=20$	6,60	95	-9,93	154
	$E_1/E_2=40$	6,76	95	-15,47	153
		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
		$E_1/E_2=5$	6,46	90	-5,30
$\alpha=90^\circ$	$E_1/E_2=10$	6,40	90	-8,30	0
	$E_1/E_2=20$	6,35	90	-13,11	0
	$E_1/E_2=40$	6,31	90	-20,80	0

Tabla 8: Valores del factor de concentración de tensiones para distintas disposiciones del material en la placa de relación $d/H = 0,8$

Propiedades		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
		$E_1/E_2=1$	10,39	90	-2,28
$\alpha=0^\circ$	$E_1/E_2=5$	11,95	90	-0,98	0
	$E_1/E_2=10$	13,52	90	-0,68	0
	$E_1/E_2=20$	15,80	90	-0,50	0
	$E_1/E_2=40$	19,11	90	-0,39	0

		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
$\alpha=30^\circ$	$E_1/E_2=5$	11,08	95	-2,65	141
	$E_1/E_2=10$	11,61	97	-3,56	135
	$E_1/E_2=20$	12,49	100	-5,06	131
	$E_1/E_2=40$	14,15	105	-7,29	130

		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
$\alpha=45^\circ$	$E_1/E_2=5$	10,44	94	-3,97	163
	$E_1/E_2=10$	10,53	95	-5,98	142
	$E_1/E_2=20$	10,93	95	-9,16	140
	$E_1/E_2=40$	11,98	95	-14,07	139

		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
$\alpha=60^\circ$	$E_1/E_2=5$	10,03	92	-5,05	156
	$E_1/E_2=10$	9,98	93	-7,89	153
	$E_1/E_2=20$	10,11	93	-12,44	152
	$E_1/E_2=40$	10,73	94	-19,66	152

		K_{max}	β_1	K_{min}	β_2
$\alpha=90^\circ$	$E_1/E_2=5$	9,76	90	-5,88	0
	$E_1/E_2=10$	9,69	90	-9,25	0
	$E_1/E_2=20$	9,64	90	-14,67	0
	$E_1/E_2=40$	9,60	90	-23,38	0

embargo la ubicación de los puntos de máximo esfuerzo para cada una de las direcciones α de los ejes elásticos no cambia significativamente, en referencia a β_1 y β_2 al borde del orificio para $d=0,1H$ y $d=0,2H$. Un comportamiento similar se observa en la Tabla 3 con respecto a la posición de los puntos de mayor concentración de tensiones (para $d/H=0,3$).

A continuación se presentan gráficos que muestran la variación de los factores de concentración de tensiones con respecto a las dimensiones del orificio de la placa traccionada de la Figura 1.

En la Figura 4 se presenta una comparación de los valores obtenidos en el presente estudio con la obtenida por Peterson⁸ para factores de concentración de tensiones de tracción. Se observa una excelente concordancia entre ambos resultados para materiales isótropos.

En la Figura 5, se muestran cómo varían los factores de concentración de tensiones de compresión para los mismos modelos de placa isótropa con orificio.

Las Figuras 6 a 9, muestran cómo varían los factores de concentración de tensiones de tracción, para distintos materiales ortótropos ($E_1/E_2 = 5; 10; 20; 40$), según la orientación de las direcciones elásticas y el tamaño del orificio.

En la Figura 6, $E_1/E_2 = 5$, se observa que los valores del factor de concentración de tensiones para la orientación $\alpha = 60^\circ$ tienden levemente a aproximarse a los valores de la orientación $\alpha = 90^\circ$ a partir de la relación $d/H = 0,5$ y mayores ($d/H = 0,6, 0,7, 0,8$). Este efecto se intensifica si se consideran materiales con ortotropía más acentuada, $E_1/E_2 = 10, 20, 40$; como se ve en las figuras 7, 8 y 9.

En las figuras 10 a 13, se presentan gráficos de los factores de concentración de tensiones de compresión en función de la geometría de la placa y del ángulo de orientación de las direcciones principales elásticas de los materiales ya analizados.

Cuando la dirección elástica principal 1 coincide con el eje x (eje de simetría), la curva de $\alpha = 0$ tiene poca variación con el tamaño del orificio, situación que se repite al aumentar la relación E_1/E_2 . En tanto que si la dirección elástica principal 1 coincide con el otro eje de simetría, eje y , la dependencia del factor de tensiones de compresión tiende a ser lineal y con mayor pendiente al incrementarse la relación de ortotropía.

Las curvas de $\alpha = 30^\circ, 45^\circ$ y 60° , permanecen acotadas entre las dos mencionadas según se observa en las Figuras 10 a 13.

4. CONCLUSIONES

Las tensiones normales extremas $\sigma_{m\acute{a}x}$ y $\sigma_{m\acute{i}n}$ aumentan en valor absoluto con el tamaño del orificio para todos los materiales ortótropos analizados.

Comparando los casos de placas con ejes elásticos rotados $\alpha = 30^\circ, 45^\circ$ y 60° , se observa que para orificios del orden de $d/H=0,3$ ó menores, la posición de los puntos del contorno con tensión extrema (β_1 y β_2) es prácticamente la misma en todos ellos.

Cuando los orificios son de mayor tamaño ($d = 0,4 H$ a $0,8 H$) la posición de los puntos de tensión extrema se desplazan sobre el contorno del mismo, siendo más significativa la variación cuanto mayor es el tamaño del orificio con respecto a la dimensión H de la placa.

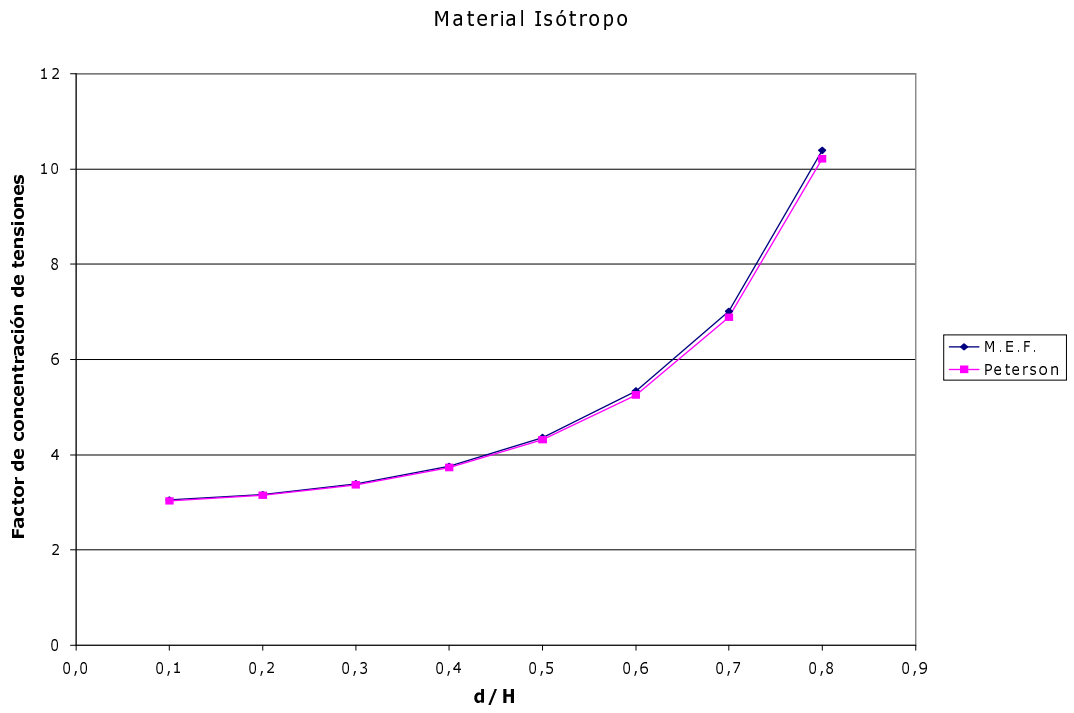


Figura 4: Comparación de MEF con Peterson

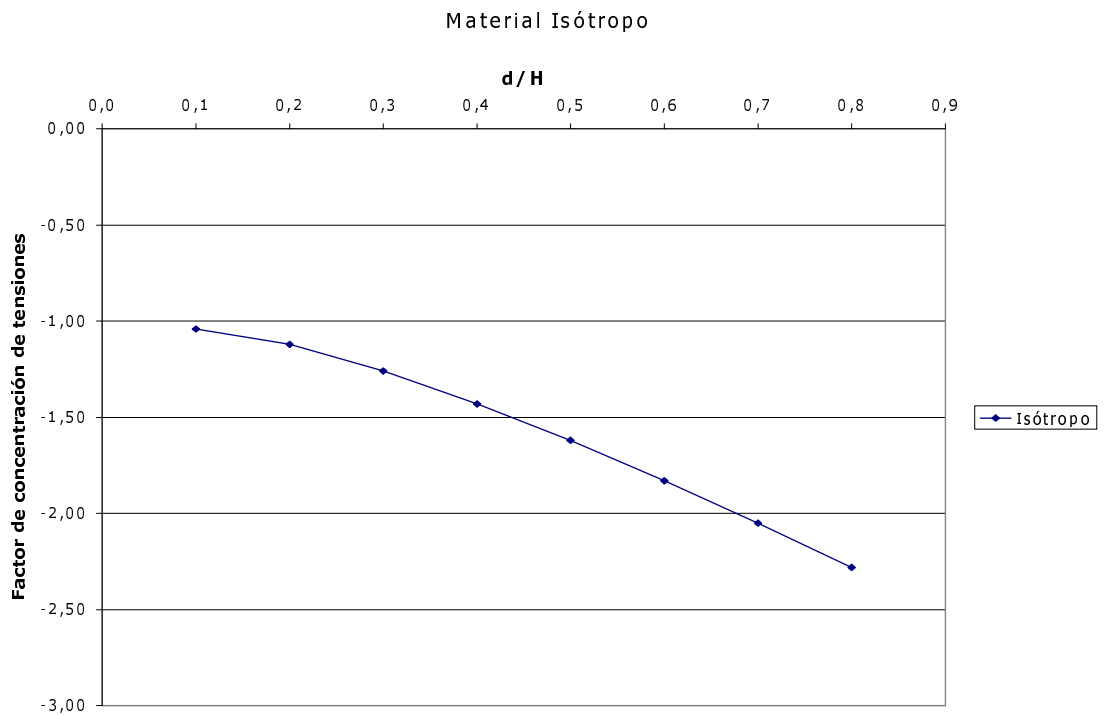


Figura 5: Factor de tensiones de compresión

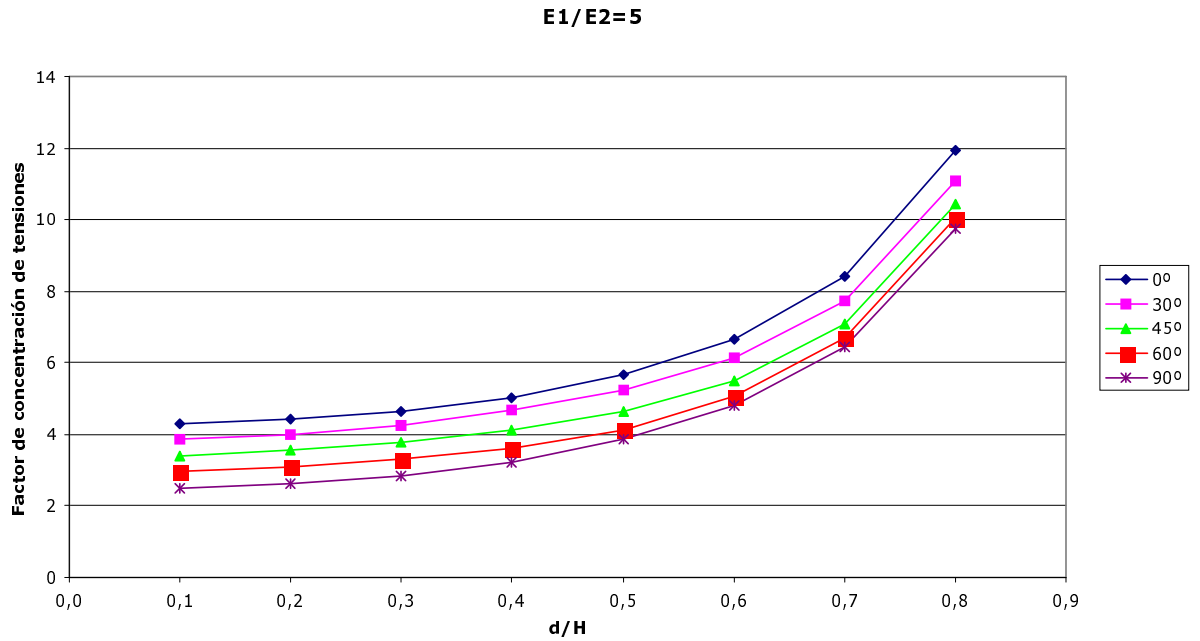


Figura 6: Factor de concentración de tensiones de tracción

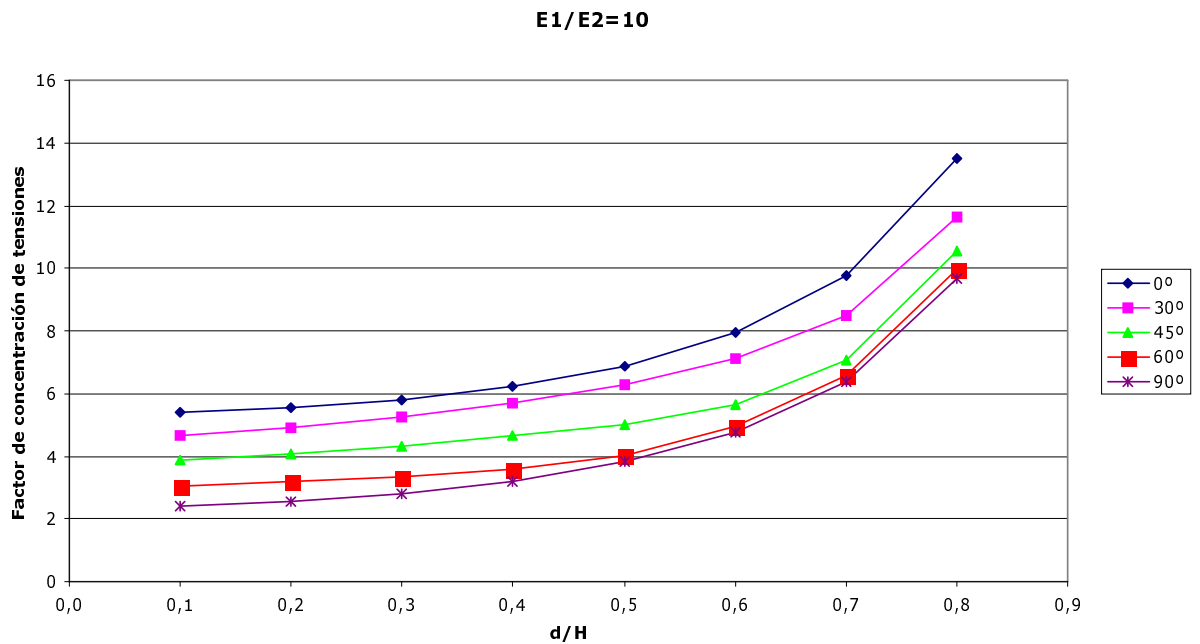


Figura 7: Factor de concentración de tensiones de tracción

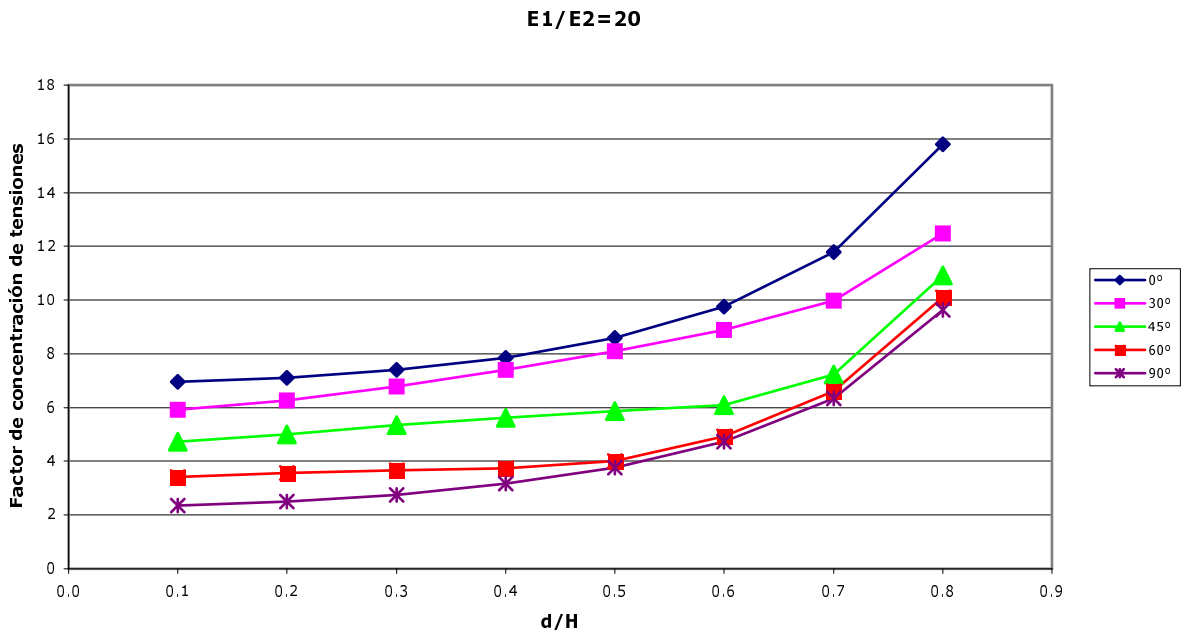


Figura 8: Factor de concentración de tensiones de tracción

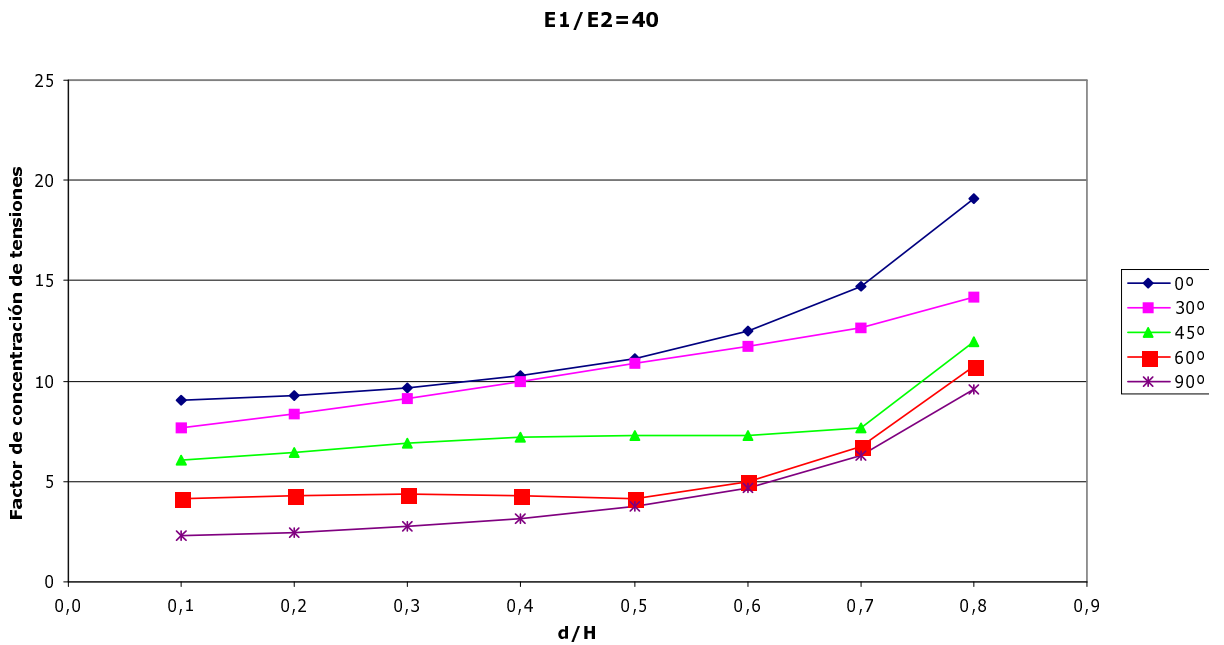


Figura 9: Factor de concentración de tensiones de tracción

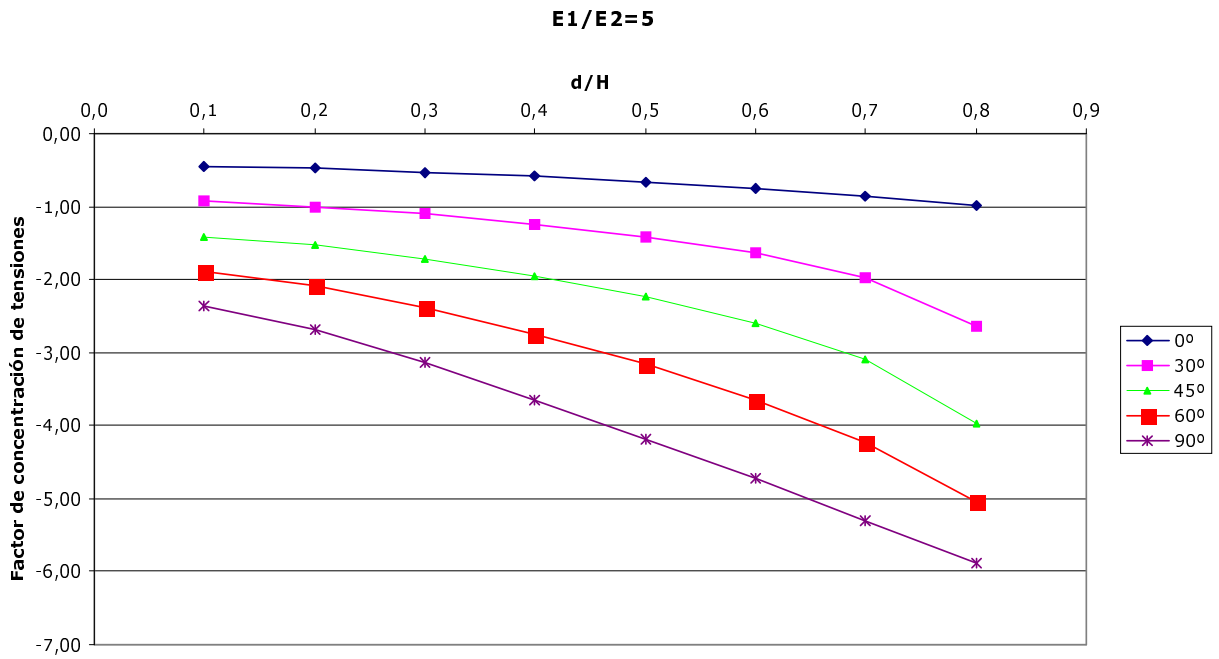


Figura 10: Factor de concentración de tensiones de compresión

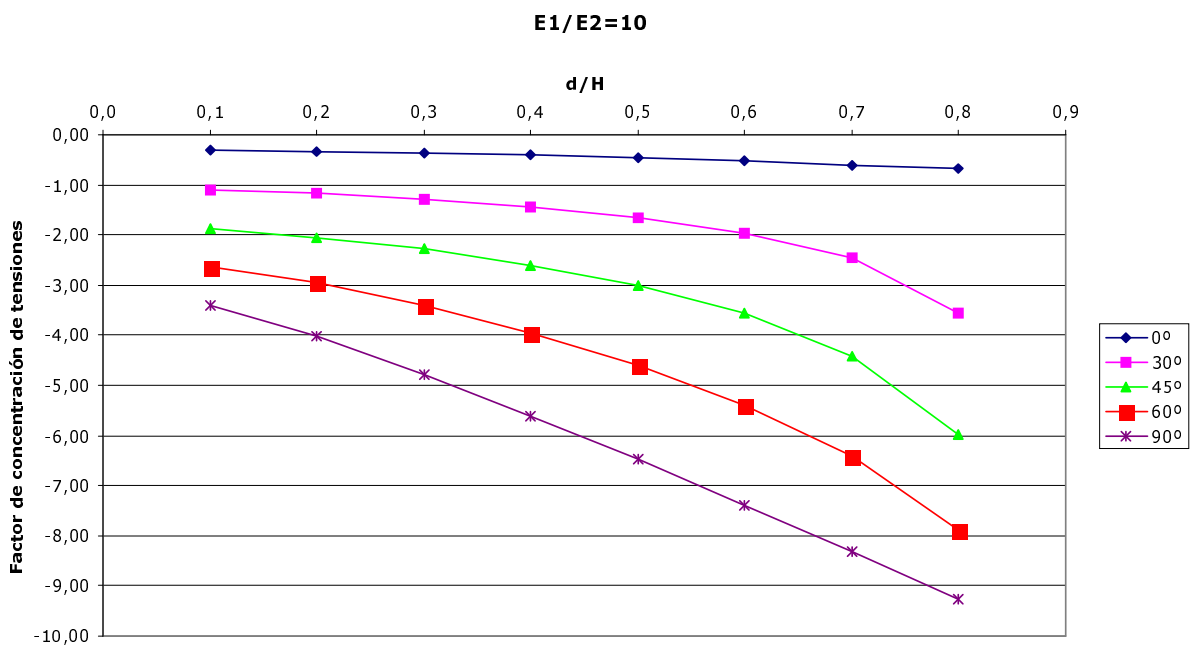


Figura 11: Factor de concentración de tensiones de compresión

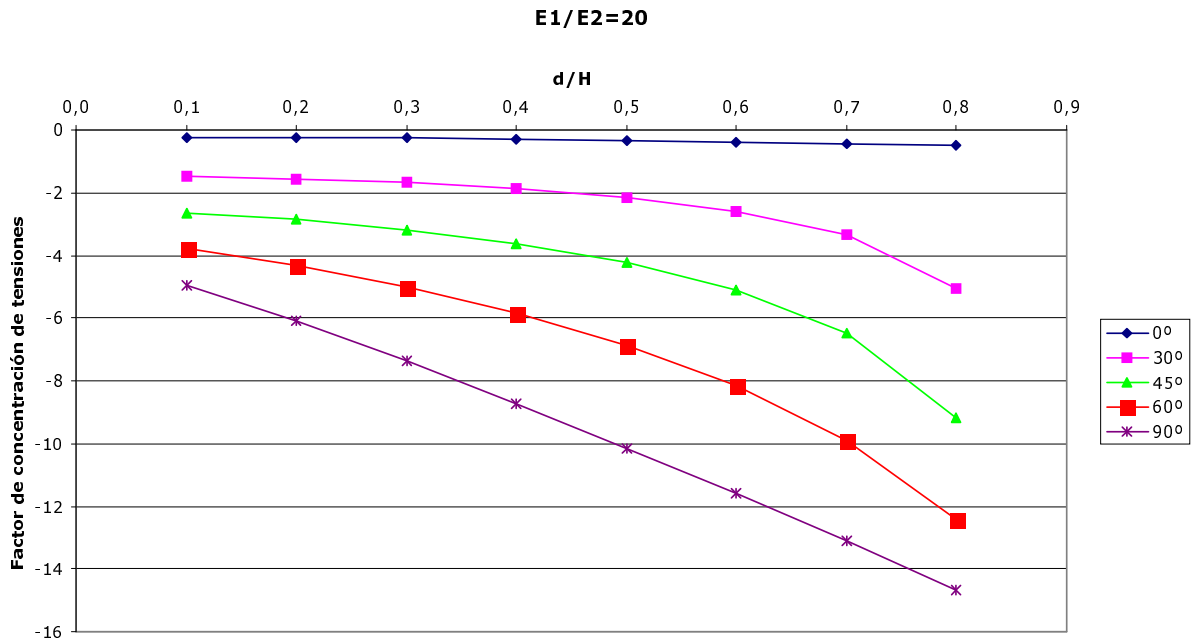


Figura 12: Factor de concentración de tensiones de compresión

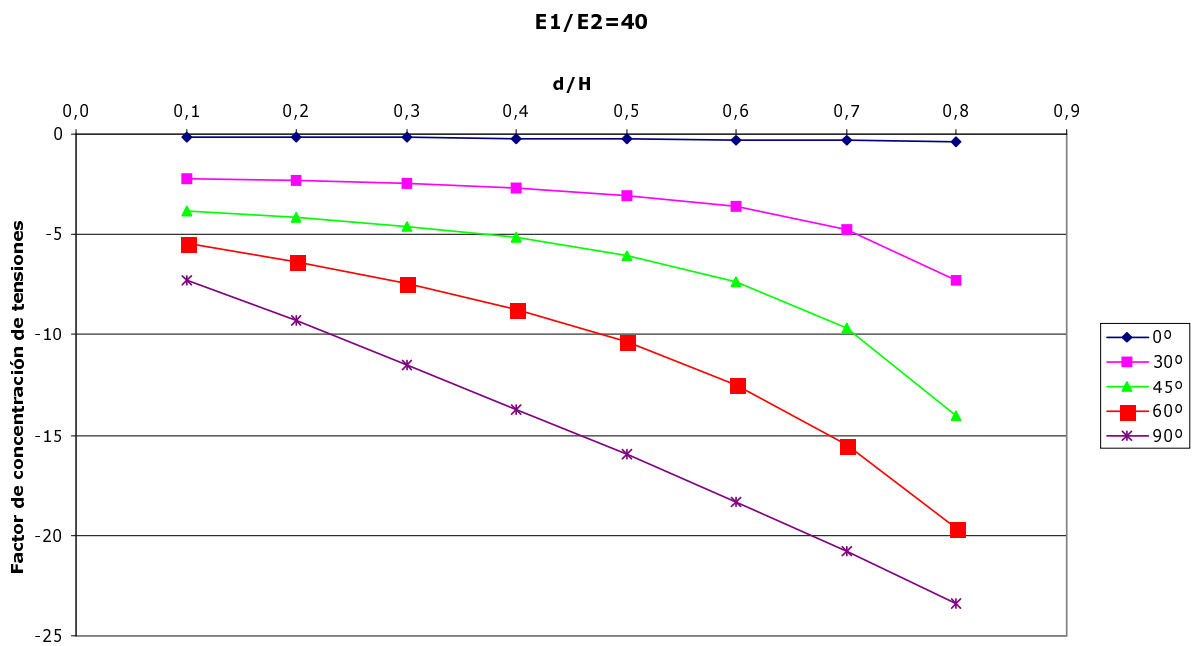


Figura 13: Factor de concentración de tensiones de compresión

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido auspiciado por el CONICET (Proyecto PIP02152) y la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur (Proyectos 24/J024 y 24/J038).

REFERENCIAS

- ¹ Laura P. A. A. and Sonzogni V.(1997). *Kirsch Problem and the Lower Natural Frequencies of a Clamped Square-Plate*. Ocean Engineering Vol. 24 No. 10, pp. 985-988
- ² Timoshenko, S. and Goodier, J. N. (1951)*Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, New York.
- ³ Laura P. A. A. y Maurizi M. J. *Introducción a la Mecánica del Sólido*, EUDEBA, Buenos Aires (1979)
- ⁴ Lekhnitskii, S. G., *Anisotropic Plates*. Gordon and Breach Science Publishers, New York (1968)
- ⁵ Sánchez, M., Troyani, N. *Factor Teórico de Concentración de esfuerzos en piezas cortas de materiales anisotrópicos*. ENIEF 2003, Mecánica Computacional, Vol. XXII, 2135-2144. (2003).
- ⁶ Bambill, D.V., Maiz, S., Rossi, R. E. y Laura, P. A. A. *Numerical Experiments on the Determination of Stress Concentration Factors in an Orthotropic, Finite Plate with a Circular Hole Subjected to Uniform, In-Plane Loading in One Direction*. Sometido a publicación, (2004).
- ⁷ ALGOR. *Professional Mech/VE*, Algor Inc., Pittsburgh, PA. USA. (2001).
- ⁸ Peterson, R. E., *Stress Concentration Factors*, John Wiley, New York (1974).