

## **PÓRTICOS ESPACIAIS ENRIJECIDOS POR NÚCLEO: UMA ABORDAGEM PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

**José M. F. Cruz<sup>a,b</sup>, Paulo C.O. Queiroz<sup>a,b</sup>, Carlos A.T. Lucena<sup>a,b</sup>, Angelo V.Mendonça<sup>b</sup>**

*<sup>a</sup>Programa de Pós-graduação de Engenharia Mecânica, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, Paraíba, Brasil.*

*<sup>b</sup>Laboratório de Modelos Físicos Qualitativos e Computacionais, Universidade Federal de Paraíba, João Pessoa, Paraíba, Brasil*

**Keywords:** MEC, Núcleo de Rigidez, Edifícios Altos, Torção não uniforme.

**Abstract.** Nesse artigo é apresentada uma estratégia para a montagem das matrizes de influência dos pórticos espaciais enrijecidos por núcleo usando o método dos elementos de contorno. Além disso, a representação integral dos pórticos é feita usando soluções fundamentais que levam em conta os efeitos das deformações por cortante no problema da flexão de cada barra. Para o problema do núcleo a representação integral da torção não uniforme e suas expressões algébricas são também investigadas. Respostas numéricas são apresentadas para problemas típicos.

## 1 INTRODUÇÃO

A superestrutura dos edifícios é constituída por subsistemas estruturais horizontais e verticais. Os primeiros têm como principais elementos as lajes, cuja função precípua é colher as ações verticais e transportá-las para os pórticos. Já os sistemas verticais, que são responsáveis por transportar as ações verticais recebidas das lajes até as fundações, têm também a responsabilidade de garantir a estabilidade global, principalmente das edificações altas e muito altas, isto é, com grande índice de esbeltez geométrico ( $\lambda_{geo} = B/H$ , onde  $B$  é a menor dimensão horizontal e  $H$  a altura do edifício). Esses sistemas estruturais verticais são tradicionalmente formados a partir de arranjos de pórticos planos e pilares de grande rigidez e, mais modernamente pelo pórtico espacial definido pelos pilares e vigas da estrutura da edificação, aqui são chamados de pórticos espaciais padrão (PEP).

No caso dos edifícios muito altos, mais suscetíveis aos deslocamentos horizontais, o problema da estabilidade global se reveste de especial importância, razão pela qual é levado em consideração desde o projeto arquitetônico até o projeto estrutural (Dias, 2004). Neles, a utilização do PEP como elemento de contraventamento induz ao dimensionamento de elementos estruturais verticais muito robustos, elevando o custo e interferindo na utilização e estética da edificação. Para contornar tal situação os núcleos de grande rigidez passam a compor o sistema de contraventamento enrijecendo os PEP, surgindo assim os pórticos espaciais enrijecidos por núcleo (PEEN) (Smith e Coull, 1991). Como decorrência na análise estrutural desses edifícios tem sido levando em conta, além dos efeitos da interação pórtico-placas, os efeitos da interação pórtico-núcleo, placas-núcleos, etc. Sendo que em vários estudos, a preocupação premente é o caso do enrijecimento do pórtico espacial por prumadas de núcleos estruturais, sem levar em conta o efeito de diafragma rígido das lajes.

As representações matemáticas dos problemas físicos são, em geral, expressas em equações diferenciais e/ou integrais. Uma das maneiras para construir as soluções dessas equações, ditas governantes, é via métodos analíticos, contudo, essas soluções estão disponíveis para poucos casos, tais como a análise elástica de estruturas aperticadas prismáticas isoladas sob carregamento estático. Para o caso em que há interação do pórtico com outros elementos estruturais do edifício (tais como placas, paredes estruturais, núcleos de rigidez, etc.) as soluções analíticas, dificilmente estão disponíveis, requerendo, portanto, a utilização de procedimentos aproximados para a construção das soluções: os métodos numéricos. Dentre as técnicas numéricas destacam-se principalmente o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Elementos de Contorno (MEC), e o mais popular deles, o Método dos Elementos Finitos (MEF).

Na análise dos pórticos e demais estruturas reticuladas o problema da flexão é levado em conta via de regra a partir de dois modelos usuais. O modelo de Euler-Bernoulli quando a deformação por cortante pode ser desprezada e o modelo de Timoshenko combinado com a técnica numérica associada ao MEF (Kapur, 1966; Nickel e Secor, 1972). O modelo proposto por Timoshenko é, para situações específicas, bem mais próximo da realidade do que aquele advindo da teoria de Euler-Bernoulli (Timoshenko e Young, 1961; Augarde e Deeks, 2008). Tal “refinamento” se deve à contribuição do efeito do cisalhamento no ângulo de giro resultante, verificado em vigas sob a ação de carregamentos quaisquer, perceptível nos casos com moderados índices de esbeltez ( $\lambda = L/h$ , relação entre o comprimento  $L$ , da barra e a altura  $h$ , da sua seção transversal).

Alternativamente ao MEF, só recentemente soluções numéricas baseadas na filosofia do MEC foram apresentadas para o estudo da deformação por cortante em flexão de barras. Antes (2003) desenvolveu, também via MEC, a solução para o problema de flexão estática

utilizando o modelo de Timoshenko. Já em Antes et al.(2004), esse modelo foi incorporado nas representações integrais de pórtico plano em regime dinâmico e estratégias convenientes de montagem foram utilizadas para obtenção de um sistema algébrico simétrico para o MEC. Observa-se, assim, que as análises numéricas dos PEP (sem enrijecimento) tem sido feita utilizando-se predominantemente o MEF (Taranah, 1968; Petyt, 1990;) , sendo sensivelmente menos freqüente as soluções obtidas com o MEC (Sapountzakis e Mokos, 2003).

Quando o empenamento da seção transversal de um membro não está restringido, o momento torçor é calculado a partir das tensões tangenciais de Saint-Venant (1855). Neste caso, o ângulo de torção por unidade comprimento permanece constante o que é geralmente denominado de torção uniforme (Saint-Venant). Contudo, nos casos mais gerais, o empenamento exibe distribuições não-uniforme ao longo do eixo longitudinal da barra, de forma que a representação mais usual para este fenômeno é o modelo de Vlasov (1961). O problema de torção não-uniforme em barras isoladas também tem sido modelado pelo MEC, tanto em casos multiconectados quanto em casos simples (Katsikadelis e Sapountzakis, 1985; Sapountzakis,2000).

Quando o pórtico espacial é enrijecido com um núcleo de rigidez, para melhorar seu desempenho como sistema de contraventamento, as análises numéricas recaem quase que exclusivamente em modelos de elementos finitos ou diferenças finitas (Onu, 1990; Mori, 1992; Matias Junior, 1997; Torres, 1999; Souza Junior, 2001). Salvo melhor juízo, registros sobre a representação do MEC, considerando o enrijecimento conferido pelo núcleo estrutural no pórtico espacial, ainda não foram publicados. Assim, este artigo representa uma contribuição à utilização do MEC nas análises dos pórticos normais (não enrijecidos) e dos enrijecidos. Sendo, portanto, o problema revisitado e re-equacionado para compatibilizar os efeitos da torção não-uniforme, da flexão bidirecional e da tração, segundo a metodologia do método dos elementos de contorno.

Desse modo, apresentam-se nesse trabalho as soluções fundamentais dos elementos que representam o núcleo, aqui considerado como um conjunto de barras de seção transversal aberta de paredes delgadas, as quais são aplicadas a teoria de flexo-torção de Vlasov (1961); sendo apresentadas também estratégias de geração de sistemas algébricos baseadas no MEC representativo dos PEENs. As técnicas de geração da representação algébrica dessas estruturas consistem na utilização de uma seqüência conveniente de transformações em sistemas de referências e em condições de compatibilidade de deslocamentos e de equilíbrio de forças.

## **2 EQUAÇÕES GOVERNANTES DA BARRA NO SISTEMA LOCAL**

Nesta seção são discutidas as representações matemáticas dos problemas definidos localmente na barra, uma vez que ela é a unidade básica que compõe os pórticos espaciais.

### **2.1 Pórtico espacial não-enrijecido ou padrão (PEP)**

Para análise de pórticos espaciais é necessário estudar em cada uma das suas barras: a) tração axial e b) flexão bidirecional e c) torção. O modelo matemático para esses problemas requer adoção de algumas hipóteses: barra prismática; material isótropo e elastolinear; campos suaves para os deslocamentos e para as deformações; conservação da planicidade da seção transversal; torção uniforme ou de Saint-Venant (empenamento uniforme das seções transversais), supressão do efeito de Poisson; flexão segundo as direções principais de inércia.

No caso da flexão há uma condição adicional quanto ao posicionamento relativo entre a normal da seção e a linha neutra: se a ortogonalidade é assumida, o modelo Euler-Bernoulli é

representado; já o modelo de Timoshenko não exige necessariamente a ortogonalidade, o que implica fisicamente na incorporação da deformação por cortante (distorção transversa não nula).

A equação governante do problema da tração axial é a Eq. (1), na qual  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal;  $A$ , a área da seção transversal;  $u(x)$ , o deslocamento axial e  $q_x(x)$  é a carga distribuída ao longo da barra. A Eq. (1) pode ser reescrita como uma equação integral equivalente, Eq. (2), utilizando-se a técnica dos resíduos ponderados:

$$EA \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + q_x(x) = 0 \quad (1)$$

$$u(\xi) + [u(x)N^*(x-\xi)]_{-a}^a = [N(x)u^*(x-\xi)]_{-a}^a + \int_{-a}^a [q_x(x)u^*(x-\xi)] dx \quad (2)$$

Sendo as expressões  $u^*(x-\xi) = -\frac{1}{2EA}|x-\xi|$  e  $N^*(x-\xi) = EAu^*(x-\xi) = -\frac{1}{2}\text{sgn}(x-\xi)$  as soluções fundamentais da equação integral, indicadas na Eq. (2), onde  $\text{sgn}$  denota a função sinal;  $x$ , o ponto-campo e  $\xi$ , o ponto-fonte.

Após a colocação do ponto-fonte nas extremidades da barra,  $\xi = -a$  e  $\xi = a$ , vide Figura 1, e o cálculo das integrais da Eq. (2), obtém-se a Eq. (3), representação algébrica da barra axialmente carregada no sistema local de coordenadas (slr):

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} + 1/2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \frac{1}{2EA} \begin{bmatrix} 0 & -L \\ L & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{ui} \\ f_{uj} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Onde os deslocamentos axiais nodais são:  $u_i = u(x = -a)$  e  $u_j = u(x = a)$ ; já os esforços axiais nodais são:  $N_i = N(x = -a)$  e  $N_j = N(x = a)$ ; o vetor de força nodal fica:  $f_{ui} = f_{uj} = pL^2 / (4EA)$  sendo o comprimento  $L$  da barra igual a  $2a$ . Os sistemas locais estão indicados na Figura 1.

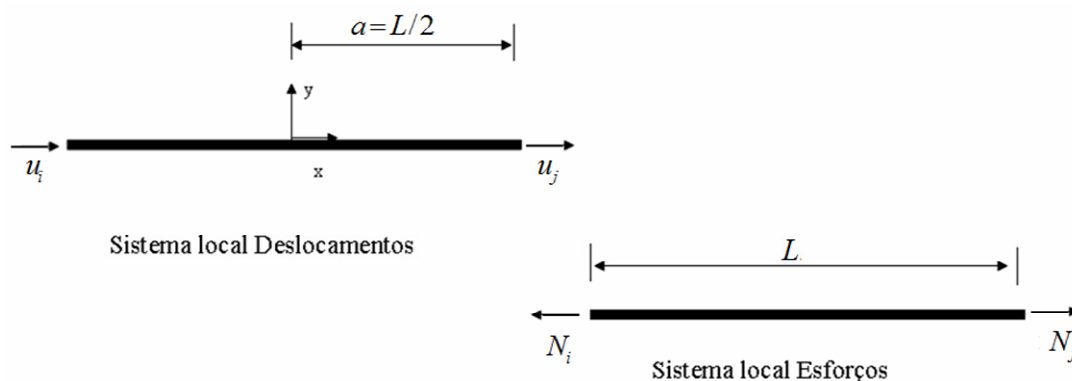


Figura 1: Sistemas locais de referência da tração axial

As equações diferenciais governantes do problema de flexão de barras sob as hipóteses de Timoshenko são:

$$\begin{aligned}
 D_1 \frac{d^2 v(x)}{dx^2} + D_1 \frac{d\varphi_z(x)}{dx} &= -q_y(x) \\
 -D_1 \frac{dv(x)}{dx} + D_2 \frac{d^2 \varphi_z(x)}{dx^2} - D_1 \varphi_z(x) &= -m_z(x)
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Com,  $D_1 = \kappa GA$  e  $D_2 = EI_z$ , sendo:  $I_z$  o momento de inércia em  $z$ ,  $\kappa$  o fator de forma da seção,  $E$  e  $G$  são os módulos de elasticidade longitudinal e transversal respectivamente,  $v(x)$  o deslocamento transversal na direção de  $y$  e  $\varphi_z(x)$  a rotação da seção transversal em  $z$ ;  $q_y(x)$  o carregamento transversal e  $m_z(x)$  o momento distribuído.

O sistema de equações diferenciais, Eq. (4), pode ser transformado em um sistema de equações integrais equivalentes através da técnica dos resíduos ponderados, obtendo-se uma forma análoga àquela dada por Antes (2003).

$$\begin{aligned}
 v(\xi) + [Q_{qy}^*(x-\xi)v(x)]_{-a}^a + [M_{qz}^*(x-\xi)\varphi_z(x)]_{-a}^a &= [Q_y(x)v_q^*(x-\xi)]_{-a}^a + [M_z(x)\varphi_{zq}^*(x-\xi)]_{-a}^a + \int_{-a}^a q_y(x)v_q^*(x-\xi)dx \\
 \varphi_z(\xi) + [Q_{my}^*(x-\xi)v(x)]_{-a}^a + [M_{mz}^*(x-\xi)\varphi_z(x)]_{-a}^a &= [Q_y(x)v_m^*(x-\xi)]_{-a}^a + [M_z(x)\varphi_{zm}^*(x-\xi)]_{-a}^a + \int_{-a}^a q_y(x)v_m^*(x-\xi)dx
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Onde os deslocamentos transversais e os angulares das seções transversais nodais são respectivamente:  $v_i = v(x = -a)$ ,  $v_j = v(x = a)$ ,  $\varphi_{zi} = \varphi_z(x = -a)$ ,  $\varphi_{zj} = \varphi_z(x = a)$ ; já os esforços nodais (força cortante e momento fletor em  $z$ ) são, na ordem:  $Q_{yi} = Q_y(x = -a)$ ,  $Q_{yj} = Q_y(x = a)$ ,  $M_{zi} = M_z(x = -a)$  e  $M_{zj} = M_z(x = a)$ . Os sistemas locais para o problema de flexão em  $z$  estão indicados na Figura 2.

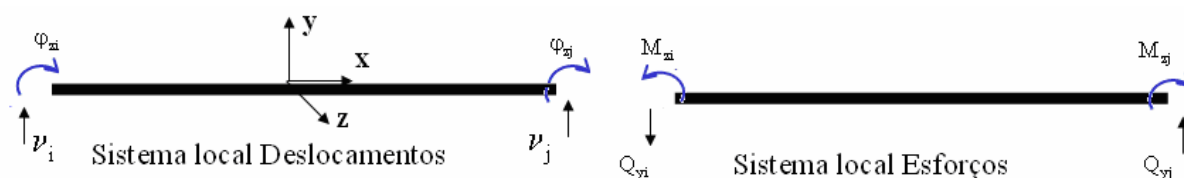


Figura 2: Sistemas locais de referência da flexão em  $z$

Outros símbolos importantes que figuram na Eq. (5) representam as soluções fundamentais da flexão do modelo de Timoshenko, que em Antes (2003) são derivadas a partir da função  $\psi = -|x - \xi|^3 / 12D_1D_2$ .

Neste artigo, partiu-se, alternativamente, da função  $\psi = -\{x - \xi^3 - 3|x - \xi|^2 L + 2L^3\} / 12D_1D_2$ . Assim, os valores explícitos dessas soluções fundamentais ficam:

$$\begin{aligned}
 v_q^* &= D_2 \frac{d^2 \psi}{dx^2} - D_1 \psi = \frac{L^3}{12EI_z} \left\{ \left| \frac{x - \xi}{L} \right|^3 - 3 \left| \frac{x - \xi}{L} \right|^2 + 2 \right\} - \frac{L}{12EI} \frac{6EI}{\kappa GA} \left\{ \left| \frac{x - \xi}{L} \right| - 1 \right\}, \\
 v_m^*(x - \xi) &= -D_1 \frac{d\psi}{dx} = \frac{L^2}{4EI_z} \left\{ \left| \frac{x - \xi}{L} \right|^2 - 2 \left| \frac{x - \xi}{L} \right| \right\} \text{sgn}(x - \xi), \\
 M_q^*(x - \xi) &= D_2 \varphi_q^*(x - \xi) = -\frac{L}{2} \left\{ \left| \frac{x - \xi}{L} \right| - 1 \right\},
 \end{aligned}$$

$$M_m^*(x-\xi) = D_2 \varphi_m^*(x-\xi) = -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x-\xi),$$

$$\varphi_q^*(x-\xi) = D_1 \frac{d\psi}{dx} = -\frac{L^2}{4EI_z} \left\{ \left| \frac{x-\xi}{L} \right|^2 - 2 \left| \frac{x-\xi}{L} \right| \right\} \operatorname{sgn}(x-\xi),$$

$$\varphi_m^* = D_1 \frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{L}{2EI_z} \left\{ \left| \frac{x-\xi}{L} \right| - 1 \right\},$$

$$Q_q^* = D_1 \left( \varphi_q^* + \frac{dw_q^*}{dx} \right) = -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x-\xi), \quad Q_m^* = D_1 \left( \varphi_m^* + \frac{dw_m^*}{dx} \right) = 0,$$

Após a colocação do ponto-fonte nas extremidades da barra ( $\xi = -a; \xi = a$ ) e o cálculo das integrais da Eq. (5), a representação algébrica da barra sob flexão no sistema local de coordenadas fica:

$$\begin{Bmatrix} v_i \\ \varphi_{zi} \\ v_j \\ \varphi_{zj} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 & -L/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 & L/2 \\ 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \varphi_{zi} \\ v_j \\ \varphi_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_z & 0 & 0 & L^2/(4EI_z) \\ 0 & -L/2EI_z & -L^2/(4EI_z) & 0 \\ 0 & L^2/(4EI_z) & \alpha_z & 0 \\ -L^2/(4EI_z) & 0 & 0 & L/2EI_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{yi} \\ M_{zi} \\ Q_{yj} \\ M_{zj} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{vi} \\ f_{\varphi zi} \\ f_{vj} \\ f_{\varphi zj} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Onde:  $\alpha_z = L^3 [2 + 6EI_z / (\kappa GAL^2)] / (12EI_z)$ ,  $f_{vi} = f_{vj} = 5q_y L^4 / (48EI_z)$ ,  $f_{\varphi zi} = q_y L^3 / (6EI_z)$  e  $f_{\varphi zj} = -f_{\varphi zi}$ .

O problema da torção sob as hipóteses de Saint-Venant é governado pela equação (similar à da tração axial):

$$GI_p \frac{d^2\theta_x(x)}{dx^2} + t(x) = 0 \quad (7)$$

Onde:  $I_p$ , é o momento polar de inércia;  $\theta_x(x)$ , é o ângulo de torção;  $t(x)$  é o torque distribuído ao longo da barra.

Ainda explorando as similaridades com o problema da tração axial, uma representação algébrica local para a torção em estudo, com base na Eq. (3), pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{xj} \end{Bmatrix} + 1/2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{xj} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2GI_p} \begin{bmatrix} 0 & -L \\ L & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{\vartheta i} \\ f_{\vartheta j} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

Onde os ângulos de torção, os momentos torçores nodais e o vetor de carregamento são respectivamente:  $\theta_{xi} = \theta_x(x = -a)$ ,  $\theta_{xj} = \theta_x(x = a)$ ,  $T_i = T(x = -a)$ ,  $T_j = T(x = a)$  e  $f_{\vartheta} = f_{\vartheta j} = tL^2 / (4GI_p)$ .

O problema da flexão em  $y$  por sua vez guarda similaridade com o da flexão em  $z$ , de forma que poucos ajustes (correções de sinais e a permuta de  $I_z$  por  $I_y$ ) na Eq. (6) devem ser feitos para que o sistema algébrico em coordenadas locais seja escrito:

$$\begin{Bmatrix} w_i \\ \varphi_{yi} \\ w_j \\ \varphi_{yj} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 & -L/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 & L/2 \\ 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \varphi_{yi} \\ w_j \\ \varphi_{yj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_y & 0 & 0 & -L^2/(4EI_y) \\ 0 & L/2EI_y & L^2/(4EI_y) & 0 \\ 0 & -L^2/(4EI_y) & -\alpha_y & 0 \\ L^2/(4EI_y) & 0 & 0 & -L/2EI_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{zi} \\ M_{yi} \\ Q_{zj} \\ M_{yj} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{wi} \\ f_{\varphi_{yi}} \\ f_{wj} \\ f_{\varphi_{yj}} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

com:  $\alpha_y = L^3 [2 + 6EI_y / (\kappa GAL^2)] / (12EI_y)$ ,  $f_{wi} = f_{wj} = 5q_y L^4 / (48EI_y)$ ,  $f_{\varphi_{zi}} = -f_{\varphi_{zi}} = q_z L^3 / (6EI_y)$ .

Os sistemas algébricos indicados na Eq. (3), Eq. (6), Eq. (8) e Eq.(9) utilizam sistemas locais distintos para deslocamentos e esforços. Uma forma mais elegante aqui proposta, é a unificação desses sistemas na geração do sistema em coordenadas globais de cada barra.

Assim, o sistema local unificado, Figura 3, para a barra de PEP (com os efeitos de tração, torção e flexão em  $y$  e em  $z$ ) pode ser escrito, fazendo-se as devidas correções de sinais nas equações envolvidas, como na Eq. (10), sendo seus vetores e matrizes abaixo explicitadas:

$$\{\bar{u}\} + [\bar{h}] \cdot \{\bar{u}\} = [\bar{g}] \cdot \{\bar{p}\} + \{\bar{b}\} \quad (10)$$

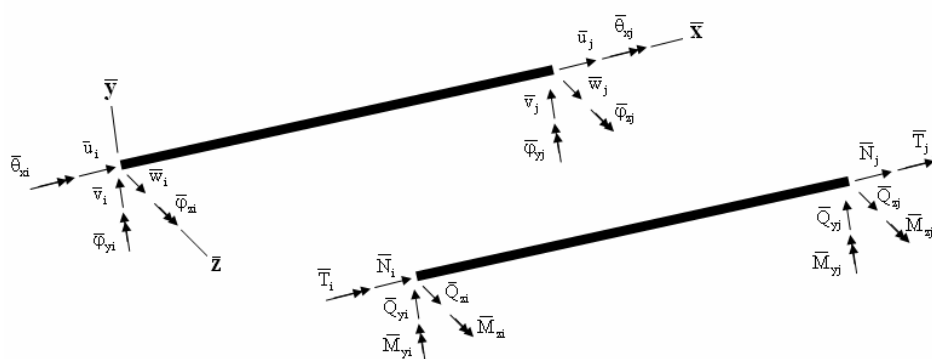


Figura 3: Sistema local unificado do pórtico espacial padrão

$$\begin{aligned} \{\bar{u}\}^T &= \{\bar{u}_i \quad \bar{v}_i \quad \bar{w}_i \quad \bar{\theta}_{xi} \quad \bar{\varphi}_{yi} \quad \bar{\varphi}_{zi} \quad \bar{u}_j \quad \bar{v}_j \quad \bar{w}_j \quad \bar{\theta}_{xj} \quad \bar{\varphi}_{yj} \quad \bar{\varphi}_{zj}\} \\ \{\bar{p}\}^T &= \{\bar{N}_i \quad \bar{Q}_{yi} \quad \bar{Q}_{zi} \quad \bar{T}_i \quad \bar{M}_{yi} \quad \bar{M}_{zi} \quad \bar{N}_j \quad \bar{Q}_{yj} \quad \bar{Q}_{zj} \quad \bar{T}_j \quad \bar{M}_{yj} \quad \bar{M}_{zj}\} \\ \{\bar{b}\}^T &= \{\bar{f}_{ui} \quad \bar{f}_{vi} \quad \bar{f}_{wi} \quad \bar{f}_{\theta} \quad \bar{f}_{\varphi_{yi}} \quad \bar{f}_{\varphi_{zi}} \quad \bar{f}_{uj} \quad \bar{f}_{vj} \quad \bar{f}_{wj} \quad \bar{f}_{\theta} \quad \bar{f}_{\varphi_{yj}} \quad \bar{f}_{\varphi_{zj}}\} \end{aligned}$$

$$[\bar{h}] = \begin{bmatrix} \left[ \begin{matrix} \bar{h}_{i i} \\ \bar{h}_{j i} \end{matrix} \right] & \left[ \begin{matrix} \bar{h}_{i j} \\ \bar{h}_{j j} \end{matrix} \right] \end{bmatrix}, \text{ com: } [\bar{h}_{i i}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{L}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 \left[ \bar{h}_{ij} \right] = \left[ \bar{h}_{ji} \right] &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ e } \left[ \bar{h}_{jj} \right] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{L}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
 \left[ \bar{g} \right] &= \begin{bmatrix} \left[ \bar{g}_{ii} \right] & \left[ \bar{g}_{ij} \right] \\ \left[ \bar{g}_{ji} \right] & \left[ \bar{g}_{jj} \right] \end{bmatrix}, \text{ com: } \left[ \bar{g}_{ii} \right] = \left[ \bar{g}_{jj} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{2EI_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{2EI_z} \end{bmatrix}, \\
 \left[ \bar{g}_{ij} \right] &= \begin{bmatrix} -\frac{L}{2EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L^2}{4EI_z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{4EI_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{4EI_p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{L^2}{4EI_y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{4EI_z} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \left[ \bar{g}_{ji} \right] = \begin{bmatrix} -\frac{L}{2EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{4EI_z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L^2}{4EI_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{4EI_p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{4EI_y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{L^2}{4EI_z} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

## 2.2 Pórtico espacial enrijecido por núcleo (PEEN)

Para a representação matemática do PEEN é necessário, além do equacionamento dos problemas do pórtico espacial não enrijecido, a descrição adicional dos problemas relativos ao comportamento do núcleo.

A estrutura de enrijecimento é tomada, neste trabalho, como uma barra de seção transversal aberta de paredes delgadas; conseqüentemente o empenamento das seções transversais não se dá necessariamente com distribuição uniforme ao longo do eixo longitudinal da barra, invalidando, assim, a teoria da torção uniforme de Saint-Venant.

A teoria da torção não-uniforme do modelo de Vlasov (1961) leva em conta as seguintes hipóteses: 1) após a deformação da barra, a seção transversal projeta-se indeformada no seu plano  $zy$ , comportando-se como se fosse rijá nesse plano; 2) nos pontos da linha do esqueleto as distorções, associadas ao eixo longitudinal da barra e ao sistema de coordenadas do



esqueleto da seção, são nulas; 3) são admitidas translações e rotações da seção inteira.

Se o modelo de Vlasov (1961) for assumido para representar esse empenamento com distribuição não-uniforme, a equação governante do problema de torção fica:

$$EI_{\omega} \frac{d^4 \theta_x(x)}{dx^4} - GI_t \frac{d^2 \theta_x(x)}{dx^2} = t(x) \quad (11)$$

onde:  $I_{\omega}$  é o momento de inércia setorial;  $I_t$ , é o momento de inércia à torção;  $\theta_x(x)$ , é o ângulo de torção e,  $t(x)$  é o torque distribuído ao longo da barra.

A equação diferencial governante do problema da torção não-uniforme, Eq. (11), pode ser transformada em um sistema de equações integrais equivalentes através da técnica dos resíduos ponderados, obtendo-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \theta(\varepsilon) + [T^*(x-\varepsilon)\theta(x)]_0^L - [B^*(x-\varepsilon)\theta'(x)]_0^L = \\ [T(x)\theta^*(x-\varepsilon)]_0^L - [B(x)\theta^{*'}(x-\varepsilon)]_0^L + \int_0^L t(x)\theta^*(x-\varepsilon)dx \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\varepsilon}(\varepsilon) + \left[ \frac{dT^*}{d\varepsilon}(x-\varepsilon)\theta(x) \right]_0^L - \left[ \frac{dB^*}{d\varepsilon}(x-\varepsilon)\theta'(x) \right]_0^L = \\ \left[ T(x)\frac{d\theta^*}{d\varepsilon}(x-\varepsilon) \right]_0^L - \left[ B(x)\frac{d\theta^{*'}}{d\varepsilon}(x-\varepsilon) \right]_0^L + \int_0^L t(x)\frac{d\theta^*}{d\varepsilon}(x-\varepsilon)dx \end{aligned}$$

cujas soluções fundamentais, aqui apresentadas pela primeira vez na literatura, são:

$$\theta^*(x-\varepsilon) = \frac{1}{2\alpha GI_t} \{-\alpha r + \sinh \alpha L \cosh \alpha(r-L) + \cosh \alpha L \sinh \alpha(r-L)\}$$

$$\theta^{*'}(x-\varepsilon) = \frac{\operatorname{sgn}(r)}{2GI_t} \{-1 + \sinh \alpha L \sinh \alpha(r-L) + \cosh \alpha L \cosh \alpha(r-L)\}$$

$$B^*(x-\varepsilon) = -EI_{\omega} \theta^{*''}(x-\varepsilon) = -\frac{1}{2\alpha} \{\sinh \alpha L \cosh \alpha(r-L) + \cosh \alpha L \sinh \alpha(r-L)\}$$

$$T^*(x-\varepsilon) = GI_t \theta^{*'}(x-\varepsilon) - EI_{\omega} \theta^{*'''}(x-\varepsilon) = -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(r)$$

$$\frac{d\theta^*}{d\varepsilon}(x-\varepsilon) = -\frac{\operatorname{sgn}(r)}{2GI_t} \{-1 + \sinh \alpha L \sinh \alpha(r-L) + \cosh \alpha L \cosh \alpha(r-L)\}$$

$$\frac{dT^*}{d\varepsilon}(x-\varepsilon) = \frac{\delta(r)}{2}$$

$$\frac{dB^*}{d\varepsilon}(x-\varepsilon) = \frac{\operatorname{sgn}(r)}{2} \{\sinh \alpha L \sinh \alpha(r-L) + \cosh \alpha L \cosh \alpha(r-L)\}$$



$$\begin{aligned}
 [\bar{h}_b] = & \begin{bmatrix}
 -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{L}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{sh}{2\alpha} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{ch}{2} \\
 -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{2} & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{L}{2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{sh}{2\alpha} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{ch}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}
 \end{bmatrix} \\
 [\bar{g}_b] = & \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{2EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \alpha_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L^2}{4EI_z} & 0 \\
 0 & 0 & \alpha_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{4EI_y} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\alpha L + sh}{2\alpha GI_t} & 0 & 0 & \frac{1-ch}{2GI_t} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{2EI_y} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L^2}{4EI_y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{2EI_z} & 0 & 0 & -\frac{L^2}{4EI_z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-ch}{2GI_t} & 0 & 0 & \frac{\alpha sh}{2GI_t} \\
 -\frac{L}{2EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{4EI_z} & 0 & 0 & \alpha_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L^2}{4EI_y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha L - sh}{2\alpha GI_t} & 0 & 0 & \frac{1-ch}{GI_t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{L^2}{4EI_y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{2EI_y} & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{L^2}{4EI_z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{2EI_z} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{1-ch}{2GI_t} & 0 & 0 & \frac{\alpha sh}{2GI_t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

### 2.3 Unificação do sistema bi-referenciado

Para unificar os dois sistemas (sistema local com origem dos eixos  $\bar{y}$  e  $\bar{z}$  no baricentro e sistema local com eixos  $\bar{y}_{ct}$  e  $\bar{z}_{ct}$  no centro de torção – CT, vide Figura 5) a transformação dos graus de liberdade do núcleo pode ser efetuada através das expressões:

$$\{\bar{u}_b\} = [\Delta] \cdot \{\bar{u}_{ct}\}, \quad \{\bar{p}_b\} = [\Delta] \cdot \{\bar{p}_{ct}\} \text{ e } \{\bar{b}_b\} = [\Delta] \cdot \{\bar{b}_{ct}\}$$

$$\text{Com: } [\Delta] = \begin{bmatrix} [\delta] & [0] \\ [0] & [\delta] \end{bmatrix} \text{ e } [\delta] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -z_t & y_t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde:  $[\Delta]$  é a matriz de translação,  $[0]$  é uma matriz nula de ordem 7; o índice ou subscrito utilizado em  $\{\bar{u}_{ct}\}$ ,  $\{\bar{p}_{ct}\}$  e  $\{\bar{b}_{ct}\}$  indica que esses vetores estão referidos ao sistema bi-referenciado unificado com origem no CT.  $z_t$  e  $y_t$  são as coordenadas do CT, em relação ao sistema com origem no centro de gravidade, como mostrado na Figura 5.

Define-se, então, uma relação entre as matrizes de influência referidas ao sistema local bi-referenciado e as referidas ao sistema com centro no CT, a partir das matrizes de translação  $[\Delta]$  e  $[\Delta]$ , possibilitando seja escrita a Eq. (15):

$$\{\bar{u}_{ct}\} + [\bar{h}_{ct}] \cdot \{\bar{u}_{ct}\} = [\bar{g}_{ct}] \cdot \{\bar{p}_{ct}\} + \{\bar{b}_{ct}\} \quad (15)$$

Onde:  $[\bar{h}_{ct}] = [\Delta]^T \cdot [\bar{h}_b] \cdot [\Delta]$ ,  $[\bar{g}_{ct}] = [\Delta]^T \cdot [\bar{g}_b] \cdot [\Delta]$  e  $[\bar{b}_{ct}] = [\Delta]^T \cdot [\bar{b}_b]$ .

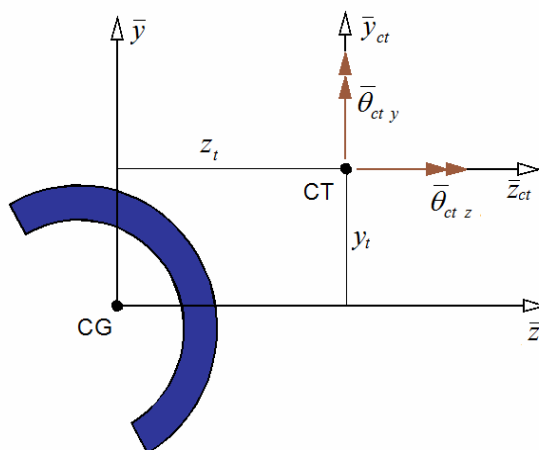


Figura 5: Coordenadas do Centro de Torção

Os vetores deslocamentos, esforços e das forças de corpo, no sistema local com centro no CT são respectivamente  $\{\bar{u}_{ct}\}$ ,  $\{\bar{p}_{ct}\}$  e  $\{\bar{b}_{ct}\}$ ; e as matrizes de influência,  $[\bar{h}_{ct}]$  e  $[\bar{g}_{ct}]$ .

### 3 SISTEMA ALGEBRICO DA ESTRUTURA

A representação algébrica da estrutura (PEP e PEEN) requer que as contribuições advindas das barras sejam convenientemente acumuladas de forma a descrever o comportamento da estrutura como um todo. Em busca desse objetivo algumas transformações nos sistemas algébricos locais das barras devem ser efetuadas, obtendo-se assim os sistemas algébricos globais dessas mesmas barras.

#### 3.1 Sistema Global da Barra (SGR)

A princípio, a superposição dos campos vetoriais (esforços e deslocamentos) de cada extremidade de barra deve ser feita através de uma soma vetorial (magnitude e orientação) nos nós comuns. Para que estes vetores sejam somados algebricamente ou escalarmente (apenas suas magnitudes), eles precisam necessariamente estar na mesma direção para que suas contribuições sejam corretamente consideradas.

Para tanto, deve-se assegurar para cada membro que as matrizes de influência e o seu vetor de carregamento estejam no mesmo sistema de coordenadas. Os campos no sistema local podem ser transformados para global a partir das relações geométricas entre os eixos desses sistemas.

Assim, os deslocamentos, os esforços e as forças externas locais são correlacionados com suas respectivas contrapartes globais,  $\{U\}$ ,  $\{P\}$ , e  $\{B\}$ , como:

$$\begin{aligned}\{\bar{u}_{ct}\} &= [R] \cdot \{U\} \\ \{\bar{b}_{ct}\} &= [R] \cdot \{B\} \\ \{\bar{p}_{ct}\} &= [R] \cdot \{P\}\end{aligned}\quad (16)$$

Define-se, então, uma relação entre as matrizes de influência locais (referidas ao sistema centrado no CT para todas as barras do PEEN) e as de influência globais a partir da matriz de transformação  $[R]$ . A representação algébrica no sistema global pode ser obtida pela substituição da Eq. (16) na Eq. (10):

$$\{U\} + [H] \cdot \{U\} = [G] \cdot \{P\} + \{B\} \quad (17)$$

Onde  $[H] = [R]^T \cdot [\bar{h}_{ct}] \cdot [R]$ ,  $[G] = [R]^T \cdot [\bar{g}_{ct}] \cdot [R]$ , são as matrizes de influencia no sistema global.

#### 3.2.1 Sistema global da barra de PEP

No caso de pórtico espacial padrão tem-se:

$$[R] = \begin{bmatrix} [R]_{i,i} & [R]_{i,j} \\ [R]_{j,i} & [R]_{j,j} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Com:  $[R]_{i,i} = [R]_{j,j} = \begin{bmatrix} [C] & [0] \\ [0] & [C] \end{bmatrix}$  e  $[R]_{i,j} = [R]_{j,i} = \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix}$ , onde  $[0]$  e  $[C]$  são, na ordem, uma matriz nula de ordem 3 e a matriz dos cossenos mostrada abaixo:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z \\ -(C_x \cdot C_y \cdot \cos\beta + C_z \cdot \sin\beta)/C_{xz} & \cos\beta \cdot C_{xz} & (-C_y \cdot C_z \cdot \cos\beta + C_x \cdot \sin\beta)/C_{xz} \\ (C_x \cdot C_y \cdot \sin\beta - C_z \cdot \cos\beta)/C_{xz} & -C_{xz} \cdot \sin\beta & (-C_y \cdot C_z \cdot \sin\beta + C_x \cdot \cos\beta)/C_{xz} \end{bmatrix} \quad (19)$$

onde  $\beta$  é o ângulo de um dos eixos principais de inércia em relação a  $X$ ;  $C_x, C_y, C_z$  são os cossenos diretores da barra em relação ao sistema global de referência; e  $C_{xz} = \sqrt{C_x^2 + C_z^2}$ .

Quando  $C_{xz}$  for zero, então a matriz  $[C]$  fica:

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & C_y & 0 \\ -C_y \cdot \sin\beta & 0 & \sin\beta \\ C_y \cos\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

### 3.2.2 Sistema global da barra de núcleo dos PEEN

No caso da barra de núcleo, devido ao 7º grau de liberdade em cada extremidade, a matriz de rotação  $[R]$  antes de ordem 12 (no caso do pórtico espacial padrão) passa a ter 14 linhas e 14 colunas, cujas submatrizes-elementos estão abaixo indicadas,

$$[R]_{i,i} = [R]_{j,j} = \begin{bmatrix} [C] & [0] & \{0\} \\ [0] & [C] & \{0\} \\ \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R]_{i,j} = [R]_{j,i} = \begin{bmatrix} [0] & [0] & \{0\} \\ [0] & [0] & \{0\} \\ \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & 0 \end{bmatrix},$$

sendo:  $[0]$  e  $[C]$  como acima definidas,  $\{0\}$  um vetor nulo com 3 linhas e,  $\{0\}^T = \langle 0 \rangle$ .

## 3.3 Montagem do Sistema da Estrutura

Quando duas ou mais barras convergirem para o mesmo nó deve ser levado em conta a continuidade dos deslocamentos e as condições de equilíbrio. No caso do PEP e para as barras normais (i.é., que não constituem o núcleo de enrijecimento) dos PEEN a definição de um nó virtual nas extremidades dessas barras é suficiente para a verificação do equilíbrio nó a nó da estrutura; no caso dos nós envolvendo as barras componentes do núcleo, há que se definir em cada extremidade dessas barras um nó virtual adicional que é o nó virtual de empenamento.

Assim, a montagem do sistema da estrutura será dividida em duas partes: 1) para PEP e barras normais do pórtico enrijecido e, 2) para barras do núcleo dos pórticos enrijecidos.

### 3.3.1 Montagem do Sistema global (PEP)

Para a discussão sobre a montagem do sistema global dos PEP bem como da representação das barras normais dos pórticos espaciais enrijecidos por núcleo, vide [Figura 6](#). Aqui serão consideradas (por simplicidade e concisão) duas barras convergentes. Neste caso isola-se o nó 2 (vide [Figura 6e](#)), indicando-se apenas as barras (1) e (2) que para ele convergem, conforme mostrado na [Figura 7a](#). A [Figura 6e](#) é uma ampliação do nó 2 da [Figura 6d](#), que por sua vez é

uma representação esquemática da parte do PEEN indicado na Figura 6a que esta mostrada na Figura 6b.

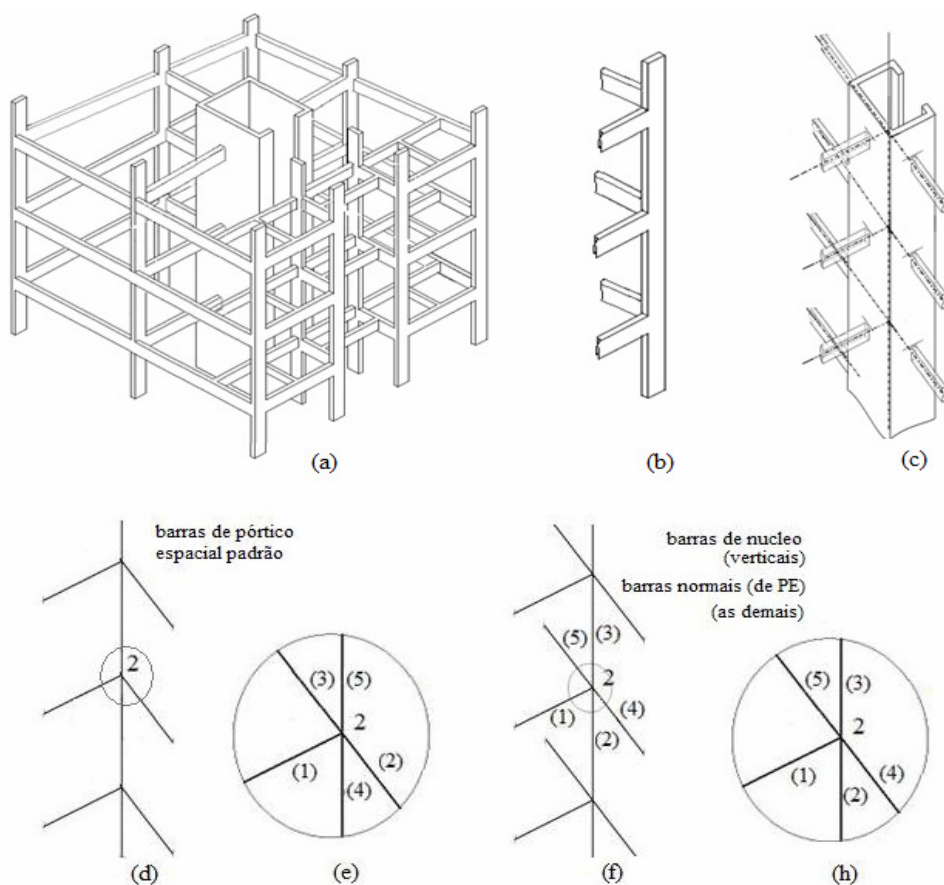


Figura 6: Detalhes do pórtico espacial enrijecido, do núcleo e representação esquemática.

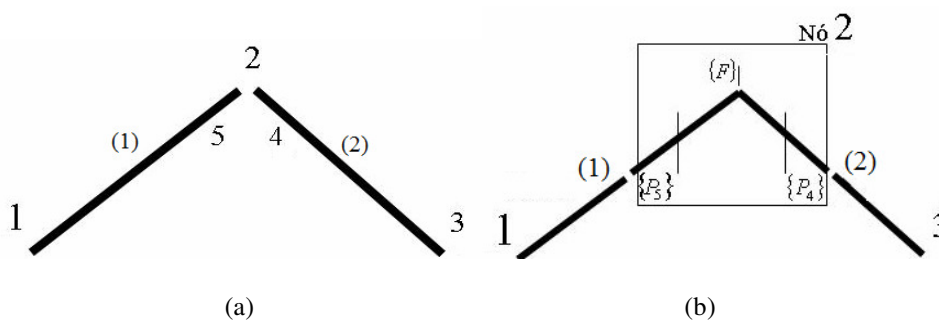


Figura 7: Barras convergentes para o nó 2.

As Eq. (20) e Eq. (21) indicam, na ordem, as representações algébricas para as barras (1) e (2) no sistema global, nas quais o índice entre parêntesis indica a barra a qual a submatriz esta associada e, os utilizados em cada vetor dos esforços e dos deslocamentos indicam o nó (é importante observar que os nós 4 e 5 são virtuais) ao qual essas grandezas se referem:

$$\begin{cases} [H_{11}^{(1)}]\{U_1\} + [H_{12}^{(1)}]\{U_5\} = [G_{11}^{(1)}]\{P_1\} + [G_{12}^{(1)}]\{P_5\} \\ [H_{21}^{(1)}]\{U_1\} + [H_{22}^{(1)}]\{U_5\} = [G_{21}^{(1)}]\{P_1\} + [G_{22}^{(1)}]\{P_5\} \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} [H_{22}^{(2)}]\{U_4\} + [H_{23}^{(2)}]\{U_3\} = [G_{22}^{(2)}]\{P_4\} + [G_{23}^{(2)}]\{P_3\} \\ [H_{32}^{(2)}]\{U_4\} + [H_{33}^{(2)}]\{U_3\} = [G_{32}^{(2)}]\{P_4\} + [G_{33}^{(2)}]\{P_3\} \end{cases} \quad (21)$$

Aplicando-se as condições de compatibilidade de deslocamento nas seções à esquerda e à direita no nó 2, tem-se:

$$\{U_2\} = \{U_4\} = \{U_5\} \quad (22)$$

Além disso, devem ser satisfeitas as equações de equilíbrio no nó 2, vide [Figura 7b](#):

$$\{P_5\} + \{P_4\} + \{F\} = \{0\} \quad (23)$$

Onde:  $\{F\}$  é o vetor que contém as forças e momentos diretamente aplicados no nó 2;  $\{P_5\}$  e  $\{P_4\}$  são os vetores que contém, respectivamente, os esforços à esquerda e à direita desse nó.

Substituindo-se as condições de compatibilidade de deslocamento, de acordo com a [Eq. \(15\)](#), e as condições de equilíbrio, conforme a [Eq. \(16\)](#), nas representações algébricas indicadas nas [Eq. \(13\)](#) e [Eq. \(14\)](#), o sistema algébrico da estrutura pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} [H_{11}^{(1)}] & [H_{12}^{(1)}] & [0] & [0] & [-G_{12}^{(1)}] \\ [H_{21}^{(1)}] & [H_{22}^{(1)}] & [0] & [0] & [-G_{22}^{(1)}] \\ [0] & [H_{32}^{(2)}] & [H_{33}^{(2)}] & [-G_{32}^{(2)}] & [0] \\ [0] & [H_{22}^{(2)}] & [H_{23}^{(2)}] & [-G_{22}^{(2)}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [I] & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_1\} \\ \{U_2\} \\ \{U_3\} \\ \{P_4\} \\ \{P_5\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G_{11}^{(1)}] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [G_{21}^{(1)}] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [G_{33}^{(2)}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [G_{23}^{(2)}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [-I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{0\} \\ \{P_3\} \\ \{0\} \\ \{F\} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

### 3.3.2 Montagem do Sistema global (PEEN)

Para a discussão sobre a montagem do sistema das barras de núcleo, serão consideradas apenas três das barras convergentes no nó 2 da [Figura 6h](#): as barras (1), (2) e a barra (3). Convém ressaltar que das barras consideradas as duas últimas são de núcleo, vide [Figura 8](#).

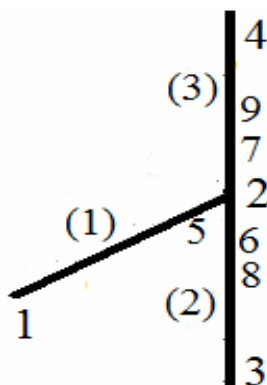


Figura 8: Barras convergentes no nó 2

Das condições de compatibilidade de deslocamento entre os deslocamentos do nó geométrico 2 ([Figura 8](#)) e os deslocamentos dos nós virtuais (nós: 5, 6 e 7), e dos virtuais de



bi-momento (nós 8 e 9) das extremidades das barras que chegam à esse nó, tem-se:

$$\begin{aligned} \{U_5\} = \{U_6\} = \{U_7\} = \{U_2\} \\ \{\psi_8\} = \{\psi_9\} = \{\psi_2\} \end{aligned} \tag{25}$$

Além disso, devem ser satisfeitas as equações de equilíbrio no nó 2, vide Figura 9:

$$\begin{aligned} \{P_5\} + \{P_6\} + \{P_7\} + \{F_2\} = \{0\} \\ B_8 + B_9 + M_{\omega_2} = 0 \end{aligned} \tag{26}$$

onde:  $\{F_2\}$  é o vetor das forças e momentos externos aplicados no nó 2;  $\{P_5\}$ ,  $\{P_6\}$  e  $\{P_7\}$  os que contém os esforços de reação das barras sobre o nó (contemplando apenas as coordenadas de barra de pórtico espacial) e, finalmente,  $B_8$  e  $B_9$  são os bi-momentos de reação das barras do núcleo, associados às 7ª e 14ª coordenadas, e  $M_{\omega_2}$  o bi-momento aplicados ao nó.

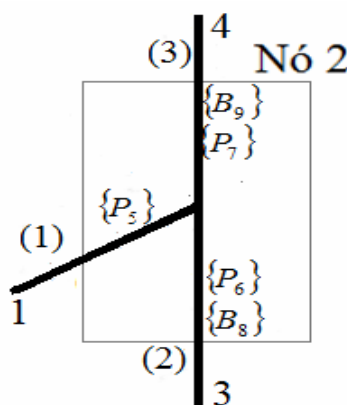


Figura 9: Condição de Equilíbrio do nó

Substituindo-se as condições de compatibilidade de deslocamento, de acordo com a Eq. (15), e as condições de equilíbrio, conforme a Eq. (16), nas representações algébricas indicadas nas Eq. (13) e Eq. (14), o sistema algébrico da estrutura pode ser reagrupado como:

$$\begin{bmatrix} [H_{11}^{(1)}] & [H_{12}^{(1)}] & [0] & [0] & [-H_{12}^{(1)}] & [0] & [0] & \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} \\ [H_{21}^{(1)}] & [H_{22}^{(1)}] & [0] & [0] & [-G_{22}^{(1)}] & [0] & [0] & \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} \\ [0] & [H_{32}^{(2)}] & [H_{33}^{(2)}] & [0] & [0] & [0] & [-G_{32}^{(2)}] & \{H_{32}^{(2)}\} & \{H_{33}^{(2)}\} & \{0\} & \{-G_{33}^{(2)}\} & \{0\} & \{0\} \\ [0] & [H_{22}^{(2)}] & [H_{23}^{(2)}] & [0] & [0] & [0] & \{-G_{22}^{(2)}\} & \{H_{22}^{(2)}\} & \{H_{23}^{(2)}\} & \langle 0 \rangle & \{-G_{22}^{(2)}\} & \{0\} & \{0\} \\ [0] & [H_{22}^{(3)}] & [0] & [H_{24}^{(3)}] & [0] & [-G_{22}^{(3)}] & [0] & \{H_{22}^{(3)}\} & \{0\} & \{H_{24}^{(3)}\} & \{0\} & \{-G_{22}^{(3)}\} & \{0\} \\ [0] & [H_{42}^{(3)}] & [0] & [H_{44}^{(3)}] & [0] & [-G_{42}^{(3)}] & [0] & \{H_{42}^{(3)}\} & \{0\} & \{H_{44}^{(3)}\} & \{0\} & \{-G_{42}^{(3)}\} & \{0\} \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [I] & [I] & [I] & \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} \\ \langle 0 \rangle & \langle H_{32}^{(2)} \rangle & \langle H_{33}^{(2)} \rangle & \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & \langle -G_{32}^{(2)} \rangle & H_{32}^{(2)} & H_{33}^{(2)} & 0 & -G_{32}^{(2)} & 0 & \psi_2 \\ \langle 0 \rangle & \langle H_{22}^{(2)} \rangle & \langle H_{23}^{(2)} \rangle & \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & \langle -G_{22}^{(2)} \rangle & H_{22}^{(2)} & H_{23}^{(2)} & 0 & -G_{22}^{(2)} & 0 & \psi_3 \\ \langle 0 \rangle & \langle H_{22}^{(3)} \rangle & \langle 0 \rangle & \langle H_{24}^{(3)} \rangle & \langle 0 \rangle & \langle -G_{24}^{(3)} \rangle & \langle 0 \rangle & H_{22}^{(3)} & 0 & H_{24}^{(3)} & 0 & -G_{22}^{(3)} & \psi_4 \\ \langle 0 \rangle & \langle H_{42}^{(3)} \rangle & \langle 0 \rangle & \langle H_{44}^{(3)} \rangle & \langle 0 \rangle & \langle -G_{42}^{(3)} \rangle & \langle 0 \rangle & H_{42}^{(3)} & 0 & H_{44}^{(3)} & 0 & -G_{42}^{(3)} & B_8 \\ \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & B_9 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}
 \{G_{11}^{(1)}\} & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} \\
 \{H_{21}^{(1)}\} & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} \\
 [0] & [0] & \{G_{33}^{(2)}\} & [0] & [0] & [0] & [0] & \{0\} & \{G_{33}^{(2)}\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} \\
 [0] & [0] & \{G_{23}^{(2)}\} & [0] & [0] & [0] & [0] & \{0\} & \{G_{23}^{(2)}\} & \langle 0 \rangle & \{0\} & \{0\} & \{0\} \\
 [0] & [0] & [0] & \{G_{24}^{(3)}\} & [0] & [0] & [0] & \{0\} & \{0\} & \{G_{24}^{(3)}\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} \\
 [0] & [0] & [0] & \{G_{44}^{(3)}\} & [0] & [0] & [0] & \{0\} & \{0\} & \{G_{44}^{(3)}\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} \\
 [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{-I\} & \{F_2\} \\
 \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & \langle G_{33}^{(2)} \rangle & \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & 0 & G_{33}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & \langle G_{23}^{(2)} \rangle & \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & 0 & G_{23}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & M_{w3} \\
 \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & \langle G_{24}^{(3)} \rangle & \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & 0 & 0 & G_{24}^{(3)} & 0 & 0 & M_{w4} \\
 \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & \langle G_{44}^{(3)} \rangle & \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & 0 & 0 & G_{44}^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\
 \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & M_{w2}
 \end{bmatrix}$$

### 4 VALIDAÇÃO NUMÉRICA

A validação da estratégia de solução proposta para a análise dos PEP e dos PEEN neste trabalho é apresentada em três etapas: a) viga I indicada na Figura 10; b) pórtico espacial padrão (sem enrijecimento), vide Figura 11, e c) pórtico espacial enrijecido por núcleo de rigidez, vide Figura 12.

#### 4.1 Análise da viga I

As vigas analisadas são de mesmo material, de mesmo comprimento,  $L = 4,0m$ , e têm a mesma seção transversal. As propriedades do material e do perfil I que caracterizam a seção transversal são: módulo de elasticidade,  $E = 2,1E6N/cm^2$ ; módulo de elasticidade transversal  $G = 0,8E6N/cm^2$ ,  $A = 23,75cm^2$ ,  $Y_{CT} = Z_{CT} = 0cm$ ,  $I_t = 2cm^4$ ,  $I_\omega = 20736cm^6$ .

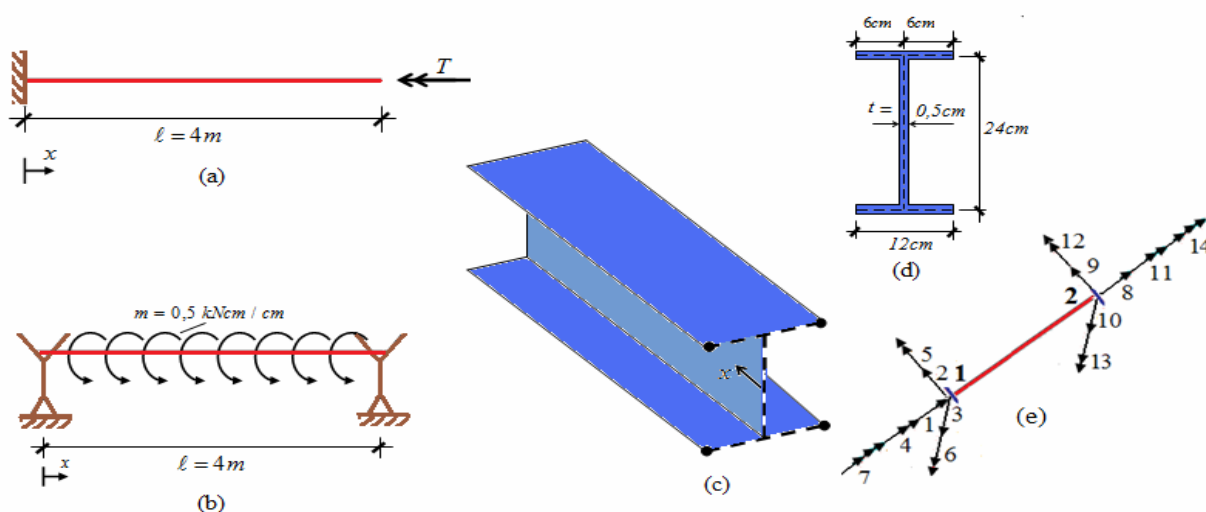


Figura 10: Vigas, carregamento e sistema local de coordenadas

A viga mostrada na Figura 10a é engastada-livre cujo carregamento é constituído de um torque aplicado na extremidade livre  $T = 0,5kNcm$ . A outra, representada na Figura 10b é bi-

apoiada com carregamento constituído de um torque uniformemente distribuído ao longo do seu eixo longitudinal, cuja intensidade é  $m = 0,5 \text{ kNcm/cm}$ . Nessa viga os dois apoios não oferecem vínculos nos graus de liberdade (GL) relativas ao empenamento, vinculando todas os demais GL, sendo chamados de apoios garfo.

Os resultados da análise das vigas aqui obtidos estão apresentados na Tabela 1 e na Tabela 2 onde são encontrados, também, os calculados analiticamente (Mori, 1993) através das expressões:

$$\alpha = \sqrt{\frac{GI_t}{EI_w}}, \quad \phi_x = \frac{M_t}{GI_t} \left( x - L + \frac{\tanh(L\alpha)}{\alpha} - \frac{\sinh(x\alpha)}{\alpha \cosh(L\alpha)} \right),$$

$$\psi = -\frac{M_t}{GI_t} \left( \frac{\alpha \cosh(x\alpha)}{\alpha \cosh(L\alpha)} - 1 \right),$$

$$B = -\frac{M_t}{\alpha} \left( \frac{\sinh(x\alpha)}{\cosh(L\alpha)} \right)$$

Viga (a) – Engastada-livre				
GDL	Torção/Bimomento (kN.cm, kN.cm <sup>2</sup> )		Rotações (cm/rad.)	
	Obtidos	Analíticos	Obtidos	Analíticos
4	50,0000	50,0000	-0,742475	-0,7424749
7	0,0000	0,0000	-2,576114E-3	-2,5761144E-3
11	-50,0000	-50,0000	0,000000	0,000000
14	-8120,4020	-8120,4018	0,000000	0,000000

Tabela 1: Resultados comparados com os da literatura - viga (a)

Viga (b) – Bi-apoiada (garfos)				
GDL	Torção/Bimomento (kN.cm, kN.cm <sup>2</sup> )		Rotações (cm/rad)	
	Obtidos	Analíticos	Obtidos	Analíticos
4	100	100	0,00000	0,00000
7	0	0	-1.933000E-003	-1.933001E-003
11	-100	-100	0,0000	0,000000
14	0	0	0,000	0,000000

Tabela 2: Resultados comparados com os da literatura - viga (b)

## 4.2 Análise do pórtico espacial padrão

Dados relativos ao pórtico espacial padrão (Figura 11) (Gere e Weaver, 1981):  $P = 4,45 \text{ kN}$  (1 kip),  $E = 2,060 \text{ E5MPa}$  (30000 ksi),  $G = 8,240 \text{ E4 MPa}$  (12000 ksi),  $A = 7,097 \text{ E-3 m}^2$  (11 in<sup>2</sup>),  $I_x = 3,455 \text{ E-5 m}^4$  (83 in<sup>4</sup>),  $I_y = 2,331 \text{ E-5 m}^4$  (56 in<sup>4</sup>),  $I_z = 2,331 \text{ E-5 m}^4$  (56 in<sup>4</sup>) e  $L = 3,048 \text{ m}$  (120 in).

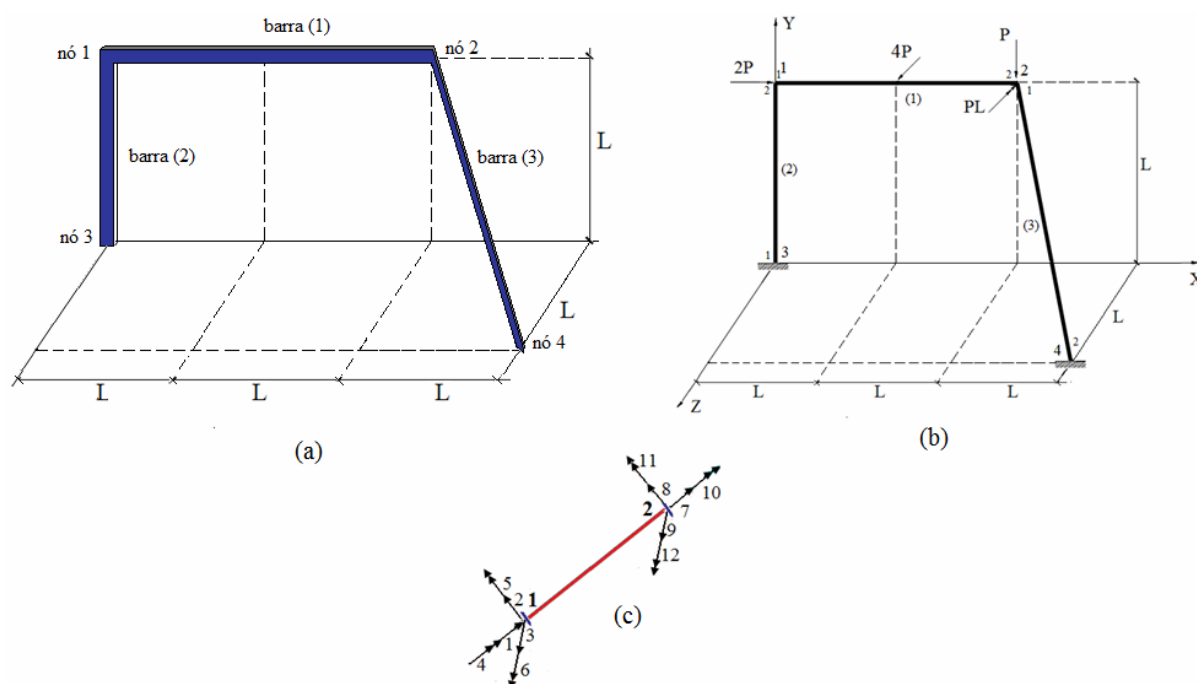


Figura 11: Vigas, carregamento e sistema local de coordenadas

Deslocamentos ( $\times 10^{-2}$ )	Calculados	(Gere e Weaver, 1981)
$d_7 (cm)$	-0,391674	-0,391100
$d_8 (cm)$	1,158628	1,159514
$d_9 (cm)$	1,559491	1,559491
$d_{10} (rad)$	0,003584	0,003585
$d_{11} (rad)$	0,005748	0,005748
$d_{12} (rad)$	-0,002702	-0,002706

Tabela 3: Deslocamentos da extremidade 2 da barra (1) do pórtico espacial, Figura 11

Embora todos os deslocamentos nodais e os das extremidades das barras, tenham sido calculados; como foram também as reações de apoio e os esforços nas extremidades das barras, são mostrados na Tabela 3 apenas os deslocamentos na extremidade 2 da barra (1) do pórtico espacial. Esses deslocamentos estão referidos ao sistema local como aquele indicado na Figura 11c.

### 4.3 Análise do pórtico espacial enrijecido por núcleo

O pórtico espacial enrijecido por núcleo, mostrado na Figura 12 e na Figura 13, está engastado nas bases e é formado por barras com as seguintes características físicas:  $E = 2.8E + 07 \text{ kN} / \text{m}^2$ ,  $G = 1,077E + 07 \text{ kN} / \text{cm}^2$ . Já suas propriedades geométricas das seções transversais são: das barras verticais que representam o núcleo:  $A = 4,50E - 02 \text{ m}^2$ ,  $Z_{CT} = 0,0000E + 00 \text{ m}$ ,  $Y_{CT} = -1,0067 \text{ m}$ ,  $I_t = 1.500E - 03 \text{ m}^4$ ,  $I_z = 0.0906E00 \text{ m}^4$ ,  $I_y = 2.6800E - 01 \text{ m}^4$ ,  $\beta = 0$ ,  $I_\omega = 5.133E - 02 \text{ m}^6$ ,  $L = 3,0 \text{ m}$ ; das barras verticais (pilares):  $A = 4.0000E - 02 \text{ m}^2$ ,  $I_p = 2,6660E - 04 \text{ cm}^4$ ,  $I_y = 1,3333E - 04 \text{ m}^4$   $I_z = 1,3333E - 04 \text{ m}^4$  e

$L = 3,0\text{m}$ ; das barras horizontais (vigas)  $A = 8.0000\text{E} - 02\text{m}^2$ ,  $I_p = 1,3334\text{E} - 03\text{m}^4$ ,  $I_y = 2.6667\text{E} - 04\text{m}^4$ ,  $I_z = 1.0667\text{E} - 03\text{m}^4$ ,  $L_{V1} = 8,00\text{m}$   $L_{V2} = 4,00\text{m}$ ,  $L_{V4} = 4,00\text{m}$ . Na Tabela 4 e na Tabela 5 estão mostrados os resultados da análise. Convém notar que na Figura 12b, a numeração dos nós está em preto, a das barras verticais em vermelho, a das barras horizontais em rosa. Já as ações externas são  $F = 30\text{kN}$  e  $P = 500\text{kN}$ .

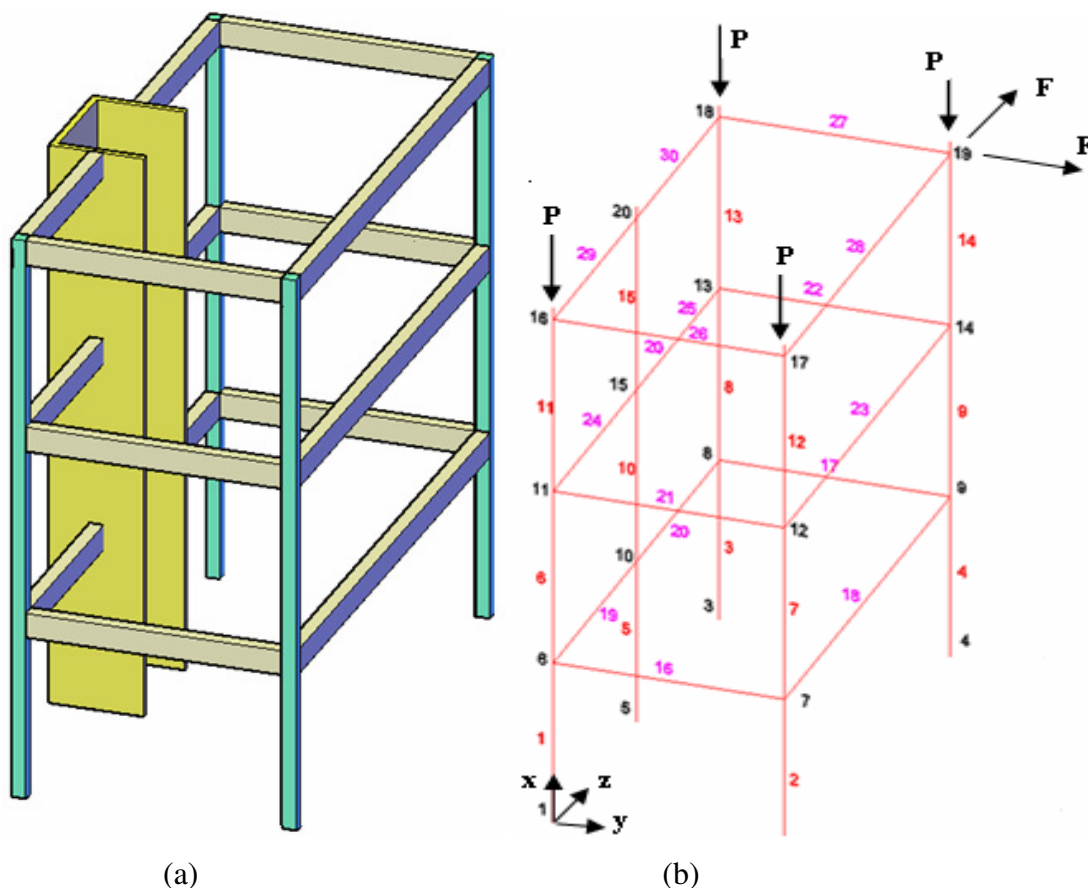


Figura 12: Pórtico enrijecido: a) perspectiva, b) discretização

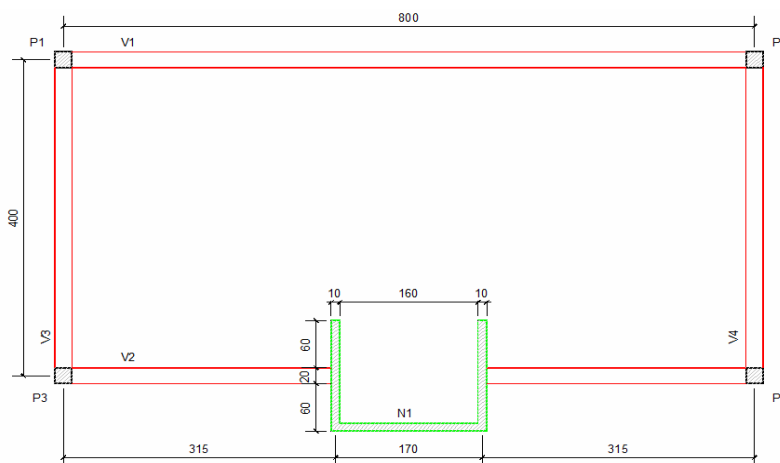


Figura 13: Pórtico enrijecido em planta (dimensões em cm)

Nó	$F_1$ (kN)	$F_2$ (kN)	$F_3$ (kN)	$F_4$ (kNm)	$F_5$ (kNm)	$F_6$ (kNm)	$F_7$ (kNm <sup>2</sup> )
1	484,500	-1,154	-0,319	-0,258	0,418	-1,868	-----
2	503,172	-1,176	-0,625	0,004	1,371	-1,890	-----
3	482,232	-1,394	0,304	1,347	-0,206	-2,283	-----
4	516,086	-1,415	-0,491	-0,097	1,235	-2,305	-----
5	14,011	-24,861	-28,869	2,766	224,600	-184,621	34,446
Soma	2000,000	-30,000	-30,000	-----	-----	-----	-----

Tabela 4: Componentes das reações de apoio ( Forças  $F_1 - F_3$ , Momentos  $F_4 - F_6$  e Bi-momento  $F_7$  )

Nó	$10^3 U_1$	$10^3 U_2$	$10^3 U_3$	$10^3 U_4$	$10^3 U_5$	$10^3 U_6$	$10^3 U_7$
16	-3,929	3,557	0,771	1,384	0,446	0,109	---
17	-4,031	3,563	9,486	0,151	-0,666	0,083	---
18	-3,915	7,385	0,786	-0,713	-0,840	0,251	----
19	-4,110	7,420	9,533	0,665	-1,114	0,228	----
20	-0,340	2,011	0,760	-0,747	-0,123	0,330	-0,132

Tabela 5: Deslocamentos  $U_1 - U_3$  (m), rotações  $U_4 - U_6$  (rad) e empenamento  $U_7$  (rad/m) no SGR

## 5 CONCLUSÕES

Neste trabalho investigaram-se cada etapa do problema do enrijecimento de pórticos espaciais por núcleos estruturais. A representação, dos efeitos de tração, de flexão e de torção, foi feita segundo a metodologia do método dos elementos de contorno. A montagem do sistema algébrico final da estrutura requereu a aplicação de uma técnica conveniente para organizar as contribuições de cada barra no todo. Alguns exemplos são apresentados e comparados com valores da literatura, quando disponíveis.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a Capes pelo suporte financeiro destinado a esta pesquisa.

## REFERENCIAS

- Antes, H., Fundamental solution and integral equations for Timoshenko beams, *Computers and Structures* 81 (2003), 383–396
- Antes, H. Shanz, M. Alvermann, S., Dynamic analyses of plane frames by integral equations for bars and Timoshenko beams, *Journal of sound and vibration* (2004), 807-836
- Augarde, C.E., Deeks, A.J., The use of Timoshenko's exact solution for a cantilever beam in adaptive analysis, *Finite Elem. Anal. Des.* (2008), doi: 10.1016/j.finel.2008.01.010.
- Dias, R. H., Importância e interferências da concepção dos subsistemas verticais em edifícios altos na arquitetura. <http://www.vitruvius.com.br/revistas/read/arquitextos/05.055/520>. acessado em 07/09/2010.
- Gere, J. M., Weaver, W., *Análise de Estruturas Reticuladas*, Guanabara Dois, Rio de Janeiro, RJ, 1981.
- Kapur, K.K., Vibrations of a Timoshenko beam, using a finite element approach, *Journal of the Acoustical Society of America* 40 (1966) 1058–1063.

- Katsikadelis JT, Sapountzakis EJ. Torsion of composite bars by the boundary element method. *ASCE J EngngMech* 1985;111(9):1197-1210.
- Matias Junior, I. G., Análise não linear de estruturas tridimensionais de edifícios altos com núcleos resistentes sobre fundações flexíveis. Tese(mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1997.
- Mendonça, A.V., “Análise da interação placa-estaca-solo via combinação do método dos elementos finitos com o método dos elementos de contorno”. Dissertação(Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, 2002.
- Mori, D.D., Os núcleos estruturais e a não linearidade geométrica na análise de estruturas tridimensionais de edifícios altos. Tese(doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1992.
- Mori, D. D., Flexo-Torção: Barras com Seção Transversal Aberta e Paredes Delgadas. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1993.
- Nickel, R.E., Secor, G.A. Convergence of consistently derived Timoshenko beam finite elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 5 (1972) 243–253.
- Onu, G., Inclusion of warping shear effect in thin-walled core element for multistory building. *Computers & Structures*, v.35, n.2, p.175-182, 1990.
- Petyt, M., *Introduction to finite element vibration analysis*. Cambridge University Press, 1990.
- Sapountzakis, E., Solution of non-uniform torsion of bars by an integral equation method. *Computers and Structures* 77,2000, 659-667
- Sapountzakis. E.J., Mokos. V. G., Warping shear stresses in nonuniform torsion by BEM *Computat* DOI 10.1007/s00466-002-0373-4, *journal Mechanics* 30 (2003) 131–142, Springer-Verlag 2003.
- Saint-venant, B., Memoire sur la torsion des prismes. *memoires des savants etrangers* 1855;14:233±56.
- Smith, B.S., Coull A., *Tall building structures: analysis and design*. By John Wiley & Sons, Inc., 1991.
- Souza Junior, E., Análise da interação entre núcleos estruturais e lajes em edifícios altos. Tese(doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2001.
- Taranath, B.S. *Torsional behaviour of open section shear wall structures*. PhD Thesis. University of Southampton, 1968.
- Timoshenko, S. P., Young, D.Y., *Vibration Problems in Engineering*, 3<sup>rd</sup> Edition, D. van Nostrand, New York, 1961.
- Torres, I.F.R., *Efeito da deformação por cortante no cálculo de edifícios de andares múltiplos com núcleos estruturais*. São Carlos, 1999. 131p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- Vlasov, V. Z., *Thin walled elastic structures*, translated for the Russian–Israeli Program for Scientific Translation, Jerusalem, 1961.